A BIZONYTALANSÁGNAK ÉS A VEVŐKÖR NAGYSÁGÁNAK EGYÜTTES HATÁSA AZ ÁRAKRA[1]

ÁGOSTON KOLOS CSABA
Budapesti Corvinus Egyetem

Ebben a cikkben azzal foglalkozom, hogy a kockázat és a vevőkör nagysága együttesen hogyan hat a termék árára. Kétféle piacot hasonlítok össze: egy biztosítási piacot, és egy termékpiacot. A kétféle piac között az a legfontosabb különbség, hogy termékpiac esetében az eladó számára csak ott jelentkezik kockázat, hogy el tudja-e adni a terméket, míg biztosítási piac esetében az eladó a termék értékesítése után is szembesül kockázattal. A cikk során megmutatom, hogy a vevőkör növekedésének ellentétes hatása lehet a termék árára termék- illetve biztosítási piacok esetében.[2]

1 Bevezetés

Ebben a cikkben azt vizsgálom, hogy bizonytalan eladások esetén a vevőkör bővülésével a termék ára hogyan változik. A cikkben összehasonlítom a termékpiacot és a biztosítási piacot. Bemutatom, hogy ez a fajta bizonytalanság biztosítási piacok esetén másfajta hatást is indukálhat, mint termékpiacok esetén.

A modellben több szerződést vizsgálok egyszerre, ami a szakirodalomra nem jellemző. A szakirodalomban általában egy tipikus szerződésen keresztül vizsgálják a piacokat vagy pedig szerződésállományt vizsgálnak, ahol a kifizetések ingadozását figyelmen kívül hagyják. Ezen cikk keretein belül különösen arra keresem a választ, hogy ez az ingadozás befolyásolja-e az eladó viselkedését, és ha igen, hogyan.

Az eladóról kockázatkerülést tételezek fel. Biztosítókról általában a kockázatsemlegesség a szokásos feltételezés, de pl. Borch [2] cikkében is előfordul a kockázatkerülő biztosító. A biztosító kockázatkerülése melletti érv, hogy a piacon nem érhető el várható értéken biztosítás. Ennek okaként a költségeket szokták felhozni a szakirodalomban. A biztosítási díjkalkuláció során valóban figyelembe veszik a költségeket, de a díjnak olyan részei is vannak, amelyek egyértelműen a biztosító kockázatkerülésére utalnak, mint pl. kockázati pótlék, káringadozási tartalék stb.

[1]Beérkezett: 2004. április 8. e-mail: kolos.agoston@uni-corvinus.hu.

[2]Ezúton szeretnék köszönetet mondani két ismeretlen lektoromnak, akik értékes tanácsaikkal segítették munkámat.

2 A vizsgált modell

A cikk során monopolpiacokat vizsgálok. A monopolhelyzetben lévő eladó C nagyságú induló vagyonnal rendelkezik. Az eladó bizonytalan kimenetek esetén a várható hasznosságát szeretné maximalizálni (Neumann-Morgenstern hasznosságfüggvény). Az eladó kockázatkerülő, és a kockázatelutasítás mértéke a vagyon növekedésével csökken. Az eladó viselkedését u hasznosságfüggvény segítségével írom le, amely legalább kétszer folytonosan differenciálható. Értelemszerűen az eladó hasznossága növekszik a vagyonnal ($u' > 0$), a kockázatelutasítás miatt $u'' < 0$, és a csökkenő mértékű kockázatelutasítás miatt: $\frac{d}{dx}\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right) < 0$.

A vásárlók rezervációs ára különböző, de az eladó nem tudja megkülönböztetni őket. A vásárlók ismerik saját rezervációs árukat, de az eladó csak a rezervációs árak eloszlását ismeri, tehát az információ aszimmetrikus.[3] Az eladó ki tudja kalkulálni a piacra jellemző vásárlási hajlandóságot $V(.)$, ami azt mutatja meg, hogy ha az eladó P árat határoz meg, akkor egy vizsgált vásárló mekkora valószínűséggel veszi meg az eladó termékét. Másképpen fogalmazva, ha a termék ára P, akkor $V(P)$ annak valószínűsége, hogy az eladó olyan vásárlóval találkozott, akinek rezervációs ára P-nél magasabb. A vásárlási hajlandóság függvényről felteszem, hogy folytonos, monoton csökkenő és folytonosan deriválható; továbbá léteznek $\underline{P}$ és $\overline{P}$ árak, hogy $V\left(\underline{P}\right) = 1$ és $V\left(\overline{P}\right) = 0$, azaz létezik olyan ár, amelyen mindenki hajlandó vásárolni, és létezik olyan, amelyen senki.

Biztosítási piac esetén a vásárlók q valószínűség mellett kárral szembesülnek. Ha kár következik be, akkor a biztosító K nagyságú kárpótlásban részesíti a biztosítottat.

A piaci szereplők létszámán azt értem, hány (lehetséges) vevő van a piacon. Egyszereplős biztosítási piac esetén az eladó (várható) hasznossága, ha P árat határoz meg termékének:

$$U(C, P, 1) = V(P)\left(qu(C + P - K) + (1 - q)u(C + P)\right) + \left(1 - V(P)\right)u(C),$$

ahol U első argumentuma az eladó induló vagyonát jelenti, a második a termék árát, a harmadik pedig a piaci szereplők számát. Az eladó $V(P)$ valószínűséggel tudja eladni a termékét. Ha eladta, akkor q valószínűséggel a $C + P - K$ vagyoni helyzetbe kerül és $1 - q$ valószínűséggel a $C + P$ helyzetbe. Amennyiben nem tudta eladni a terméket, akkor marad a C vagyoni helyzetben. Ha az eladó nagyobb árat határoz meg, akkor (ha eladja a terméket) nagyobb lesz a hasznossága is, de kisebb valószínűsséggel realizálja ezt a nagyobb hasznosságot. Hasonlóképpen felírhatjuk az eladó hasznát, ha

[3] Amint később látni fogjuk, biztosítási piacok esetén a káresemény bekövetkeztének valószínűségét a biztosító és a biztosított is ismeri. Biztosítási piacok vizsgálatakor a kárbekövetkezési valószínűség tekintetében is aszimmetrikus informáltságot szoktak feltenni. Én ezzel a feltételezéssel nem élek, mert az általam vizsgált jelenség elemzését nehezíti. Természetesen érdekes kérdés, hogy a kapott eredményeket befolyásolja-e ez a fajta információs aszimmetria.

n szereplő van a piacon[4]:

$$U(C,P,n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j} u(C+kP-jK) \right) \right] \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy az eladó hasznosságát rekurzív módon is fel lehet írni:

$$U(C,P,n) =$$
$$= V(P)\left(q \cdot U(C+P-K,P,n-1) + (1-q)U(C+P,P,n-1)\right) + \tag{2}$$
$$+ (1-V(P))U(C,P,n-1)$$

Ha $K = 0$, akkor már nem beszélhetünk biztosításról, hiszen kár esetén az eladótól nem áramlik pénz a károsulthoz. Ebben az esetben csak a vásárló fizet P nagyságú összeget az eladónak. Ezt az esetet úgy is felfoghatjuk, hogy nem is következik be kár, hanem a vevő megvásárol valamit az eladótól. Ezt az esetet fogom *termékpiacnak* hívni. Az általam vizsgált termékpiac elég speciális. Az eladó hasznosságában nem jelenik meg maga a termék. Tehát az eladó olyan terméket árul, ami az ő számára nem rendelkezik hasznossággal. Szemléletes példa a beduin esete, aki homokot árul a sivatagban. De a szoftverkészítő a gyakorlatban előforduló legjobb példa. Miután kifejlesztette a szoftvert, az számára annyit ér, amennyi bevételt tud realizálni belőle. A terméket bármennyi vevőnek el tudja adni.

Termékpiac esetén $V(0) = 1$, és a feltételezés értelmében létezik egy $\overline{P}$, amire $V(\overline{P}) = 0$. Termékpiac esetén az (1) és (2) kifejezések leegyszerűsödnek:

$$U(C,P,n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} V(P)^k (1-V(P))^{n-k} u(C+kP) \right) \tag{3}$$

$$U(C,P,n) = V(P)U(C+P,P,n-1) + (1-V(P))U(C,P,n-1) \tag{4}$$

A $K > 0$ esetben biztosítási piacról beszélünk. A biztosítási piac sajátosságaiból következik, hogy $V(qK) = 1$ és $V(K) = 0$, azaz várható értéken mindenki vásárol biztosítást, ha pedig a biztosítási díj megegyezik a (legnagyobb) kár nagyságával, akkor biztos, hogy senki sem vásárol biztosítást.

---

[4]Az (1) és a (3) képletekben a kombinatorikus felírás csak akkor helyes, ha abból, hogy egy érdeklődőnek az eladó értékesítette-e a terméket vagy sem, nem lehet információt levonni egy másik érdeklődővel kapcsolatban, vagyis az eladások függetlenek. A függetlenség a vizsgált modellben nem magától értetődő. Tegyük fel, hogy $V(P)$ függvényt két ember rezervációs ára alapján állítottuk össze. Ekkor ha egy érdeklődő van a piacon, akkor az eladó bizonytalansággal szembesül, de ha már kettő, akkor pontosan tudja hogy adott áron hány ember fog vásárolni. A függetlenség biztosítására több lehetőség adódik: az egyik szerint nincs átfedés azon csoport között, akik rezervációs árát $V(P)$ függvény meghatározásához felhasználták, és azok között, akiknek az eladó értékesíti a termékét; egy másik lehetőség szerint végtelen sok személy információja alapján állítják össze $V(P)$ függvényt. Az első lehetőség úgy interpretálható, hogy külföldi tapasztalatokat használnak fel Magyarországon, ami a biztosítási piacon sokszor előfordul. A másik lehetőség úgy interpretálható, hogy a biztosító lehetséges vevőinek száma elenyésző az információ alapjául szolgáló közösség létszámához képest; pl. az eladó monopóliummal rendelkezik valamelyik megyében, de csak országos statisztikák állnak rendelkezésre.

3 Termékpiac

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy az eddig bemutatott feltételezések esetén termékpiacon a vevőkör bővülésével nő a termék ára is.

3.1 Állítás. *Termékpiac esetén ($K = 0$) az $f(P) = U(C, P, n)$ függvény felveszi a maximumát (P_n^{max}) a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, továbbá $0 < P_n^{max} < \overline{P}$, azaz a maximumpont(ok) a $[0, \overline{P}]$ intervallum belső pontja(i).*

Bizonyítás. A feltételek szerint $V(0) = 1$ és $V(\overline{P}) = 0$. Ezek figyelembevételével a (3)-ból a következő adódik:

$$U(C, 0, n) = U(C, \overline{P}, n) = u(C)$$

és $V(P)$ folytonossága miatt kell olyan $0 < \tilde{P} < \overline{P}$ pontnak léteznie, melyre:

$$V(\tilde{P}) > 0 \tag{5}$$

Tudva, hogy $u'(x) > 0$, az (5) összefüggést figyelembe véve megállapítható, hogy:

$$\begin{aligned} U(C, \tilde{P}, n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(\tilde{P})^k (1 - V(\tilde{P}))^{n-k} u(C + k\tilde{P}) > \\ &> \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(\tilde{P})^k (1 - V(\tilde{P}))^{n-k} u(C) = u(C) \end{aligned} \tag{6}$$

Az $f(P) = U(C, P, n)$ függvény folytonos a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, így a Weierstrass tétel szerint felveszi a szélsőértékeit, azaz a maximumát is. A (6) összefüggés miatt ez a maximum az intervallum belsejében kell hogy legyen.

■

Tudjuk, hogy $f(P) = U(C, P, n)$ függvény deriválható a $[0, \overline{P}]$ intervallumon, ezért az $f'(P) = U_2'(C, P, n)$ derivált 0-vá válik a maximumhelyen.

A cikk további részében feltételezem, hogy $U(C, P, n)$ függvény P szerinti maximumhelye rögzített C mellett minden n esetén egyedi. Ezen feltételezéshez nem tudtam szükséges és/vagy elégséges feltételt adni, de az általam numerikusan megvizsgált esetekre mindre teljesült.

3.2 lemma. *Amennyiben a, b, c és d számokra teljesül, hogy b és d előjele megegyezik, továbbá $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, akkor*

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$$

Bizonyítás. Mivel $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d}\frac{a}{b} + \frac{d}{b+d}\frac{c}{d}$, ezért azt mondhatjuk, hogy $\frac{a+c}{b+d}$ tört $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ számok konvex lineáris kombinációja, tehát $\frac{a+c}{b+d}$ értéke $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé kell, hogy essen. Szigorú egyenlőtlenség azért teljesül, mert sem b sem d értéke nem lehet 0.

■

3.3 lemma. *Az $u_i(x)$ hasznosságfüggvényekre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. Legyenek α_i-k pozitív súlyok. Ekkor a*

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x)$$

hasznosságfüggvényre is a csökkenő kockázatelutasítás a jellemző.

Bizonyítás. A lemma bizonyítását először csak két hasznosságfüggvényre mutatom meg, kettőnél több hasznosságfüggvényre az állítást teljes indukcióval bizonyítom.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy

$$\left(-\frac{v''}{v'}\right)' = \left(-\frac{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)''}{(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)'}\right)' < 0 \tag{7}$$

A (7) egyenlőtlenséget az alábbi formában is felírhatjuk:

$$\frac{-(\alpha_1 u_1''' + \alpha_2 u_2''')(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2') + (\alpha_1 u_1'' + \alpha_2 u_2'')(\alpha_1 u_1'' + \alpha_2 u_2'')}{(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2')^2} < 0 \tag{8}$$

A (8) egyenlőtlenség bal oldalán szereplő tört akkor és csak akkor lesz negatív, ha a számlálója negatív. A tört számlálójában elvégezve a beszorzásokat a következő összeghez jutunk:

$$\begin{gathered} -\alpha_1 u_1''' \alpha_1 u_1' - \alpha_1 u_1''' \alpha_2 u_2' - \alpha_2 u_2''' \alpha_1 u_1' - \alpha_2 u_2''' \alpha_2 u_2' + \\ + \alpha_1 u_1'' \alpha_1 u_1'' + \alpha_1 u_1'' \alpha_2 u_2'' + \alpha_2 u_2'' \alpha_1 u_1'' + \alpha_2 u_2'' \alpha_2 u_2'' \end{gathered} \tag{9}$$

Mivel u_1 és u_2 hasznosságfüggvényre is a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, ezért:

$$\left(-\frac{u_1''}{u_1'}\right)' = \frac{-u_1''' u_1' + u_1'' u_1''}{(u_1)^2} < 0 \tag{10}$$

és

$$\left(-\frac{u_2''}{u_2'}\right)' = \frac{-u_2''' u_2' + u_2'' u_2''}{(u_2)^2} < 0 \tag{11}$$

A (10) és (11) egyenlőtlenségből megállapító, hogy

$$0 < u_1'' u_1'' < u_1''' u_1' \tag{12}$$

és

$$0 < u_2'' u_2'' < u_2''' u_2'. \tag{13}$$

A (12) és a (13) egyenlőtlenséget összeszorozzuk, majd gyököt vonunk (a szorzás és a gyökvonás elvégezhető, mert pozitív kifejezésekről van szó):

$$u_1'' u_2'' < \sqrt{u_1''' u_1' u_2''' u_2'} \tag{14}$$

Alkalmazva a számtani és mértani átlag közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy:

$$u_1''u_2'' < \frac{u_1'''u_2' + u_2'''u_1'}{2} \tag{15}$$

A (12), (13) és (15) összefüggésekből következik a hogy a (9) kifejezés értéke kisebb mint 0, ami azt jelenti, hogy v függvényre is a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző.

Teljes indukcióhoz vezessük be a következő jelölést:

$$v_i(x) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k u_k(x)$$

Az eddigiek értelmében $i = 1$-re és $i = 2$-re teljesül, hogy v_i függvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. Belátom, hogy ha v_i függvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás, akkor v_{i+1}-re is teljesül. A bizonyítás készen van, hiszen:

$$v_{i+1} = v_i + \alpha_{i+1}u_{i+1}$$

A lemma feltételei szerint u_{i+1} függvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás, és ez a tulajdonság az indukciós feltétel szerint v_i-re is teljesül. Így v_{i+1} két olyan hasznosságfüggvény nemnegatív lineáris kombinációja, amelyekre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás; a bizonyítás első részének értelmében ennek a tulajdonságnak v_{i+1}-re is teljesülnie kell. ∎

3.4 lemma. *Legyen*

$$v_n(x) \overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(P)^k (1 - V(P))^{n-k} u(x + kP)\ .$$

Ekkor:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{v_n''(x)}{v_n'(x)}\right) < 0\ .$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználom, hogy ha u hasznosságfüggvényre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, akkor rögzített c konstans esetén a $v(x) = u(c + x)$ függvény is hasznosságfüggvény, és v hasznosságfüggvényre is a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. v_n olyan hasznosságfüggvények lineáris kombinációja, amelyekre a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző. A 3.3 lemma állítása alapján v_n hasznosságfüggvényre is a csökkenő kockázatelutasítás a jellemző, ami a bizonyítani kívánt állítás. ∎

Fontos hangsúlyozni, hogy a (4) rekurzív összefüggést v_n és v_n' függvényekre is felírhatjuk:

$$v_n(x) = V(P)v_{n-1}(x + P) + (1 - V(P))v_{n-1}u(x) \tag{16}$$

$$v_n'(x) = V(P)v_{n-1}'(x + P) + (1 - V(P))v_{n-1}'u(x) \tag{17}$$

3.5 lemma.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v_n'(x+P)}{v_n(x+P)-v_n(x)}\right) > 0\ .$$

Bizonyítás.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v_n'(x+P)}{v_n(x+P)-v_n(x)}\right) =$$

$$= \frac{v_n''(x+P)[v_n(x+P)-v_n(x,P)] - v_n'(x+P)[v_n'(x+P)-v_n'(x,P)]}{[v_n(x+P)-v_n(x,P)]^2} \tag{18}$$

A (18) összefüggésben szereplő tört nevezője mindig pozitív, így csak a számláló előjelét kell vizsgálni. A számláló pozitív, ha fennáll a

$$\frac{v_n''(x+P)}{v_n'(x+P)} > \frac{v_n'(x+P)-v_n'(x)}{v_n(x+P)-v_n(x)} \tag{19}$$

egyenlőtlenség. A (19) egyenlőtlenség pedig fennáll, mert a Cauchy középértéktétel miatt létezik $0 < \alpha < P$, hogy a (19) egyenlőtlenség jobb oldala megegyezik $\frac{v_n''(x+\alpha)}{v_n'(x+\alpha)}$ kifejezés értékével. Innen a 3.4 lemma állításából következik a (19) egyenlőtlenség. ∎

3.6 állítás. *Termékpiac esetén ($K = 0$), ha $U_2'(C, P^0, n) = 0$, akkor*

$$U_2'(C, P^0, n+1) > 0.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során legyen

$$v_n(x) \overset{\circ}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V(P^0)^k (1 - V(P^0))^{n-k} u(x + kP^0)$$

Ekkor:

$$
\begin{aligned}
U_2'(C,P^0,n) &= \left.\frac{\partial \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}u(C+kP)\right)}{\partial P}\right|_{P=P^0} = \\
&= V'(P^0)\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}kV(P^0)^{k-1}(1-V(P^0))^{n-k}u(C+kP^0)\right) + \\
&\quad - V'(P^0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k}V(P^0)^{k}(n-k)(1-V(P^0))^{n-k-1}u(C+kP^0)\right) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n-k}ku'(C+kP^0)\right) \\
&= nV'(P^0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n_0-1-k}u(C+P^0+kP^0)\right) + \\
&\quad - nV'(P^0)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n-1-k}u(C+kP^0)\right) + \\
&\quad + nV(P^0)\sum_{k=0}^{n_0-1}\left(\binom{n-1}{k}V(P^0)^{k}(1-V(P^0))^{n-k}u'(C+P^0+kP^0)\right) \\
&= nV'(P^0)(v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)) + nV(P^0)v_{n-1}'(C+P^0) = \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

amit jobban áttekinthető alakra hozhatunk:

$$
-\frac{V'(P^0)}{V(P^0)} = \frac{v_{n-1}'(C+P^0)}{v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)} \tag{20}
$$

Az előző levezetésből adódik az is, hogy

$$
\begin{aligned}
&U_2'(C,P^0,n+1) = \\
&\qquad = (n+1)V'(P^0)[v_n(C_0+P^0)-v_n(C)] + (n+1)V(P^0)v_n'(C+P^0)
\end{aligned} \tag{21}
$$

A (21) derivált előjelének meghatározásához elég a

$$
-\frac{V'(P^0)}{V(P^0)}
$$

és a

$$
\frac{v_n'(C+P^0)}{v_n(C+P^0)-v_n(C)} \tag{22}
$$

kifejezések közti reláció eldöntése. Felhasználjuk a (20) összefüggést, így tulajdonképpen a

$$
\frac{v_{n-1}'(C+P^0)}{v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)} \tag{23}
$$

és a (22) kifejezések közti reláció eldöntése a cél. Emlékezve a (16) és a (17) összefüggésekre a (22) tört értéke:

$$\frac{V(P^0)v'_{n-1}(C+2P^0)+(1-V(PP^0))v'_{n-1}(C+P^0)}{V(P^0)[v_{n-1}(C+2P^0)-v_{n-1}(C+P^0)]+(1-V(P^0))[v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)]} \tag{24}$$

A 3.5 lemma értelmében:

$$\frac{V(P^0)v'_{n-1}(C+2P^0)}{V(P^0)[v_{n-1}(C+2P^0)-v_{n-1}(C+P^0)]} > \frac{(1-V(P^0))v'_{n-1}(C+P^0)}{(1-V(P^0))[v_{n-1}(C+P^0)-v_{n-1}(C)]}$$

Innen a 3.2 lemma állítását felhasználva adódik, hogy a (22) tört értéke nagyobb, mint a (23) tört értéke, ami azt jelenti, hogy a derivált értéke pozitív. ■

3.7 következmény. *Termékpiac esetén, ha az $U(C,P,n)$ függvény P szerinti maximuma rögzített C mellett minden n esetén egyedi, akkor $P_n^{max} < P_{n+1}^{max}$, azaz az eladó $n+1$ szereplős piac esetén magasabb árat határoz meg, mint n szereplős piac esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 3.6 állításból következik. ■

4 Biztosítási piac

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy az előző fejezetben termékpiacra megmutatott állítások nem mindig igazak biztosítási piacra. Bizonyos körülmények között pont az ellentéte következik be annak, mint amit termékpiacra állítottam.

4.1 lemma. *Biztosítási piac esetén ($K>0$), ha a hasznosságfüggvény $u = -e^{-x}+x$, és a vásárlási valószínűség függvényre teljesül, hogy $V''(P)=0$, akkor az $f(P)=U(C,P,n)$ függvény rögzített C mellett, minden n esetén szigorúan konkáv.*

Bizonyítás. Az $U(C,P,n)$ függvényt fel tudjuk írni a következő alakban:

$$U(C,P,n) =$$
$$= -e^{-C}\left[V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right]^n + C + V(P)(nP-nqK)$$

Tudjuk, hogy $V''(P)=0$. Felhasználva ezt az összefüggést, írjuk fel az $f(P)=U(C,P,n)$ függvény P szerinti második deriváltját:

$$(f(P))'' =$$

$$\begin{aligned}
&-n(n-1)e^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-2}\times\\
&\qquad\times\left((V'(P)-V(P))\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)-V'(P)\right)^2+\\
&-ne^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)+1-V(P)\right)^{n-1}\times\\
&\qquad\times\left((-2V'(P)+V(P))\left(e^{-P}\left(qe^{K}+1-q\right)\right)\right)+\\
&+2nV'(P)
\end{aligned}$$

Az összeg minden tagja negatív.

■

4.2 állítás. *Biztosítási piac esetén ($K > 0$), ha a hasznosságfüggvény $u = -e^{-x} + x$, a vásárlási valószínűség $V(P) = 1 - \frac{P-qK}{K-qK}$, a kár bekövetkezésének valószínűsége $q = 0{,}005$ és a kár nagysága pedig $K = 10$, akkor $P_n^{max} > P_{n+1}^{max}$.*

Bizonyítás. $V''(P) = 0$, tehát a 4.1 lemma állítását felhasználva megállapítható, hogy $U(C, P, n)$ függvény rögzített C mellett bármely n esetén P-ben szigorúan konkáv. A hasznosságmaximumot biztosító ár egyedi.

Az $U(C, P, n)$ függvényt fel tudjuk írni a következő alakban:

$$U(C, P, n) =$$
$$= -e^{-C}\left(V(P)\left(e^{-P}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + 1 - V(P)\right)^n + C + V(P)(nP - nqK)$$

Megmutatom, hogy az $U_2'(C, P_n^{max}, n+1) < 0$:

$$\begin{aligned}
&U_2'(C, P_n^{max}, n) = \\
&\quad = -e^{-C} n \left(V(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + 1 - V(P_n^{max})\right)^{(n-1)} \times \\
&\qquad \times \Bigg[V'(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + \\
&\qquad\qquad -V(P_n^{max})e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right) - V'(P_n^{max})\Bigg] + \\
&\quad + V'(P_n^{max})(n\,P_n^{max} - nqK) + V(P_n^{max})n = \\
&\quad = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

A (25) egyenlőséget alakítsuk át jobban kezelhető formába:

$$\begin{aligned}
&e^{-C}\left(V(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + 1 - V(P_n^{max})\right)^{n-1} \times \\
&\qquad \times \Bigg[V'(P_n^{max})\left(e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) + \\
&\qquad\qquad -V(P_n^{max})e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right) - V'(P_n^{max})\Bigg] = \\
&\quad = V'(P_n^{max})(P_n^{max} - qK) + V(P_n^{max})
\end{aligned} \tag{26}$$

Felhasználva a (26) egyenletet, fel tudjuk írni a következő összefüggést:

$$U(C, P_n^{max}, n+1) =$$
$$= \left(V'(P_n^{max})(P_n^{max} - qK) + V(P_n^{max})\right)V(P_n^{max})\left(1 - e^{-P_n^{max}}\left(qe^K + 1 - q\right)\right) \tag{27}$$

Azt kell csak eldönteni, hogy a (27) derivált értéke pozitív vagy negatív. A kifejezés előjele a $V'(P)(P - qK) + V(P)$ és az $1 - e^{-P}(qe^K + 1 - q)$

kifejezés előjelétől függ. $V'(P)(P-qK)+V(P)=1-2\frac{P-qK}{K-qK}$. Ez a kifejezés P-nek monoton csökkenő függvénye, zérushelye a $P=\frac{K+qK}{2}$ pontban van. Az $1-e^{-P}(qe^K+1-q)$ kifejezés P-nek monoton növő függvénye, zérushelye a $P=\ln(qe^K+1-q)$ pontban van. Tegyük fel, hogy $P=\frac{K+qK}{2}=5{,}025$. Ebben a pontban az $1-e^{-P}(qe^K+1-q)$ kifejezés értéke pozitív ($\approx 0{,}27$). Az $U_2'(C,P,n)$ kifejezés értéke szintén pozitív: $V'(P)(P-qk)+V(P)$ kifejezés értéke 0, a szorzat előjele pedig az $e^{-P}(qe^K+1-q)(V'(P)-V(P))-V'(P)$ kifejezés előjelétől függ. Ennek kifejezésnek az értéke a vizsgált pontban negatív $\approx -0{,}338$, ami azt jelenti, hogy $U_2'(C,5{,}025,n)$ derivált értéke minden n-re pozitív; az optimális ár nagyobb, mint $\frac{K+qK}{2}$. Másrészről ha $P>\frac{K+qK}{2}$, akkor a (27) kifejezés értéke negatív. ■

4.3 következmény. *Biztosítási piac esetén elképzelhető, hogy a monopolhelyzetben lévő biztosító csökkenti terméke árát, ha többen érdeklődnek a terméke iránt.*

Bizonyítás. A 4.1 lemma állítása alapján tudjuk, hogy a 4.2 állításban feltételezett körülmények között bármilyen piaci létszám esetén a hasznosságmaximumot biztosító ár egyedi. Tehát a 4.2 állításban mutatott példa minden követelményt kielégít. A példa érdekessége, hogy az árcsökkenés az induló vagyon szintjétől függetlenül bekövetkezik. ■

A 4.2 állításban szereplő hasznosságfüggvényre teljesül a csökkenő mértékű kockázatelutasítás. A bizonyítás során ezt a tulajdonságot közvetlenül nem használtuk ki sehol. Fontos viszont megemlíteni, ha a termékpiacot és a biztosítási piacot hasonlítjuk össze. Tudjuk, hogy ha ugyanezzel a hasznosságfüggvénnyel jellemzett eladó termékpiacon tevékenykedik, akkor a piaci létszám növekedésével növelné a terméke árát.

Termékpiac esetén, ha az érdeklődők köre kicsi, akkor a monopolhelyzetben lévő eladó kisebb árat határoz meg, mint ha profitmaximalizáló (kockázatsemleges) lenne.[5] Minél kisebb a piac, annál nagyobb bizonytalansággal tudja csak meghatározni az eladó, hogy a szereplők mekkora része vásárolja meg a terméket. Az eladó alacsonyabb árat határoz meg, hogy egy kisebb nyereséget nagyobb valószínűséggel realizáljon. Ahogy növekszik a szereplők száma, a terméket megvásárlók aránya egyre kisebb mértékben szóródik a várható érték körül, az eladó a profitmaximalizáló árhoz egyre közelebbi árat határoz meg.

A monopolhelyzetben lévő biztosító esetében is szerepet játszik ez az előbb vázolt mechanizmus, de létezik egy másik mechanizmus, ami ezzel ellentétesen hat. Ha alacsonyabb árat határoz meg a biztosító, akkor várhatóan több szereplő veszi meg a biztosítást. Több független, azonos eloszlású valószínűségi változó átlaga jobban a várható érték körül tömörül, tehát a biztosító szemszögéből az átlagos kárkifizetés kevésbé szóródik, tehát kisebb kockázatot jelent a biztosító számára. Az, hogy a biztosító emeli vagy csökkenti a biztosítása árát, ezen két hatás eredőjén múlik.

[5]Ezt az állítást nem látom be formálisan ebben a cikkben, terjedelmi korlátok miatt.

Ismert tény, hogy ha a biztosítónak nagyobb az állománya, akkor olcsóbban tudja adni a biztosítást. A 4.2 állítás nem ezt a jól ismert törvényszerűséget mondja ki más formában. A 4.2 állításban monopolhelyzetben lévő biztosítót vizsgálunk, akit nem kényszerítenek árcsökkentésre a versenytársak. Az a meglepő, hogy a biztosító külső kényszer nélkül is csökkenti a biztosítás árát.

Másik oldalról vizsgálva azt is mondhatjuk, hogy a feltételek fennállása esetén a biztosító és a biztosítottak közös érdeke az állomány növekedése. Termékpiac esetében viszont pont ellentétes az eladó és vevők érdeke. Az eladó az érdeklődők számának emelkedésében érdekelt, a vevők pedig a csökkentésében.

5 Hasznosságfüggvények vizsgálata

Az előző fejezetekben kockázatkerülő eladó viselkedését vizsgáltam. A szakirodalomban több helyen is felmerül, hogy a biztos vagyon hasznosságát tükröző hasznosságfüggvény az értelmezési tartomány egy részén konvex, a döntéshozó bizonyos körülmények között kockázatkedvelő. Ebben a fejezetben azt vizsgálom, változnak-e az eddig tett megállapításaim, ha a hasznosságfüggvény valamely részén konvex.

Első lépésként a csökkenő mértékű kockázatelutasítást általánosítom.

5.1 definíció. *Egy $u(x)$ hasznosságfüggvényre, amelyre $u'(x) > 0$ a kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző, ha*

$$\left(-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)' < 0$$

Az 5.1 definíció abban tér el az eddigiektől, hogy a csökkenő mértékű kockázatelutasítást nem csak kockázatelutasító magatartás esetén értelmezzük, hanem kockázatkedvelő esetén is. Kockázatkedvelő magatartás esetén furcsa csökkenő mértékű kockázatelutasításról beszélni. Hasonló ez a helyzet ahhoz, mint amikor a nyereségmaximalizálás veszteség esetén a veszteség minimalizálását jelenti.

Ha a csökkenő mértékű kockázatelutasítást az 5.1 definíció szerint általánosítom, akkor a termékpiac esetén tett összes megállapítás érvényben marad. A bizonyítások nagy része változatlan formában fennáll, amin változtatni kell, az annyira minimális, hogy csak az érintett részekre utalok.

A 3.1 állítás változatlan formában érvényben marad, a bizonyításnál nem használtam fel u konkavitását. A 3.3 lemma is érvényben marad változtatás nélkül, csak néhány kiegészítést kell tenni a bizonyításhoz. A bizonyításban a (12) és a (13) egyenlőtlenségek akkor is teljesülnek, ha u_1'' vagy u_2'' negatív, hiszen ezen mennyiségek négyzete szerepel az egyenlőtlenségekben. Mivel mindkét egyenlet mindkét oldala nemnegatív, ezért a két egyenlőtlenség összeszorzását továbbra is el lehet végezni. A (14) egyenlőtlenség akkor is fennáll, ha bal oldal negatív, mert az egyenlőtlenség jobb oldala pozitív. A bizonyítás további részét nem befolyásolják a hasznosságfüggvények második deriváltjának előjelei. A további állítások során a hasznosságfüggvény konkavitása nem kerül elő, csak a 3.3 lemmára történik hivatkozás.

A csökkenő mértékű kockázatelutasítás esetét megvizsgáltuk. A növekvő mértékű kockázatelutasítás vizsgálatát egyszerűbben el tudjuk végezni: a hasznosságfüggvény növekvő mértékű kockázatelutasításának feltétele nem őrződik meg a nemnegatív lineáris transzformáció során, ami a gondolatsorban alapvető helyet foglal el.

Összességében elmondható, hogy ha a hasznosságfüggvény tartalmaz konkáv és konvex részeket is, de a hasznosságfüggvényre az (általánosított) kockázatelutasítás csökkenő mértéke a jellemző akkor a monopolhelyzetű eladó növeli terméke árát a piac méretének növekedésével.

Egy hasznosságfüggvény csak akkor tud eleget tenni az (általánosított) kockázatelutasítás csökkenő mértékének, ha vagy csak konkáv, vagy csak konvex részeket tartalmaz, vagy kis vagyon esetén konkáv, nagy vagyon esetén konvex.

Markowitc által javasolt hasznosságfüggvény (lásd pl. [11]) konkavitása többször is változik, így biztos, hogy nem tud eleget tenni az (általánosított) kockázatelutasítás csökkenő mértékének. Ezen hasznosságfüggvényre nem tudom meghatározni az eladó viselkedését.

Biztosítókról általában a kockázatsemlegességet, ritkábban a kockázatkerülést szokás feltenni. A szakirodalomra nem jellemző, hogy a biztosító kockázatkedvelő lenne. A kérdés vizsgálata mégis lényeges. Biztosítási piacok esetén —érvelésem szerint— az ár csökkenésének az az oka, hogy több biztosított esetén az átlagos kárkifizetés kevésbé szóródik a várható érték körül, ami kockázatkerülő biztosító számára kedvező. Ez a jelenség nem áll fenn kockázatkedvelő biztosító esetében.

Kutatásom során időm nagy részét a kockázatelutasító esetre fordítottam, a kockázatkedvelő biztosítót nem tudtam kellő alapossággal megvizsgálni, így az előbb felvetett kérdést sem tudom még megválaszolni, ez magam elé kitűzött feladat marad.

6 Kilátás elmélet

Kahneman és Tversky 1979-ben megfogalmazta kilátás elméletét (lásd [7]), amely szerint a döntéshozó nem a várható hasznosságát vizsgálja, hanem az úgynevezett szubjektív várható hasznosságát. A döntéshozó preferenciája a valószínűségnek nem lineáris függvénye. A döntéshozó érzékenyebb a valószínűségben bekövetkezett változásokra kis valószínűségek esetén, mint nagy valószínűségek esetén. A döntéshozó bizonytalan kimenetek esetén a

$$\sum_{i=i}^{\infty} \pi(p_i) v(x_i) \tag{28}$$

kifejezéseket hasonlítja össze, és azt a lehetőséget választja, amelyikre ez a legnagyobb. A (28) kifejezésben x_i az i-edik kimenet esetén a kifizetés, p_i az i-edik kimenet valószínűsége, $\pi(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$; kis p valószínűségek esetén $\pi(p) > p$, nagy p valószínűségek esetén pedig $\pi(p) < p$. A $v(\cdot)$ értékfüggvényről általában azt feltételezik, hogy veszteségek esetén konkáv (kockázatkerülő), nyereségek esetén pedig konvex (kockázatkedvelő). A vizsgált modellre alkalmazva: az eladó a

$$U(C,P,n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left(\pi\left[\binom{n}{k}V(P)^k(1-V(P))^{n-k}\binom{k}{j}q^j(1-q)^{k-j}\right]v(C+kP-jK)\right) \tag{29}$$

kifejezést vizsgálja

Látható, hogy ebben az esetben a (29) kifejezést nem tudjuk a (2) és a (4) rekurzív összefüggéseknek megfelelően szétbontani, ami bizonyításaimhoz nélkülözhetetlen. Az előző fejezetekben megállapított összefüggések igaz vagy hamis voltát a bemutatott keretben nem lehet megállapítani, ez is a magam számára kitűzött további feladat.

7 Továbblépési lehetőségek

A cikk befejezéseként összefoglalom azokat az irányokat, amelyek felé a kutatásokat tovább lehet vinni.

Jó lenne feltételt adni arra, hogy $U(C,P,n)$ függvény P szerinti maximuma mikor lesz egyedi.

Biztosítási piacok esetén meg lehetne próbálni bebizonyítani a megfogalmazott állítást arra az esetre is, ha a biztosító által fizetett összeg valószínűségi változóval adott.

Az általam vizsgált modell esetében a biztosító nem tudott változtatni a biztosítási szerződésen, csak az áron. Ez alatt azt értem, hogy kár esemény bekövetkeztekor K összeget fizet a biztosítottnak. Biztosítás esetén a biztosító és biztosított osztozkodik a kockázaton. Nagyon izgalmas kérdésnek tartom annak vizsgálatát, hogy változik-e az osztozkodás módja, és ha igen, hogyan, ha növekszik a szereplők száma.

A cikkben eltekintettem attól, hogy a biztosító csődbe juthat. Fontos megvizsgálni ezt az esetet is.

Vizsgálni lehet azt is, hogy változnak-e megállapításaink, ha a kárbekövetkezési valószínűség esetében is aszimmetrikus informáltságot teszünk fel. Ehhez kapcsolódóan az erkölcsi kockázat (moral hazard) kérdését is meg lehet vizsgálni.

Természetesen a legfontosabb kérdések egyike, hogy versenyhelyzetben hogyan módosulnak a megállapítások.

Irodalom

1. Arrow, Kenneth J.: Le Rôle Des Valeurs Boursieres pour la Répartition la Meilleure des Risques (The Role of Securities in the Optimal Allocation of

Risk Bearing) *International Colloquium on Econometrics*, 1952, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953.

2. Borch, Karl: Equilibrium in a Reinsurance Market, *Econometrica*, 1962.
3. Dionne, Georges (editor): *Handbook of Insurance*, Kluwer Academic Publisher, Boston, Dordrecht, London, 2000.
4. Dionne, Georges (editor) and Doherty, Neil: *Contribution to Insurance Economics*, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, London, 1992.
5. Ehrlich, Isaac and Becker, Garry: Market Insurance, Self-Insurance and Self-Protection, *Journal of Political Economy*, 1972.
6. Grossman, Sanford J. and Hart, Oliver D.: An Analysis of the Principal-Agent Problem, *Econometrica*, 1992.
7. Kahneman, Daniel and Tversky, Amos: Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk, *Econometrica*, 1979.
8. Kimball, Miles S.: Standard Risk Aversion, *Econometrica*, 1993.
9. Kliger, Doron and Levikson, Benny: Pricing insurance contracts - an economic viewpoint, *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998.
10. Luciano, Elisa: A note on loadings and deductibles: can a vicious circle arise? *Scandinavian Actuarial Journal*, 1999.
11. Machina, Mark J.: Expected Utility Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, 1982.
12. Mossin, Jan: Aspect of Rational Insurance Purchasing, *Journal of Political Economy*, 1968.
13. Pratt, John W: Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 1964.
14. Raviv, Arthur: The Design of an Optimal Insurance Policy, *American Economic Review*, 1979.
15. Rotchild, Micheal and Stiglitz, Joseph E.: Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics*, 1976.
16. Shavell, Steven: On Moral Hazard and Insurance, *Quarterly Journal of Economics*, 1979.
17. Sinn, Hans-Werner: *Economic Decisions Under Uncertainty*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1983.

INVESTIGATING HOW THE NUMBER OF POLICIES EFFECT THE OPTIMUM INSURANCE PREMIUM

An economic approach for modeling the insurance markets. The study focuses on the monopolistic market, where one insurance company sells a product with predetermined benefits for the customers. An outline of the company and the insureds' behavior with utility functions is given. The study investigates the problem of policy pricing in relation to the number of clients the company acquires. Analytic tools will be used to further clarify the points.