BEVEZETÉS A SZTOCHASZTIKUS ANALÍZISBE KÖZGAZDÁSZOKNAK[1]

MEDVEGYEV PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

A dolgozat célja, hogy rövid bevezetést adjon a folytonos idejű sztochasztikus analízisbe. A hazai pénzügyi oktatási gyakorlat nagyrészt a diszkrét idejű és gyakran diszkrét állapotterű modellekre épül.[2] Ennek oka a folytonos időparaméterű sztochasztikus folyamatok elméletétől való érthető idegenkedés. A folytonos időparaméterű sztochasztikus analízis a modern matematika egyik csúcsteljesítménye,[3] amely teljeskörű matematikai megértése egyrészt feltételezi, hogy az olvasó tisztában van a modern analízis szinte minden részletével; másrészt a matematikai részletek pontos megértése nem sok segítséget jelent a pénzügyi gondolatok elsajátításakor. Ugyanakkor minden technikai nehézség ellenére a sztochasztikus analízis néhány igen egyszerű ötletre épül.[4] A sztochasztikus analízis, más néven sztochasztikus kalkulus célja a klasszikus differenciálszámítás kiterjesztése sztochasztikus folyamatokra. A terület legfontosabb eredménye az Itô-formula. A formula pénzügyi

[1]Beérkezett: 2005. február 25. A dolgozat a Budapesti Corvinus Egyetemen befektetéselemző szakirányon tartott előadásaim alapján készült. Köszönettel tartozom Száz János professzornak, aki mindig bíztatott arra, hogy a sztochasztikus analízis tételeit próbáljam meg közgazdászok számára egyszerűen elmagyarázni. Ugyancsak köszönettel tartozom a Magyar Külkereskedelmi Banknak a vállalati professzori ösztöndíjért, amely nélkül az elmúlt években tudományos munkámat nem tudtam volna folytatni.

[2]V.ö: [10]

[3]V.ö: [6], [9].

[4]A figyelmes olvasó alább több helyen is joggal nehezményezheti a matematikai pontosság teljes hiányát. Integrálokat véges összegekkel helyettesítek, nem teszek különbséget a konvergenciafogalmak között, az integrálok mögé bederiválok, az integrálok sorrendjét minden megfontolás nélkül felcserélem, általában nem teszek különbséget lokális martingál és martingál között stb. Ezek súlyos matematikai hibák, és az alább bemutatott állítások jelentős része a megfogalmazás pontatlansága miatt matematikailag nem is igaz, de remélhetőleg a probléma ,,szabad szemmel azért nem látható". Azt gondolom, hogy egy bevezető pénzügyi matematikai kurzus során a precizitás magasabb foka inkább káros, mint hasznos lenne. A tételek pontos alakja, illetve a bizonyítások megtalálhatóak a Valószínűségszámítás [7] és a Sztochasztikus analízis [8] című könyveimben. Önkritikusan megjegyzem, hogy remélem a hozzáértő olvasó nem fogja a fejemre olvasni az alább leírtakat, és elfogadja azt a véleményemet, hogy egy átlagos matematikai felkészültséggel rendelkező közgazdász számára a sztochasztikus analízis tárgyalásakor a matematikailag közelítőleg is precíz stílus teljesen lehetetlen. Nem tartom kizártnak, hogy ez nem csak az átlagos közgazdász, hanem a nem specifikusan képzett matematikus számára is igen problémás. Ugyanakkor azt gondolom, hogy az itt leírtak megértése segítheti az érdeklődő olvasót a pontos matematikai elmélet megértésében és megemésztésében, ugyanis ha heurisztikusan is, de azért a helyes irányba orientálja. Másképpen fogalmazva, remélem, azért kárt nem teszek avval, hogy a matematika tényeit némiképpen lazán interpretálom és idézem. Önkritikusan azt is be kell vallanom, hogy a dolgozatot nagyrészt a sztochasztikus analízis könyvem ,propagálása" céljából írtam meg, így a dolgozatban mindig megadom a pontos hivatkozást, ahol az olvasó a tételek pontos alakját és a bizonyítást megtalálhatja.

könyvekben legtöbbször idézett alakjában meglepően bonyolult, számomra legalábbis nagyon nehezen megjegyezhető. Valójában azonban, a tárgyalás során szándékosan mellőzött nem csekély apró technikai problémától eltekintve, a formula igen egyszerűen igazolható, de ami jóval fontosabb a tartalma könnyen megérthető és megjegyezhető.

A formula megértésének kulcsa, mint általában a matematikában, a megfelelő nézőpont megválasztása. Ha hajlandók vagyunk az absztrakciós létrán egy kicsit feljebb mászni és hajlandók vagyunk a sztochasztikus analízis bizonyos általános kérdéseit megfontolni, akkor az egyébként homályos kép azonnal kitisztul. Az Itô-formula számos olvasattal rendelkezik: Az alábbiakban a Newton–Leibniz-szabály általánosításaként tárgyaljuk. Az általánosítás oka, hogy a tiszta véletlen hatására kialakuló folyamatok által befutott pályák matematikailag igen komplexek. A pénzügyi matematika kiindulópontja, hogy a kiélezett piaci verseny hatására a pénzügyi eszközök áralakulását leíró ábrák helyes matematikai absztrakcióját olyan folyamatok alkotják, amelyek a szokásos fizikai szemlélettel ellentétben nem rendelkeznek véges úthosszal, miközben a folyamat úgynevezett négyzetes megváltozása véges és pozitív.

A négyzetes megváltozás pozitivitása két következménnyel bír: egyrészt a Newton–Leibniz-formulában megjelenik az Itô-formulában szereplő nevezetes másodrendű korrekciós tag, másrészt a folyamatokban nincsen arbitrázs. Az arbitrázs hiánya, mint alapvető pénzügyi feltétel a piaci folyamatok hatékonyságát jellemző, közgazdasági, pénzügyi észrevétel. A piacon azért nincsen arbitrázs, mert a piac az információt azonnal és tökéletesen feldolgozza; ami a hatékony információfeldolgozás után megmarad az tökéletesen véletlen, amiből, a tökéletes véletlen definíciója miatt, nem lehet pénzt csinálni. Másképpen fogalmazva, ha a négyzetes megváltozás nulla, akkor van arbitrázs, és akkor befektetéselemzés mint önálló tevékenység szükségtelen és értelmetlen.

Bár alább közvetlenül nem jelenik meg, a háttérben egy nagyon jól megértett és tisztázott matematikai–pénzügyi állítás húzódik meg: az eszközárazás alaptétele. A tétel szerint valamely piacon pontosan akkor nincsen lehetőség arbitrázsra, ha egyrészt az alapul vett folyamat úgynevezett szemimartingál[5], másrészt alkalmas, az eredetivel ekvivalens valószínűség, az úgynevezett kockázatmentes valószínűség mellett, az alapfolyamat lokális martingál. Minden nem azonosan konstans lokális martingál négyzetes megváltozása pozitív. A négyzetes megváltozás nem függ az alapul vett valószínűségi mezőtől, csak a folyamat trajektóriáitól, vagyis a négyzetes megváltozás az eredeti, illetve a kockázatmentes valószínűség esetén megegyezik. Az Itô-formula talán

[5] A szemimartingál definíciójára később vissza fogunk térni. A szemimartingálnak nevezett folyamatosztály tagjai definíció szerint két folyamat összegére bonthatóak: az egyik folyamat teljes megváltozása véges, a másik lokális martingál. Sajnos a terminológia történelmileg alakult ki, így nem tökéletes. Jobb lenne, ha a teljes megváltozás helyett elsőrendű megváltozást írhatnánk, vagyis azt mondhatnánk, hogy minden szemimartingál két folyamat összegére bontható: az elsőnek az elsőrendű, a másodiknak a másodrendű megváltozása véges. Érdemes megjegyezni, hogy a szemimartingálok említett felbontása némiképpen eltakarja a szemimartingálok azon kiemelkedő tulajdonságát, hogy az Itô-integrál definiálásakor az integrátor csak szemimartingál lehet, ellenkező esetben a sztochasztikus integráltól elvárt alapvető folytonossági tulajdonságok nem fognak teljesülni. V.ö.: [8] 2.98. tétel, 198. oldal.

legjobb olvasata, hogy a szemimartingálok osztálya zárt a kétszer folytonosan deriválható függvényekkel való transzformációra nézve, és a formula azt adja meg, hogy miként módosul az eredeti szemimartingál említett két komponense a formulában szereplő függvénytranszformáció hatására.

1 Sztochasztikus folyamatok

Sztochasztikus folyamaton mindig kétváltozós függvényt értünk. Az egyik változó, amit általában t vagy s jelöl, az idő; a másik, amit általában ω jelöl, véletlen, ismeretlen paraméter, amely lehetséges értékeit egy $(\text{-}\,,\mathcal{A},\mathbf{P})$ valószínűségi mezőből veszi fel. Bizonyos szempontból nagyon zavaró, de ugyanakkor igen indokolt konvenció, hogy az ω argumentumot általában elhagyjuk. Ha a képletet a szövegkörnyezetből kiragadjuk, nem világos, hogy egyszerű skalárról, vagy valószínűségi változóról van-e szó. A folyamatot úgy célszerű elképzelni, hogy a $t = 0$ időpontban kiválasztásra kerül az ω véletlen kimenetel értéke, és ami megfigyelhető, az az ω rögzítése mellett keletkező $t \mapsto \xi(t,\omega)$ úgynevezett trajektória, vagyis a folyamat realizációja az ω kimenetel megvalósulása esetén. A sztochasztikus analízis nehézségei abból származnak, hogy az érdekes esetekben a $t \mapsto \xi(t,\omega)$ trajektóriák igen szélsőséges matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek.[6] Általában durván nem folytonosak, tele vannak szakadásokkal, kisebb nagyobb ugrásokkal. A sztochasztikus folyamatok általános elmélete igen nehéz, így az alábbiakban csak a folytonos sztochasztikus folyamatok elméletével foglalkozunk. Folytonosságon azt értjük, hogy feltételezzük, hogy a trajektóriák folytonos függvények. A folytonosság igen szigorú megkötés, a pénzügyi tapasztalat azt mutatja, hogy a legtöbb megfigyelt sztochasztikus folyamat nem folytonos, pontosabban a folytonos folyamatok számos a pénzügyi gyakorlatban megfigyelt jelenséget nem megfelelően modelleznek. Ennek ellenére a matematikai tárgyalás egyszerűsége céljából a folytonosság feltételét alább mindig meg fogjuk követelni.[7] A leghíresebb folytonos sztochasztikus folyamat a Wiener-folyamat:

1. Definíció. *A $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ sztochasztikus folyamat Wiener-folyamat, ha teljesíti az alábbi öt feltételt:*

1. $w(0) \equiv 0$,

2. *a w növekményei függetlenek,*[8]

[6] A továbbiakban csak a folytonos időparaméterű sztochasztikus folyamatok elméletét tárgyaljuk, vagyis feltételezzük, hogy az időparaméter a számegyenes valamilyen intervallumából veszi fel az értékét. Az alkalmazásokban gyakran fel szokás tenni, hogy az időparaméter diszkrét.

[7] Ettől azonban a matematikai tárgyalás nem lesz sokkal egyszerűbb, ugyanis a folytonos sztochasztikus folyamatok általában nem deriválhatóak, és alább némi túlzással nem deriválható függvényekre akarunk differenciálszámítást csinálni.

[8] Vagyis ha $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ tetszőleges időpont sorozat, akkor a $w(t_k) - w(t_{k-1})$ növekmények függetlenek.

3. *a w stacionárius növekményű, vagyis a $w(t+h) - w(t)$ növekmény eloszlása csak a h-tól függ és nem függ a t-től,*

4. *tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre*[9]

$$w(t) - w(s) =_d N\left(0, \sqrt{t-s}\right) \ ,$$

vagyis a $w(t) - w(s)$ növekmény eloszlása normális, nulla várható értékkel és $\sqrt{t-s}$ szórással,

5. *a w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $t \mapsto w(t,\omega)$ trajektória folytonos.*

Más szavakkal, a $[0, \infty)$ időintervallumon értelmezett w folytonos trajektóriájú, független és stacionárius növekményű folyamatot Wiener-folyamatnak mondjuk, ha minden t időpontban a $w(t)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t}\right)$. A normális eloszlás tulajdonságai miatt tetszőleges t-re a folyamat nagy valószínűséggel a $\pm 3\sqrt{t}$ parabola által leírt tartományban ingadozik. Ugyanakkor, ha a kimenetelek valamely A halmazán a w trajektóriái korlátosak lennének, akkor a $w(t)/\sqrt{t}$ változók eloszlása minden t-re $N(0,1)$ eloszlású lenne. Mivel az A halmazon a folyamat korlátos, ezért tetszőleges $t_n \nearrow \infty$ idősorozatra az A halmazon a $w(t_n)/\sqrt{t_n}$ nullához tartana, ami csak úgy lehetséges, ha az A halmaz valószínűsége nulla.[10] Másképpen fogalmazva a $w(t)$ trajektóriái a végtelenben lényegében $3\sqrt{t}$ sebességgel „szétspriccelnek". A pontos állítást az úgynevezett iterált logaritmusok tétele tartalmazza, amely szerint

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1\right) = \mathbf{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1\right) = 1 \ .$$

A tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a trajektóriák a végtelenben egy valószínűséggel a $-\sqrt{2t\ln\ln t} - \varepsilon$ és $\sqrt{2t\ln\ln t} + \varepsilon$ görbék által leírt tartományban tartózkodnak, amelynek a $\pm 3\sqrt{t}$ egy „durva", bár igen szemléletes és „praktikus" közelítése. Érdemes hangsúlyozni, hogy a Wiener-folyamatot definiáló feltételek szorosan összefüggnek, és nem azonos súlyúak. Például a negyedik feltétel szerint a növekmények eloszlása normális. Megmutatható, hogy ez következik a trajektóriák folytonosságából, illetve a növekmények függetlenségéből.[11] A szórásra tett feltétel, a normalizáló konstanstól eltekintve, a stacionaritás feltételével azonos. Ugyancsak hangsúlyozni kell, hogy a Wiener-folyamat elnevezés némiképpen pontatlan. Helyesebb lenne Wiener-típusú folyamatokról beszélni. Két folyamat akkor különböző, ha a

---

[9] A $=_d$ egyenlőségen azt értjük, hogy a két oldal eloszlása azonos. A $=_d$ jelölést akkor is használni fogjuk, ha az egyik oldalon álló valószínűségi változó eloszlása azonos a másik oldalon álló eloszlással .A továbbiakban $N(\mu,\sigma)$ a μ várható értékkel és σ szórással rendelkező normális eloszlást jelöli. A $\xi =_d N(\mu,\sigma)$ egyenlőség azt jelenti, hogy a ξ eloszlás normális μ, σ paraméterekkel.

[10] V.ö.: [8], A.8. állítás, 334. oldal.

[11] V.ö.: [7], 16.33. tétel, 780. oldal. Ez is mutatja, hogy a trajektóriák folytonosságára tett feltétel igen szigorú. A pénzügyi adatsorok esetén széles körben megfigyelt vastag farok jelenség nehezen illeszthető össze a folytonossági feltétellel.

folyamatot megadó kétváltozós függvények különbözőek. Az irodalomban általában csak Wiener-folyamatról szokás beszélni és a különböző Wiener-folyamatokat általában ugyanavval a w szimbolummal szokás jelölni. Ez nyilván nem okoz gondot, ha az olvasó számára teljességgel világos, hogy a Wiener-folyamat elnevezés nem egyetlen folyamatra, hanem, miként például a Markov-folyamat elnevezés, folyamatok osztályára utal. Természetesen két függvény már akkor különböző, ha az értelmezési tartományuk különböző. Számos olyan matematikai konstrukció létezik, amely segítségével Wiener-folyamat készíthető.[12] A különböző konstrukciókban a folyamatot hordozó (- , $\mathcal{A}, \mathbf{P}$) terek általában különbözőek, így természetszerűleg a folyamatok is különbözőek.[13]

2. Példa. *Ha w Wiener-folyamat, akkor az $u(t) \overset{\circ}{=} tw(1/t)$ folyamat is Wiener-folyamat.*

Ahhoz, hogy valami Wiener-folyamat legyen, a folyamatnak teljesíteni kell a Wiener-folyamatot mint folyamatosztályt definiáló feltételeket. A példában gondot jelent, hogy a $t = 0$ időpontban az u nincsen definiálva, így az u nem is lehet szigorú értelemben Wiener-folyamat. Ugyanakkor a példa értelemszerűen úgy értendő, hogy a $t = 0$ időpontra az u folyamatot a határértékével terjesztjük ki. Első lépésben tehát meg kell mutatni, hogy[14]

$$\lim_{t \to 0} tw\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

A határérték úgy értendő, hogy az - egy olyan részhalmazán, amely valószínűsége 1, a határérték létezik, és értéke éppen 0. Ennek oka a következő: Ha $t \overset{\circ}{=} 1/n$, akkor

$$u(t) = u\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\circ}{=} \frac{w(n)}{n}.$$

A $w(n)$ eloszlása $N(0, \sqrt{n})$, és a $w(n)$ tekinthető n darab független $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó összegének. Másképpen

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{n}\right) &\overset{\circ}{=} \frac{w(n)}{n} = \frac{w(n) - w(0)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(w(k) - w(k-1))}{n} \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} =_d \frac{\sum_{k=1}^{n} N(0,1)}{n}, \end{aligned}$$

ahol az összegben szereplő $\xi_k =_d N(0,1)$ tagok függetlenek. A nagy számok

---

[12] V.ö.: [7], 7.50. tétel, 246. oldal, [8], A.2 pont, 336. oldal.

[13] Hasonlóan problémás például a Poisson-folyamat elnevezés. Ugyanakkor mind a Markov-, mind a Poisson-folyamatok esetén az osztály tagjai nyilvánvaló módon, definíció szerint valamilyen paraméter, vagy paraméterek függvényei, így azonnal világos, hogy az adott elnevezés mögött nem egy folyamat, hanem folyamatok egy családja van. Tapasztalataim szerint a Wiener-folyamat esetén ”első ránézésre” még matematikailag jól képzett emberek számára sem azonnal világos a w szimbólum pontos tartalma, így azt gondolom, hogy szemben a két említett folyamatosztállyal, erre célszerű explicite utalni.

[14] V.ö.: [8], A.10. állítás, 335. oldal.

erős törvénye szerint[15] a kifejezés a közös $N(0,1)$ eloszlás várható értékéhez, vagyis nullához tart. Másképpen fogalmazva, ha $u(0) \overset{\circ}{=} 0$, akkor az u folyamat folytonos lesz, vagyis a $t=0$ időpontban megadott definíció miatt az u minden $t \geq 0$ időpontban automatikusan folytonos. Tetszőleges t-re az $u(t)$ eloszlása

$$u(t) =_d tN\left(0, \sqrt{\frac{1}{t}}\right) = N\left(0, \sqrt{t}\right) ,$$

és az egyes időszakokban a növekmények a w megfelelő tulajdonsága miatt nyilván függetlenek maradnak, így az u-ra a Wiener-folyamatot definiáló tulajdonságok teljesülnek, következésképpen az u Wiener-folyamat. ■

3. Állítás. *A Wiener-folyamatok trajektóriái nem deriválhatóak.*[16].

A Wiener-folyamatok matematikailag legizgalmasabb tulajdonsága, hogy a folyamat trajektóriái egyetlen időpontban sem deriválhatóak. Írjuk fel a differenciahányadost egy tetszőleges t_0 időpontban:

$$\frac{\Delta w}{\Delta t_0} \overset{\circ}{=} \frac{w(h+t_0) - w(t_0)}{h} .$$

A definíciók alapján evidens, hogy tetszőleges $t_0 \geq 0$ időpont esetén a $v(h) \overset{\circ}{=} w(h+t_0) - w(t_0)$ folyamat szintén Wiener-folyamat. Ezt úgy interpretálhatjuk, hogy a Wiener-folyamat tulajdonság független attól, hogy a folyamatot mikor kezdjük el megfigyelni. A különbségi hányados

$$\frac{\Delta w}{\Delta t_0} \overset{\circ}{=} \frac{v(h)}{h} \overset{\circ}{=} sv\left(\frac{1}{s}\right) \overset{\circ}{=} u(s)$$

módon írható, ahol értelemszerűen $s \overset{\circ}{=} 1/h$. Mivel a v Wiener-folyamat, ezért az $u(s)$ az előző példa szerint szintén Wiener-folyamat. Ha $h \to 0$, akkor $s \to \infty$, így a differenciahányados határértéke az egyes kimenetelekre Wiener-folyamatként „szétspriccel”, vagyis a korábban említett módon a végtelenben egyre jobban ingadozik, így a határérték nem létezik. ■

4. Példa. *A tökéletes véletlen: martingálok.*

Heurisztikusan a martingálokat a fair szerencsejátékokkal szokás azonosítani, de a két fogalom azonosítása csak azért nem megfelelő, mert nem tudjuk, hogy mit jelent a „fair szerencsejáték” kifejezés. Egy szerencsejáték pontosan akkor fair, ha a játék kumulált nyereménye martingált alkot! Egy másik definíció, hogy egy játék fair, ha a játékban való részvételért nem jár kompenzáció. De mi a kompenzáció definíciója, milyen folyamatokat tekinthetünk kompenzációnak? Egy további definíció szerint egy játék fair,

[15] A nagy számok erős törvénye szerint független, azonos eloszlással rendelkező változók számtani átlaga egy nulla valószínűségű eseménytől eltekintve a közös eloszlás várható értékéhez tart. A véges határértékhez való konvergencia szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a közös eloszlásnak legyen várható értéke.

[16] V.ö.: [8] A.7. tétel, 332. oldal.

ha az eredménye tökéletesen véletlen. De mikor lesz egy sorozat eredménye teljesen, vagy tökéletesen véletlen? Mikor tekintsünk egy $(\xi_k)_k$ sorozatot teljesen véletlennek? Egyrészről nyilván olyan definíciót akarunk, amely közel áll a fogalom köznapi értelmezéséhez, másrészt olyan fogalmat szeretnénk, amellyel azért „könnyű számolni". Ha a $(\xi_k)_k$ sorozat tagjai csak korrelálatlanok, akkor a matematikai tapasztalat azt mutatja, hogy a $(\xi_k)_k$ sorozat matematikailag túl általános. A korrelálatlanság túl enyhe megkötés. A korrelálatlan sorozatokkal nehéz dolgozni, így a korrelálatlan sorozatok praktikus okokból nem tekinthetőek a véletlen sorozat megfelelő modelljének.

Kolmogorov egyik alapvető hozzájárulása a valószínűségszámításhoz az volt, hogy megmutatta, hogy ha a $(\xi_k)_k$ sorozat tagjai függetlenek, akkor a $(\xi_k)_k$ sorozattal „könnyű" dolgozni, vagyis elegáns módon beláthatóak olyan tételek, amelyeket a „tökéletesen véletlen" sorozatoktól heurisztikusan elvárunk. A függetlenség fogalmát a bevezető valószínűségszámítási kurzusokon természeti törvényként, a priori kategóriaként szokás bevezetni. Úgy szokás tenni, mintha a függetlenség a tér és idő kategóriájával azonos szinten levő alapkategóriája lenne a szemléletünknek. A sztochasztikus folyamatok elméletét megalapító Doob érdeme, hogy a független, nulla várható értékű sorozat fogalmát felcserélte a martingál fogalmával.

A martingál definíciója a következő: Legyen adva egy $(-\ , \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. Legyen $\mathbb{T}$ a lehetséges időpontok halmaza. Az $\mathcal{A}$ halmazcsalád az összes lehetséges események halmaza. Az $\mathcal{A}$ mellett minden t-re legyenek adva az $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$ eseménycsaládok, amelyek a t időpontig bekövetkezett eseményeket tartalmazzák. Az $\mathcal{F}_t$ interpretációja miatt, ha $s < t$ a $\mathbb{T}$ két lehetséges időpontja, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, vagyis ha $s < t$, akkor minden az s időpontig megfigyelhető esemény megfigyelhető a t időpontig is. Az $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ matematikai struktúrát filtrációnak mondjuk. Az $(-\ , \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mező mellett az $(\mathcal{F}_t)_t$ filtrációt is a modell alapadatának tekintjük és a tárgyalás elején rögzítjük. A $\mathbb{T}$ időhalmazon értelmezett $\xi(t)$ folyamatot az $(-\ , \mathcal{A}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$ alapadatok mellett martingálnak mondjuk, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. A $\xi(t)$ trajektóriái jobbról folytonosak és rendelkeznek bal oldali határértékkel.
2. Minden $t \in \mathbb{T}$ esetén létezik az $\mathbf{M}(\xi(t))$ várható érték és ha $s < t$, akkor $\mathbf{M}(\xi(t) \mid \mathcal{F}_s) = \xi(s)$.

Az első tulajdonság diszkrét időpontokból álló $\mathbb{T}$ esetén természetesen semmitmondó,[17] folytonos időhorizont esetén a martingálok rendelkezhetnek ugrásokkal,[18] de az ugrásokat még infinitezimálisan sem lehet előrelátni, ugyanakkor a folyamatnak az ugrásokon kívül más típusú szakadásai nem

[17] Illetve értelmetlen. Ugyanakkor minden diszkrét idejű sztochasztikus folyamat tekinthető olyan folytonos idejű folyamatnak, ahol a folyamat csak a megadott egész értékű időpontokban ugorhat.

[18] Definíció szerint az ugrások olyan szakadások, ahol a jobb és a bal oldali határérték létezik.

lehetnek. A második tulajdonság szerint a folyamat statisztikailag előrejelezhetetlen, vagyis a $\xi(t)$ érték becslését[19] az $\mathcal{F}_s$ alapján a $\xi(s)$ adja. A folyamat martingál, ha a múltja alapján a jövőjét nem lehet előrejelezni.

Egy folyamat tökéletesen véletlen, ha a múltja nem szolgáltat információt a jövőjére nézve. A legtöbb, amit a múltból a jövőre nézve kiolvashatunk, az a jelen állapot.

Ezen a ponton érdemes egy további filozófiai megjegyzést tenni. A Kolmogorov-féle valószínűségszámítási modellnek van egy alapvető hibája. Mikor is tekintünk egy sorozatot véletlennek? Ha adott valószínűségi változók egy meghatározott tulajdonságokkal rendelkező diszkrét vagy folytonos idejű folyamata. Diszkrét időábrázolás esetén ez azt jelenti, hogy minden ω esetén adott egy $(\xi_k(\omega))_k$ számsorozat. Valójában azonban ilyen nincsen. Egy részvény árának alakulása csak egyszer figyelhető meg. Az általunk vizsgált egy darab részvény, egyetlen realizációja mikor tekinthető véletlen sorozatnak? A kérdés többek között Kolmogorovot is izgatta. Az általa és számos más matematikus[20] által talált válasz a következő: Tegyük fel, hogy adott $(a_n)_n$ számok egy sorozata. Ha a sorozat nem véletlen, akkor van benne valami szabályszerűség. Akkor mondjuk, hogy egy sorozatban van szabály, ha megadható egy olyan eljárás, amely rövidebb, egyszerűbb, mint az eredeti és amelyet alkalmazva reprodukálni tudjuk a sorozatot. Némiképpen pontosabban fogalmazva, ha egy sorozatban van szabály, akkor írható egy olyan számítógépes[21] program, amely előrejelzi a sorozat tagjait.[22]. A program hossza tekinthető a sorozatban szereplő komplexitás mértékének. Ha a lehetséges legrövidebb program n sorból áll, akkor a sorozat komplexitása n. Ha a legrövidebb program hossza, amely a sorozat első n tagjából előrejelzi a sorozat $(n+1)$-edik tagját az n növekedésével arányosan nő, akkor a sorozat véletlen. Vegyük észre, hogy éppen erről van szó a részvények áralakulásának előrejelzése esetén is. Nincs olyan fix hosszú, előre rögzített számítógépes

[19]Természetesen még most is körbeforog a definíció, ugyanis a becslés szót a feltételes várható értékkel definiáljuk. Nem túl jelentős megjegyzés, de talán nem érdektelen hangsúlyozni, hogy ha becslésen nem csak a legkisebb négyzetek módszerét értjük, akkor a terminológia félrevezető, ugyanis léteznek olyan statisztikai becslési eljárások, amelyek nem azonosak a feltételes várható értékkel. A feltételes várható érték pontos matematikai definíciójának megértése komoly matematikai előképzettséget kíván, így a feltételes várható értéket az egyszerűség kedvéért mind általános "becslési eljárást" definiáljuk, vagy inkább interpretáljuk. A feltételes várható érték legegyszerűbb tulajdonságai emlékeztetnek a várható érték megfelelő tulajdonságaira. Vegyük észre, hogy a várható érték, az átlag is egyfajta becslés, ha semmi további információnk nincs, a jövő ,,kézenfekvő" becslése a múlt átlaga. V.ö.: [7] 9.fejezet.

[20]A kérdés nyilván visszamegy a tudományos gondolkodás kezdetéig. A komplexitás fogalmát Kolmogorovtól függetlenül definiáló Chaintin szerint a kérdéssel már Leibniz is foglalkozott. A Leibniz által adott válasz éppen a Kolmogorov–Chaitin-féle komplexitás definíciója: akkor mondjuk, hogy rendelkezésünkre áll egy természeti törvény, ha van olyan szabálygyűjteményünk, amellyel le tudunk írni egy adott jelenséget és a szabálygyűjtemény egyszerűbb, mint a leírandó jelenség.

[21]A számítógépet rögzítjük. Mondjuk az a számítógép, amin a szöveget most írom.

[22]n elemből álló sorozat esetén mindig létezik n sorból álló program, amely a sorozatot visszaadja: `print` a_1, `print` a_2, ... , `print` a_n A kérdés csak az, hogy létezik-e olyan program, amely ennél jóval rövidebb.

program, amely a már ismert adatokból az adatsor következő tagját megadja. A martingál definíciója a véletlen sorozatok éppen ezen tulajdonságát ragadja meg. Nincs olyan statisztikai módszer, amely alapján a múltból a jövő előrejelezhető lenne. Másképpen fogalmazva a sorozat komplexitása a sorozatban levő információ nagyságának mértéke, bármit is jelentsen az információ szó. Ha a sorozat véletlen, akkor a sorozat minden tagja meglepetés, vagyis a sorozat információtartalma nem tömöríthető. A martingál olyan sztochasztikus folyamat, amely megfigyeléséből származó információtartalom nem tömöríthető. ■

2 Itô-féle sztochasztikus integrál

A sztochasztikus analízis legfontosabb fogalma a sztochasztikus integrál. A sztochasztikus integrál, mint minden integrál közelítő összegek határértéke. A közelítő összegek súlyozott összegek, vagyis az integrál mindig súlyozott összegek határértéke. Ennek megfelelően minden integrál esetén meg kell különböztetni a súlyt, amit integrátornak szokás nevezni, illetve az összegzendő értékeket, amit integrandusnak szokás mondani. A különböző integrálfogalmak lényegében csak abban térnek el, hogy miként képezzük az integrál értékét közelítő összegeket, illetve hogyan képezzük a határértékeket. Az integrál heurisztikus tartalma mindig a közelítő összegekből olvasandó le. Az integrál definíció szerint a közelítő összegek által hordozott intuitív fogalmat terjeszti ki a határértékre. A sztochasztikus integrál képzésekor a súlyt valamilyen véletlen, kockázatos folyamat időben való értéknövekedése adja. A pénzügyi matematikában a súly, vagyis az integrátor növekménye valamilyen pénzügyi termék adott időszakban való ármegváltozása, az integrandus pedig a kockázatos termékből az integrálási időperiódus alatt tartott portfólió nagysága. Ennek megfelelően a pénzügyi matematikában a sztochasztikus integrálok a kockázatos termékekből álló portfóliók értékének alakulását megadó sztochasztikus folyamatként interpretálhatóak.

2.1 Négyzetes megváltozás

A sztochasztikus analízis legfontosabb észrevétele, hogy nem minden sztochasztikus folyamat trajektóriái korlátos változásúak,[23] sőt az érdekes folyamatok, mint például a Wiener-folyamat, illetve általában a folytonos martingálok trajektóriái nem korlátos változásúak.[24] Emlékeztetünk, hogy egy f függvényt egy $[a,b]$ szakaszon korlátos változásúnak mondunk, ha létezik egy $K<\infty$ korlát, hogy az $[a,b]$ tetszőleges $(t_k)_k$ felosztása esetén

$$\sum_k \|f(t_k)-f(t_{k-1})\| \leq K .$$

[23] V.ö.: [7], 2.126. definíció, 95. oldal.
[24] V.ö.: [8] 1.118. tétel, 79. oldal.

Ha az f képe egy görbe, akkor az $\|f(t_k)-f(t_{k-1})\|$ a görbe két pontjának távolsága, és a fenti összeg tekinthető valamely, az f által leírt görbét közelítő törtvonal hosszának. A

$$V_{a,b}(f) \overset{\circ}{=} \sup_{(t_k)} \sum_k \|f(t_k)-f(t_{k-1})\|$$

kifejezés, ahol a szuprémumot az összes felosztáson vesszük, tekinthető az f által leírt görbe hosszának. Ennek megfelelően egy függvényt akkor tekinthetünk korlátos változásúnak, ha az általa leírt görbe hossza véges. Miként közismert, a klasszikus analízisben bevezetett Stieltjes-integrál csak korlátos változású integrátorok esetén értelmezett,[25] így a folytonos martingálok szerinti integrálok az analízisben megszokott módon nem értelmezhetőek. Hangsúlyozni kell, hogy az integrál nem értelmezhetősége nem azt jelenti, hogy az integrálás eredménye értelmetlen, rossz vagy a szemléletnek ellentmondó érték. Ez azt jelenti, hogy a megadott definíció nem ad választ, sem jót, sem rosszat, sem értelmeset, sem értelmetlent. Másik definíciót kell keresni, lehetőleg olyat, amelyet a korábbi, jól bevált esetben alkalmazva a korábbi definíciót kapjuk vissza.

Az egész sztochasztikus analízis kulcsa a négyzetes megváltozás! Az alapgondolat a következő:

Ha az η integrátor $V_{a,b}(\eta)$ teljes megváltozása végtelen, akkor a $\Delta\eta(t_k) \overset{\circ}{=} \eta(t_k)-\eta(t_{k-1})$ növekmények „túl nagyok". Ha az η trajektóriái folytonosak, akkor a $\Delta\eta(t_k)$ jellemzően egynél kisebb, így a $(\Delta\eta(t_k))^2$ kisebb, mint a $|\Delta\eta(t_k)|$, így várhatóan, illetve remélhetőleg az[26]

$$\langle\eta\rangle \overset{\circ}{=} \lim_{\delta\searrow 0} \sum_k [\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]^2$$

kifejezés véges lesz. Például, ha η Wiener-folyamat, $[a,b]=[0,1]$, és $(t_k)_k$ a $[0,1]$ n egyenlő részre való felbontása, akkor

$$\eta(t_k)-\eta(t_{k-1}) =_d N\left(0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

tehát

$$\begin{aligned}\sum_k [\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]^2 &\overset{\circ}{=} \sum_k \xi_k^2 =_d \sum_k N\left(0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \\ &= \frac{\sum_k N(0,1)^2}{n}.\end{aligned}$$

A nagy számok törvénye alapján a határérték egy valószínűséggel létezik, és az értéke $\mathbf{M}\left(N(0,1)^2\right)=1$. Triviálisan látható, hogy ha a $[0,1]$ helyett a $[0,T]$ szakaszt írtuk volna, akkor a határérték T lenne. Ennek megfelelően a

[25] V.ö.: [7] 1.17. következmény, 16. oldal, 17.25. példa, 825. oldal.

[26] δ jelöli a $(t_k)_k$ felosztás finomságát, vagyis $\delta \overset{\circ}{=} \max_k(t_k-t_{k-1})$

Wiener-folyamat négyzetes megváltozása[27] a $[0,T]$ szakaszon T. Ugyanakkor nem csak Wiener-folyamat, hanem tetszőleges martingál esetén létezik véges négyzetes megváltozás,[28] amely a triviális konstans esettől eltekintve mindig pozitív.[29] Hangsúlyozni kell, hogy általában egy martingálra a négyzetes megváltozás függ az időtől és az ω kimeneteltől. A Wiener-folyamat azért a legegyszerűbb nem triviális folytonos sztochasztikus folyamat, mert a négyzetes megváltozása a lehető legegyszerűbb. Vizsgáljuk meg az η Wiener-folyamat teljes megváltozását!

$$\sum_k \left|\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})\right| = \sum_k |\xi_k| =_d \frac{\sum_k |N(0,1)|}{\sqrt{n}} .$$

Ha $\infty > M > 0$ jelöli az $|N(0,1)|$ eloszlás várható értékét, akkor a centrális határeloszlás-tétel miatt minden elegendően finom felosztás esetén, vagyis ha $n \to \infty$

$$\frac{\sum_k |\xi_k| - nM}{\sqrt{n}} =_d \frac{\sum_k |N(0,1)| - nM}{\sqrt{n}} \approx N(0,1) ,$$

amiből

$$\sum_k \left|\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})\right| \approx N(0,1) + \frac{nM}{\sqrt{n}} \to \infty .$$

Más oldalról ugyanez. A négyzetes megváltozásra

$$\sum_k \left[\Delta\eta(t_k)\right]^2 \le \max_k |\Delta\eta(t_k)| \sum_k |\Delta\eta(t_k)| .$$

Mivel a bal oldal egy pozitív konstanshoz konvergál, a jobb oldalon az első tényező a folyamat folytonossága miatt nullához tart, a másik tényezőnek végtelenbe kell tartani, ugyanis ellenkező esetben

$$0 < \langle\eta\rangle \approx \sum_k \left[\Delta\eta(t_k)\right]^2 = 0$$

lenne. Egy folytonos folyamatra, ha a teljes megváltozás véges, akkor a négyzetes megváltozás nulla, ha viszont a négyzetes megváltozás pozitív, akkor a teljes megváltozás végtelen.

2.2 Martingálok négyzetes megváltozása, kompenzátorok

A négyzetes megváltozással kapcsolatos első kézenfekvő kérdés, hogy miként interpretálható. A négyzetes megváltozás eredendően a véletlen ingadozásokat tartalmazó folyamatokhoz rendelt fogalom, így az interpretációja is a véletlen folyamatokkal kapcsolatban fellépő problémákhoz kötődik. Legyen az η folyamat martingál. Az η a martingáltulajdonság miatt definíció szerint

[27] V.ö.: [8] A.5. pont, 346. oldal.
[28] V.ö.: [8] 3.24. állítás 234. oldal.
[29] Amikor a martingál konstans trajektóriákkal rendelkezik. V.ö.: [8] 2.41. állítás, 157. oldal.

tökéletes véletlennek tekinthető. Ez azt jelenti, hogy az η által leírt játék „nyereményfolyamatáért” nem jár kompenzáció, nulla a költsége annak, hogy megszerezzük az η által reprezentált játék kifizetésfolyamatát.

Ugyanakkor az η^2 folyamat esetén a helyzet teljesen más. Az η^2 folyamat értéke minden időpontban nem negatív, sőt általában pozitív, így az η^2 véletlen kifizetés birtoklásáért fizetni kell. Mi az η^2 folyamat fair ára? Természetesen az η^2 fair ára az a folyamat, amelyet az η^2-ből levonva tökéletesen véletlen folyamatot kapunk, vagyis az η^2 ára az a π folyamat, amelyre az $\eta^2 - \pi$ martingál. Az η^2 birtoklásáról bármikor lemondhatunk, a játékból bármikor kiléphetünk, így a π kompenzátor folyamatról kézenfekvő feltenni, hogy monoton nő.[30] Megmutatjuk, hogy az η^2 kompenzátora éppen az $\langle\eta\rangle$, vagyis az $\eta^2 - \langle\eta\rangle$ folyamat martingál.[31] Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $\eta(0) = 0$, ugyanis ellenkező esetben a gondolatmenetet az $\eta(t) - \eta(0)$ martingálra alkalmaznánk.

$$\eta^2(t) - \langle\eta\rangle(t) \approx \eta^2(t) - \sum_k (\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))^2 \ .$$

A négyzetes megváltozásban szereplő zárójelet felbontva

$$\begin{aligned}(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1}))^2 &= \eta^2(t_k) + \eta(t_{k-1})^2 - 2\eta(t_k)\eta(t_{k-1}) = \\ &= \eta^2(t_k) - \eta(t_{k-1})^2 - 2\eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})).\end{aligned}$$

Ebből következően, ha $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ a $[0,t]$ időszakasz elegendően finom felbontása, akkor

$$\begin{aligned}\eta^2(t) - \langle\eta\rangle(t) &\approx \eta^2(t_n) - \sum_{k=1}^{n} \left(\eta^2(t_k) - \eta^2(t_{k-1})\right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} 2\eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) \ .\end{aligned}$$

A teleszkopikus összeget kibontva, és felhasználva, hogy a feltétel szerint $\eta(t_0) = \eta(0) = 0$,

$$\eta^2(t) - \langle\eta\rangle(t) = \sum_{k=1}^{n} 2\eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) \ .$$

Megmutatjuk, hogy a

$$\xi(s) \overset{\circ}{=} \sum_{t_k \le s} \eta(t_{k-1})(\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})) \overset{\circ}{=} \sum_k d_k$$

[30] Nem folytonos folyamatok esetén célszerű megkövetelni, hogy a π „előrejelezhető” legyen, vagyis a π kompenzátor értékét az ugrás „előtt” ki kell fizetni, vagyis a várható ugrásért a kompenzációt az ugrást megelőzően előre rögzíteni kell, ugyanis az ugrás után már könnyű okosnak lenni. A folytonos folyamatok egyik előnyös tulajdonsága, hogy a négyzetes megváltozás és az úgynevezett előrejelezhető négyzetes megváltozás megegyezik.

[31] V.ö.: [8] 2.32. állítás, 152. oldal.

összegekből álló folyamat martingál. Az $\eta(t_{k-1})$ értéke a t_{k-1} időpontban ismert, így a t_{k-1} időpontban végrehajtott $\mathbf{M}\left(\cdot \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)$ becslések esetén konstansként viselkedik, így ezekből a becslésekből kiemelhető. Felhasználva, hogy az η martingál

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\left(d_k \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) &\overset{\circ}{=} \mathbf{M}\left(\eta(t_{k-1})(\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = \\
&= \eta(t_{k-1})\,\mathbf{M}\left((\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = \\
&= \eta(t_{k-1})\cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

így $\mathbf{M}\left(\eta^2(t) - \langle\eta\rangle(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \eta^2(s) - \langle\eta\rangle(s)$, tehát az $\eta^2 - \langle\eta\rangle$ folyamat valóban martingál.

2.3 Martingálok szerinti Itô-integrálás

Tegyük fel, hogy az η martingál és próbáljuk meg értelmezni a

$$\int_a^b \theta(t)\, d\eta(t)$$

integrált.[32] A sztochasztikus integrált egy η folyamat elleni „játék" eredményeként kivánjuk interpretálni. Az interpretáció szerint egy adott t időpontban $\theta(t)$ összeget tartunk az η által reprezentált kockázatos termékből. Nyilvánvaló módon a $\theta(t)$ meghatározásakor csak azokra az információkra támaszkodhatunk, amelyekkel a t időpont bekövetkezésekor már rendelkeztünk. Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a $\theta(t)$ a t időpontban az $(- ,\mathcal{F}_t,\mathbf{P})$ valószínűségi mező felett valószínűségi változó. Ennek legfontosabb következménye, hogy a $\theta(t)$ értéke az $\mathbf{M}(\cdot \mid \mathcal{F}_t)$ feltételes várható értékből kiemelhető, vagyis a t időpontban végrehajtott becslések során a $\theta(t)$ konstansként viselkedik. Másképpen fogalmazva, ha $\Delta\eta$ jelöli az η folyamat értékének megváltozását a t időpontot követő rövid időszakban, akkor $\theta(t)\Delta\eta$ jelöli a $\theta(t)$ egyedből álló portfólió értékmegváltozását a t időpontot követő időszakban. Mivel a $\theta(t)$ a t időpontban ismert, ezért a $\theta(t)\Delta\eta$ értékváltozás becslése szempontjából a $\theta(t)$ „érdektelen", elegendő csak a $\Delta\eta$ megváltozást becsülni, így teljesül a következő kiemelési szabály:

$$\mathbf{M}(\theta(t)\Delta\eta \mid \mathcal{F}_t) = \theta(t)\,\mathbf{M}(\Delta\eta \mid \mathcal{F}_t) \ .$$

A továbbiakban ezt gyakran fel fogjuk használni.

5. Definíció. *Tegyük fel, hogy az $I_n \overset{\circ}{=} \sum_k \theta(\tau_k)\,\Delta\eta(t_k)$ közelítő összegekben τ_k közelítő pontnak a $[t_{k-1}, t_k]$ intervallum $\tau_k = t_{k-1}$ kezdőpontját vesszük. Ilyenkor Itô-féle közelítő összegekről beszélünk.*

A hagyományos integrálelmélet tárgyalásakor hangsúlyozni szokás, hogy a közelítő összegek képzésekor a τ_k közbülső pont tetszőlegesen választható, az integrál értéke független attól, hogy melyik τ_k időpontban számoltuk ki az

[32] Az egyszerűség kedvéért a θ és az η folytonosak.

integrandus közelítő értékét. Az Itô-féle sztochasztikus integrálok esetében ez nincsen így. A közelítő összeget mindig az intervallum kezdőpontjában kell képezni. Matematikai szempontból az Itô-integrál legfontosabb sajátja éppen ez. A közelítő összeg ezen képzési szabálya azonban igen szemléletes, és tulajdonképpen nagyon természetes. Ha az η integrátorfolyamatot kumulált nyereségként értelmezzük, akkor a $\Delta\eta(t_k) \overset{\circ}{=} [\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})]$ növekmény a $[t_{k-1}, t_k]$ időszak alatt elért egységnyi befektetésre jutó nyeremény, következésképpen az időszak alatt elért teljes nyeremény arányos az időszak során megtett $\theta(\tau_k)$ téttel. Ugyanakkor egy fogadásban a tétet mindig a fogadás tárgyát képező véletlen esemény előtt kell megtenni, vagyis a $[t_{k-1}, t_k]$ időszakra eső fogadás nagyságát a t_{k-1} időpontban kell megadni.

6. Példa. *A sztochasztikus integrál értéke függhet a közelítő pont megválasztásának módjától.*

Legyen w Wiener-folyamat és próbáljuk meg definiálni az $\int_a^b w\,dw$ integrált. A közelítő összegekre áttérve

$$
\begin{aligned}
I_n^{(1)} &\overset{\circ}{=} \sum_k w(t_{k-1})\left(w(t_k) - w(t_{k-1})\right) ,\\
I_n^{(2)} &\overset{\circ}{=} \sum_k w(t_k)\left(w(t_k) - w(t_{k-1})\right) .
\end{aligned}
$$

A két összeg közötti egyetlen eltérés, hogy a τ_k közelítő pont az első esetben a részintervallum eleje, a második esetben a vége. Ugyanakkor

$$
\begin{aligned}
I_n^{(2)} - I_n^{(1)} &\overset{\circ}{=} \sum_k w(t_k)\,\Delta w(t_k) - \sum_k w(t_{k-1})\,\Delta w(t_k) = \\
&= \sum_k \left(w(t_k) - w(t_{k-1})\right)\Delta w(t_k) = \\
&= \sum_k \left(w(t_{k-1}) - w(t_k)\right)^2 ,
\end{aligned}
$$

vagyis a két közelítő összeg különbsége éppen a Wiener-folyamat négyzetes megváltozásának közelítő értéke. Ebből következően, ha a két közelítő összegnek van határértéke, akkor a két határérték nem lehet azonos, vagyis az integrál értéke függ a közelítő pont megválasztási módjától. Ez másképpen úgy is fogalmazható, hogy tetszőleges köztes pont megengedése esetén az integrálközelítő összegek sorozata semmilyen konvergenciafogalom esetén sem lehet konvergens. ■

A négyzetes megváltozás pozitivitása erősen felforgatja az integrálelméletet. Tulajdonképpen igen meglepő, hogy ebből a „gyászos” helyzetből mégis van elegáns kiút. Számoljuk ki az

$$
I_n \overset{\circ}{=} \sum_k \theta(t_{k-1})\left[\eta(t_k) - \eta(t_{k-1})\right] \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \theta(t_{k-1})\,\Delta\eta(t_k)
$$

Itô-féle közelítő összeg várható értékét és szórását. A feltételes várható értékre vonatkozó toronyszabály felhasználásával

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(I_n) &= \mathbf{M}\left(\sum_k \theta(t_{k-1})\,\Delta\eta(t_k)\right) = \sum_k \mathbf{M}(\theta(t_{k-1})\,\Delta\eta(t_k)) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\mathbf{M}\left(\theta(t_{k-1})\,\Delta\eta(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left(\theta(t_{k-1})\,\mathbf{M}\left(\Delta\eta(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}(\theta(t_{k-1})\cdot 0) = 0,
\end{aligned}$$

ahol természetesen kihasználtuk, hogy az η martingál, vagyis

$$\mathbf{M}\left(\Delta\eta(t_k) \mid \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right) = 0\ ,$$

és hogy a $\theta(t_{k-1})$ kiemelhető az $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ szerinti feltételes várható értékből. A szórás kiszámolására rátérve, ha $t > s$, akkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}(\theta(t)[\eta(t+h)-\eta(t)]\,\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]) = \\
&\quad = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\theta(t)[\eta(t+h)-\eta(t)]\,\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)] \mid \mathcal{F}_t)) = \\
&\quad = \mathbf{M}(\theta(t)\,\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]\,\mathbf{M}([\eta(t+h)-\eta(t)] \mid \mathcal{F}_t)) = \\
&\quad = \mathbf{M}(\theta(t)\,\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]\cdot 0) = 0\ ,
\end{aligned}$$

ugyanis a $\theta(t)\,\theta(s)[\eta(s+h)-\eta(s)]$ változó értéke a t időpontban már ismert, ezért kiemelhető a t időponthoz tartozó feltételes várható értékből. Ebből következően az alábbi számolás során a vegyesszorzatok várható értéke nulla:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2(I_n) &= \mathbf{M}\left(\left(\sum_k \theta(t_{k-1})[\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]\right)^2\right) = \\
&= \mathbf{M}\left(\sum_k\sum_j \theta(t_{k-1})\,\theta(t_{j-1})\,\Delta\eta(t_k)\,\Delta\eta(t_j)\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{M}\left((\theta(t_{k-1}))^2[\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})]^2\right) \approx \\
&\approx \mathbf{M}\left(\sum_k \theta^2(t_{k-1})[Q_2(t_k)-Q_2(t_{k-1})]\right)\ .
\end{aligned}$$

ahol $Q_2 \overset{\circ}{=} \langle\eta\rangle$ az η négyzetes megváltozása. Az $\langle\eta\rangle$ nagysága a hozzá tartozó intervallum hosszának növelésével monoton nő, tehát az utolsó várható értéken belüli $\sum_k \theta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)$ közelítő összeg a klasszikus módon értelmezhető $\int_a^b \theta^2\,d\langle\eta\rangle$ Stieltjes-integrál egy közelítő összege. Összefoglalva:

Ha az integrálközelítő összegeket az Itô-féle szabály szerint a

$$\sum_k \theta(t_{k-1})\left[\eta(t_k)-\eta(t_{k-1})\right]$$

módon választjuk, és az η integrátorfolyamat martingál, akkor a közelítő összeg várható értéke nulla, varianciája pedig az $\mathbf{M}\left(\int_a^b \theta^2\, d\langle\eta\rangle\right)$ közelítő összege lesz.

Ha a θ folyamat folytonos, és a felosztás finomságát minden határon túl növeljük, akkor a különböző felosztásokhoz tartozó közelítő összegek sztochasztikusan közel kerülnek egymáshoz, vagyis ha az időintervallum felosztását minden határon túl növeljük, akkor az Itô-féle közelítő összegek sorozata a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat lesz. Némiképpen heurisztikusan okoskodva: ha a $(t_k)_k$ felbontás már elég finom, akkor az újabb osztópontok hozzávételével a $\sum_k \theta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)$ már alig változik, ugyanis az $\langle\eta\rangle$ súlyfüggvény szerint vett $\int_a^b \theta^2\, d\langle\eta\rangle$ Stieltjes-féle trajektóriánkénti integrálok léteznek, így a felbontás további finomítása már nem változtat az $\mathbf{M}\left(\sum_k \theta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)\right)$ szórásnégyzeten. Némiképpen pontosabban, ha I_n és I_m két olyan közelítő összeg, ahol az osztópontok távolsága már kisebb mint $\delta/2$, akkor az I_n-I_m várható értéke nulla, szórása pedig felülről becsülhető az

$$\mathbf{M}\left(\sum_k \varepsilon_\delta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k)\right)$$

kifejezéssel, ahol $\varepsilon_\delta(t)$ a δ nagysághoz tartozó folytonossági modulus, vagyis

$$\varepsilon_\delta(t)\overset{\circ}{=}\sup\left\{|\theta(u)-\theta(v)| : u,v\le t, |u-v|\le\delta\right\}\ .$$

A $\theta(\omega,t)$ trajektóriák folytonossága miatt minden t-re és ω-ra $\varepsilon_\delta(t,\omega)\to 0$, így a Csebisev-egyenlőtlenség miatt elég finom felosztásra tetszőleges rögzített $\kappa>0$ szám esetén, ha $\delta\searrow 0$, akkor

$$\mathbf{P}(|I_n-I_m|\ge\kappa)\le\frac{\mathbf{D}^2(I_n-I_m)}{\kappa^2}\le\frac{\mathbf{M}\left(\int_a^b \varepsilon_\delta^2\, d\langle\eta\rangle\right)}{\kappa^2}\to 0\ ,$$

ugyanis

$$\lim_{\delta\searrow 0}\mathbf{M}\left(\int_a^b \varepsilon_\delta^2\, d\langle\eta\rangle\right)=\mathbf{M}\left(\int_a^b \lim_{\delta\searrow 0}\varepsilon_\delta^2\, d\langle\eta\rangle\right)=\mathbf{M}\left(\int_a^b 0\, d\langle\eta\rangle\right)=0\ ,$$

vagyis ha $\delta\searrow 0$, akkor az $(I_n)_n$ sorozat a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat.

TELJESSÉGI TÉTEL: *A valószínűségi változók halmaza a sztochasztikus konvergenciában teljes, vagyis minden a sztochasztikus konvergenciában Cauchy-sorozat sztochasztikusan konvergens.*[33]

[33] V.ö.: [7] 3.12. állítás, 116. oldal.

Összefoglalva az elmondottakat:

7. Állítás. *Folytonos integrandus és martingál integrátor esetén az $[a,b]$ szakaszon képzett Itô-féle közelítő összegek sorozatának a sztochasztikus konvergenciában létezik határértéke, amelyet $\int_a^b \theta\, d\eta$ módon fogunk jelölni és a θ η szerinti Itô-integráljának fogunk mondani.*[34]

A korlátos változású súlyfolyamatok szerinti Stieltjes-féle sztochasztikus integrálok esetén a közelítő összegek sorozata a köztes pont megválasztási módjától függetlenül egy valószínűséggel az integrálhoz tart, a martingálok szerint vett Itô-integrálok esetén az integrálközelítő összegek nem 1 valószínűséggel, hanem csak sztochasztikusan közelítik az integrál értékét. Az Itô-féle konstrukció lényege, hogy egyrészt a közelítő összegeket speciálisan választjuk, másrészt a trajektóriánkénti konvergenciát a közelítő összegek sztochasztikus konvergenciájára cseréljük. Mivel a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért ha egy sztochasztikus integrál Stieltjes-értelemben létezik, akkor az integrál Itô-értelemben is létezik, vagyis az Itô-féle sztochasztikus integrál a Stieltjes-féle sztochasztikus integrál általánosítása.

2.4 Sztochasztikus integrálok négyzetes megváltozása

Miként láttuk, a sztochasztikus analízis kulcsa a négyzetes megváltozás. Legyen

$$M(t) \overset{\circ}{=} \int_0^t \theta(u)\, d\eta(u)\ ,$$

ahol feltettük, hogy az integrál értelmes. Számoljuk ki a $t \mapsto M(t)$ integrálfolyamathoz tartozó $t \mapsto \langle M\rangle(t)$ négyzetes megváltozás folyamatot. Definíció szerint

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle(t) &\approx \sum_{t_k\le t} (\Delta M(t_k))^2 = \sum_{t_k\le t}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta(u)\, d\eta(u)\right)^2 \approx \\
&\approx \sum_{t_k\le t} \theta^2(t_{k-1})(\Delta\eta(t_k))^2 \approx \\
&\approx \sum_{t_k\le t} \theta^2(t_{k-1})\,\Delta\langle\eta\rangle(t_k) \approx \int_0^t \theta^2 d\langle\eta\rangle,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a

$$\begin{aligned}
(\Delta\eta(t_k))^2 &\overset{\circ}{=} (\eta(t_k)-\eta(t_{k-1}))^2 \approx \Delta\langle\eta\rangle(t_k) = \\
&= \langle\eta(t_k)\rangle - \langle\eta(t_{k-1})\rangle
\end{aligned}$$

közelítő formulát, illetve, hogy elég finom felbontás esetén az $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta d\eta$ integrál közelíthető a közelítő téglalap $\theta(t_{k-1})\,\Delta\eta(t_k)$ területével.[35]

---

[34] V.ö.: [8] 2.12. állítás, 135. oldal.
[35] V.ö.: [8] 3.46. tétel, 249. oldal, 422. oldal.

2.5 Asszociativitási szabály

Tegyük fel, hogy $\eta(u) \overset{\circ}{=} \int_0^u \zeta(s)\, d\rho(s)$, és tekintsük az $\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u)$ integrált. Mivel az integrál a közelítő összegek határértéke, ezért

$$\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u) \approx \sum_{u_k \leq t} \theta(u_{k-1})\, \Delta\eta(u_k) \; .$$

Az előző alpontban látott gondolatmenettel egyező módon az $\eta(u)$ integrál függvény $\Delta\eta(u_k)$ növekményei az η alakja miatt közelíthetőek a közelítő téglalapok

$$\zeta(u_{k-1})\, \Delta\rho(u_k)$$

területeivel, így

$$\int_0^t \theta(u)\; d\eta(u) \approx \sum_{u_k \leq t} \theta(u_{k-1})\, \zeta(u_{k-1})\, \Delta\rho(u_k) \approx \int_0^t \theta(u)\, \zeta(u)\; d\rho(u) \; .$$

Másképpen fogalmazva, integrálfüggvény szerinti integrálás esetén a két integrál elvégzésének sorrendje „csoportosítható”. A szabályt szokás asszociativitási szabálynak is mondani. Az elnevezés indoka a következő: Ha az integrálokat differenciális formában írjuk fel, akkor $d\eta = \zeta d\rho$, a $\int_0^t \theta(u)\, d\eta(u)$ integrál pedig a

$$\theta d\eta = \theta(\zeta d\rho) = (\theta\zeta)\, d\rho$$

formális szabály szerint alakítható, vagyis az

$$\int_0^t \theta(u)\; d\eta(u) = \int_0^t \theta(u)\, \zeta(u)\; d\rho(u)$$

átalakítás formálisan a differenciális alakban felírt kifejezés átzárójelezése. Vegyük észre, hogy az indoklás érvényes mindenfajta integrálra, így a Stieltjes- és az Itô-féle integrálokra egyaránt használható.[36]

2.6 Lokális martingálok

Az Itô-integrál definíciója alapján a sztochasztikus integrál egy folytonos fogadási folyamat nettó, kumulált eredménye. Az Itô-integrálban szereplő integrátor martingál. A martingálok szokásos interpretációja, hogy fair játékok. Felvethető a kérdés, hogy az η fair játékkal szemben játszott θ stratégiai nettó, kumulált eredménye fair játék-e, vagyis a θ megjátszásának lehetősége az érdekelt feleknek, legalábbis átlagban egyenlő esélyt biztosít vagy sem. Másképpen fogalmazva, milyen feltételek mellett lesz a $t \mapsto \int_0^t \theta\, d\eta$ integrálfolyamat martingál? Tekintsük a folyamat $M(t) \overset{\circ}{=} \sum_{s_k \leq t} \theta(s_{k-1})\, \Delta\eta(s_k)$

[36] V.ö.: [8] 2.63. állítás, 170. oldal, D.16. tétel, 428. oldal.

közelítő összegét. A kiemelési szabály szerint a már többször látott módon okoskodva

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\left(M\left(t_{k+1}\right) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) &= \sum_{s_i \leq t_{k+1}} \mathbf{M}\left(\theta\left(s_{i-1}\right) \Delta\eta\left(s_i\right) \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) = \\ &= M\left(t_k\right) + \theta\left(t_k\right) \mathbf{M}\left(\left[\eta\left(t_{k+1}\right) - \eta\left(t_k\right)\right] \mid \mathcal{F}_{t_k}\right) = \\ &= M\left(t_k\right),\end{aligned}$$

vagyis a diszkrét közelítő összegekből álló sorozat martingál. Fontos hangsúlyozni, hogy a sztochasztikus integrálással kapott $t \mapsto \int_0^t \theta\, d\eta$ integrálfolyamat azonban nem lesz martingál.[37] Ebből a szempontból a diszkrét, illetve a folytonos időábrázoláshoz tartozó modellek lényegesen eltérnek. A tárgyalás során a diszkrét összegek és a folytonos összegek, vagyis az integrálok között nem teszünk különbséget. Ez természetesen súlyos matematikai hiba. Általában a sztochasztikus integrálként csak úgynevezett lokális martingált[38] kapunk, és külön figyelmet kell fordítani arra, hogy mikor kapunk integrálként martingált. A lényegi problémát az jelenti, hogy míg a közelítő összegek várható értéke az η martingáltulajdonsága miatt nulla, a felosztás finomítása során kapott sorozat határértékének várható értéke már nem lesz nulla; általában ugyanis semmi sem biztosítja a határérték és a várható érték felcserélhetőségét.

A lokális martingálok és a martingálok közötti különbségre intuitíve jól rá lehet érezni: a probléma az integrandusok nagyságrendjéből ered. A martingálok ellen játszott valamely szerencsejáték annyiban fair, hogy a stratégia megválasztásakor az egyes lépések során a jövőt nem lehet előrelátni, ezért a téteket mindig a fogadás tárgyát képező esemény előtt kell megtenni. Ebből következően az egyes lépésekben a játék ténylegesen fair. A játék azonban annyiban nem fair, hogy a játszás jogát és a tétek nagyságát nem korlátozzuk. A fogadó fél addig és akkora tétekben fogad amíg akar, illetve amekkorákban akar. A θ folyamatra egyedül azt tettük fel, hogy az értéke csak a múlttól függ, de a nagyságát nem korlátoztuk. Elképzelhető, hogy bizonyos ω kimenetelek esetén a $t \mapsto \theta(t, \omega)$ trajektória nem korlátos módon nő. Ha így áll a helyzet, akkor nagy kockázatot vállalva és korlátlan ideig játszva általában lehet nyerő stratégiát találni. A Wiener-folyamat diszkrét verziójában, a fej vagy irás játékban, a közismert nyerő stratégia a duplázó stratégia, amikor vesztés esetén a nyereményt megduplázzuk. Mivel bármeddig, bármekkora tétben jogunk van fogadni, és bármikor ki lehet szállni, nem túl meglepő módon a fogadó fél mind nyer, sőt elvileg végtelen sokat nyerhet. Másképpen fogalmazva, egy martingál szerinti sztochasztikus integrál azért nem lesz martingál, mert az integrandus kockázata korlátlanul nőhet. Ezért nem lesz a sztochasztikus integrál martingál, csak lokális martingál. A hazárdjátékos célja, hogy a martingálként viselkedő véletlennel szembeni játékban kihasználja, hogy a kumulált folyamat csak lokális martingál és nem martingál. Ha természetesen a játszható θ stratégiákat korlátozzuk, nem engedünk meg

[37] V.ö.: [8] 1.84. példa, 59. oldal.
[38] V.ö.: [8] 1.77. definíció, 56. oldal.

csak „ésszerű" kockázatot tartalmazó stratégiákat, akkor a játék nyereménye martingál marad, vagyis a játék fair marad.[39]

Megmutatható, hogy a sztochasztikus integrál konstrukciója átvihető martingálokról lokális martingálokra is, de evvel nem foglalkozunk.

2.7 Szemimartingálok

Ha egy sztochasztikus folyamat egy korlátos változású folyamat és egy lokális martingál összege, akkor azt mondjuk, hogy a folyamat szemimartingál. Ha a ξ folyamat folytonos

$$X(t,\omega) = V(t,\omega) + L(t,\omega)$$

szemimartingál, akkor értelmezhető az

$$\int_a^b \xi\, dX \overset{\circ}{=} \int_a^b \xi\, dV + \int_a^b \xi\, dL$$

sztochasztikus integrál. Világos, hogy a jobb oldali összeg mind a két tagja értelmes. Az első trajektóriánként vett közönséges Stieltjes-intergál, a másik egy sztochasztikus konvergenciában vett Itô-integrál. Mivel a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, az $\int_a^b \xi dX$ tekinthető a Itô-féle közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértékének. Ha X_1 és X_2 két szemimartingál, akkor definiálható a

$$\lim_{\delta\searrow 0} \sum_k \Delta X_1(t_k)\, \Delta X_2(t_k) \overset{\circ}{=} \langle X_1, X_2\rangle$$

négyzetes keresztmegváltozás.[40] Ha az X_1 korlátos változású, és az X_2 folytonos, akkor ismételten

$$\left|\sum_k \Delta X_1(t_k)\, \Delta X_2(t_k)\right| \leq \max_k |\Delta X_2(t_k)| \sum_k |\Delta X_1(t_k)| \to 0\ .$$

Ebből következően, ha $X_k(t,\omega) = V_k(t,\omega) + L_k(t,\omega)$, ahol a V_k korlátos változású, akkor a szokásos folytonossági feltételek teljesülése esetén

$$\langle X_1, X_2\rangle = \langle L_1, L_2\rangle\ . \tag{1}$$

8. Példa. *Számoljuk ki a*

$$\xi(t) = \int_0^t \eta_1(t)\, d\zeta_1 + \int_0^t \eta_2(t)\, d\zeta_2$$

összeg négyzetes megváltozását.

[39] V.ö.: [8] 2.57. állítás, 165. oldal.

[40] Természetesen a filtrációt előre rögzítettük, így a két folyamat ugyanarra a filtrációra nézve szemimartingál.

Az $\int_0^t \eta_i d\zeta_i \approx \sum_{t_k \leq t} \eta_i(t_{k-1})(\zeta_i(t_k) - \zeta_i(t_{k-1}))$ növekményei közelítőleg

$$\eta_i(t_{k-1})(\zeta_i(t_k) - \zeta_i(t_{k-1})) \ ,$$

így a korábban elmondottakkal analóg módon

$$\begin{aligned}
\langle \xi \rangle &\approx \sum_k (\Delta\xi(t_k))^2 \approx \sum_k (\eta_1(t_{k-1})\Delta\zeta_1(t_k) + \eta_2(t_{k-1})\Delta\zeta_2(t_k))^2 = \\
&= \sum_k \left[\eta_1^2(\Delta\zeta_1)^2 + \eta_2^2(\Delta\zeta_2)^2 + 2\eta_1\eta_2\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2\right] \approx \\
&\approx \int_0^t \eta_1^2 \, d\langle\zeta_1\rangle + \int_0^t \eta_2^2 \, d\langle\zeta_2\rangle + 2\sum_k \eta_1\eta_2\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2 \approx \\
&\approx \int_0^t \eta_1^2 \, d\langle\zeta_1\rangle + \int_0^t \eta_2^2 \, d\langle\zeta_2\rangle + 2\int_0^t \eta_1\eta_2 \, d\langle\zeta_1, \zeta_2\rangle ,
\end{aligned}$$

ahol többször kihasználtuk a négyzetes megváltozás növekményére vonatkozó $(\Delta\zeta)^2 \approx \Delta\langle\zeta\rangle$ formulát, illetve az analóg módon érvényes

$$\Delta\zeta_1\Delta\zeta_2 \approx \Delta\langle\zeta_1, \zeta_2\rangle$$

közelítő képletet. Ha a ζ_1 folyamat folytonos és korlátos változású, és a ζ_2 folytonos, akkor $\langle\xi\rangle(t) = \int_0^t \eta_2^2 \, d\langle\zeta_2\rangle$, ugyanis az összeg többi tagjában az integrátor értéke nulla. ■

2.8 Négyzetes megváltozás és arbitrázs

Miként a bevezetőben jeleztük, a pénzügyi matematika közgazdaságilag a tökéletes piaci verseny hipotézisére épül. Az elmélet kiindulópontja, hogy a verseny tökéletessége miatt a piacon nincsen lehetőség arbitrázsra ugyanis az árak változását nem lehet a múlt alapján előrejelezni. Más oldalról a „tökéletesen véletlen” folyamatok által indukált mozgások trajektóriái matematikailag igen sajátos tulajdonsággal rendelkeznek: a tökéletesen véletlen folyamat négyzetes megváltozása pozitív.

Tekintsünk egy n darab kockázatos eszközből álló pénzügyi rendszert. Az egyes eszközök árát a t időpontban jelölje

$$(S_1(t), S_2(t), \ldots, S_n(t)) \ .$$

Tegyük fel, hogy az n darab eszközökből álló portfólióban a t időpontban

$$(\theta_1(t), \theta_2(t), \ldots, \theta_n(t))$$

darab eszköz van. A portfólió értéke a t időpontban

$$V(t) \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^n \theta_k(t) S_k(t) \ .$$

A portfólió értékének megváltozása teleszkópikus összegként számolható: ha $(t_l)_l$ a $[t,T]$ időtartam tetszőleges felbontása, akkor

$$\begin{aligned} V(T)-V(t) &= \sum_l \left(V(t_l)-V(t_{l-1})\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_l \left(\theta_k(t_l)S_k(t_l)-\theta_k(t_{l-1})S_k(t_{l-1})\right) . \end{aligned}$$

Az elemi számolással ellenőrizhető

$$a_2b_2-a_1b_1 = a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)+(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

képlet miatt a $\sum_l \left(\theta_k(t_l)S_k(t_l)-\theta_k(t_{l-1})S_k(t_{l-1})\right)$ összeg éppen az

$$\int_t^T \theta dS+\int_t^T S d\theta+\langle\theta,S\rangle_t^T$$

közelítő összege. Általában, ha ξ és η két sztochasztikus folyamat, akkor

$$\xi(b)\eta(b)-\xi(a)\eta(a)=\int_a^b \xi d\eta+\int_a^b \eta d\xi+\langle\xi,\eta\rangle_a^b ,$$

feltéve, hogy az integrálok, illetve a négyzetes keresztmegváltozás létezik.[41] Ezt a formulát szokás parciális integrálás formulájának is mondani. Ezt felhasználva a portfólió értékváltozása

$$V(T)-V(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_t^T \theta_k dS_k+\sum_{k=1}^{n}\int_t^T S_k d\theta_k+\sum_{k=1}^{n}\langle\theta_k,S_k\rangle_t^T .$$

9. Definíció. *A $(\theta_k)_{k=1}^n$ portfóliósúlyokat az $(S_k)_{k=1}^n$ árak mellett önfinanszírozónak mondjuk, ha*

$$dV=\sum_{k=1}^{n}\theta_k dS_k ,$$

vagyis önfinanszírozó portfólió esetén a V értékfolyamat megváltozása csak az árak dS_k megváltozásából származik. A sztochasztikus differenciálokat integrálalakban kiírva az önfinanszírozás feltétele azt jelenti, hogy tetszőleges $t<T$ időpontok esetén

$$V(T)-V(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_t^T \theta_k dS_k .$$

10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $(\theta_k)_{k=1}^n$ önfinanszírozó portfóliósúlyok arbitrázst alkotnak, ha $(\theta_k)_{k=1}^n$ súlyokkal képzett V értékfolyamatra $V(0)=0$,*

[41] A $\langle\xi,\eta\rangle_a^b$ jelölésen értelemszerűen a ξ és az η $[a,b]$ szakaszon vett keresztvariációját értjük. V.ö.: [8] 2.17. állítás, 138. oldal, 3.1. állítás, 211. oldal.

és van olyan T, hogy minden kimenetelre $V(T) \geq 0$ és egy pozitív valószínűséggel rendelkező halmazon a $V(T)$ pozitív.[42]

Tegyük fel, hogy a parciális integrálás formulájában a ξ és az η folyamatok „nem elég véletlenek". Ezen most azt a matematikai tulajdonságot értjük, hogy a két folyamat trajektóriái elég regulárisak ahhoz, hogy a $\langle \xi, \eta \rangle$ négyzetes keresztmegváltozás nulla legyen. Ilyenkor a parciális integrálás formulája a jóval egyszerűbb

$$\xi(b)\eta(b) - \xi(a)\eta(a) = \int_a^b \xi d\eta + \int_a^b \eta d\xi$$

alakot ölti. Speciálisan ha $\xi = \eta$, akkor

$$\xi^2(b) - \xi^2(a) = 2\int_a^b \xi d\xi\ .$$

Másképpen fogalmazva, ha a ξ „nem elég véletlen", akkor érvényes a

$$d\xi^2 = 2\xi d\xi$$

deriválási szabály. Tegyük fel, hogy $\langle \xi \rangle = 0$ és tekintsük a ξ segítségével megfogalmazható legegyszerűbb (B, S) kötvény-részvény modellt: $B(t) \overset{\circ}{=} 1$ és $S(t) \overset{\circ}{=} 1 + \xi(t)$. A B folyamat alatt természetesen a kötvényt, az S alatt pedig a részvényt értjük. Legyen

$$\theta_B(t) \overset{\circ}{=} -(\xi(t))^2 - 2\xi(t), \quad \theta_S(t) \overset{\circ}{=} 2\xi(t)\ .$$

a beruházási stratégia. A megfelelő értékfüggvény

$$\begin{aligned} V(t) &= \theta_B(t) \cdot B(t) + \theta_S(t) \cdot S(t) = \\ &= -(\xi(t))^2 - 2\xi(t) + 2\xi(t)(1 + \xi(t)) = (\xi(t))^2\ . \end{aligned}$$

Ha a $\xi(t)$ nem azonosan nulla, akkor a (θ_B, θ_S) pár a (B, S) modellben arbitrázs, ugyanis

$$\begin{aligned} dV &= d(\xi)^2 = 2\xi d\xi = \theta_B \cdot 0 + \theta_S d\xi = \\ &= \theta_B dB + \theta_S dS, \end{aligned}$$

egyenlőség miatt a portfólió önfinanszírozó. Másképpen fogalmazva, egy piacon akkor van lehetőség arbitrázsra, ha a piacon a pénzügyi folyamatok „nem elég véletlenek".

[42] A definíció nem tökéletes, ugyanis nem zárja ki a duplázó stratégiát, amely a végtelen sok lehetséges t időpont miatt előfordulhat. Éppen ezért folytonos időhorizont esetén az arbitrázs definíciójában fel szokás tenni, hogy az értékfolyamat alulról korlátos, ahol az alsó korlát közgazdaságilag a kereskedést megvalósító személy vagyona, illetve teljes hitelkerete.

3 Itô-formula mint a Newton–Leibniz-szabály általánosítása

A szemimartingálok osztálya meglepően stabil abban az értelemben, hogy egy sor műveletet végrehajtva szemimartingálból szemimartingált kapunk. A szemimartingálok legfontosabb tulajdonságát az Itô-formula tartalmazza.[43]

11. Állítás. *Ha F kétszer folytonosan deriválható n-változós függvény, és $(\xi_k)_{k=1}^n$ folytonos szemimartingálok, akkor*

$$\begin{aligned} F(\xi(t)) - F(\xi(0)) &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(\xi(s))\, d\xi_k(s) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\xi(s))\, d\langle \xi_i, \xi_j\rangle(s) \ . \end{aligned}$$

A bizonyítás nagyon messze vezetne, de azért némi indoklást célszerű adni. Világos, hogy egyfajta Newton–Leibniz-szabályról van szó. Próbáljuk meg így igazolni. Vegyük a

$$F(\xi(t)) - F(\xi(0)) = \sum_{k=1}^{N} \left[F(\xi(t_k)) - F(\xi(t_{k-1}))\right]$$

teleszkópikus felbontást. A közönséges Newton–Leibniz-szabály bizonyítása esetén az

$$\begin{aligned} \left[F(\xi(t_k)) - F(\xi(t_{k-1}))\right] &\approx F'(\xi(\tau_k))\left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(\tau_k))\left[\xi_i(t_k) - \xi_i(t_{k-1})\right] \end{aligned}$$

közelítéssel szokás élni. Vegyük észre, hogy az így kapott

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(\tau_k))\left[\xi_i(t_k) - \xi_i(t_{k-1})\right]$$

összeg általában nem konvergens, ugyanis a τ_k közelítő pontokat nem a $[t_{k-1}, t_k]$ szakaszok kezdőpontjának kaptuk, márpedig a sztochasztikus integrál csak akkor konvergens, ha $\tau_k = t_{k-1}$. A teleszkopikus összeget becsülhetnénk másképpen is. Ennek a klasszikus esetben nincs értelme, most azonban célszerű, ha a Taylor-formula által biztosított

$$F'(\xi(t_{k-1}))\left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right] + \frac{1}{2}F''(\xi(\tau_k))\left(\left[\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})\right]\right)$$

másodrendű közelítéssel élünk. A Taylor-formula szerint a másodrendű tagban levő τ_k továbbra is a $[t_{k-1}, t_k]$ egy köztes pontja, de a τ_k az elsőrendű tagban nem szerepel csak a másodrendűben. Emlékeztetünk rá, hogy a második

[43] V.ö.: [8] 3.2. tétel, 211. oldal.

derivált egy kvadratikus alak, amelyre

$$F''(\xi(\tau_k))[\xi(t_k)-\xi(t_{k-1})]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k)\ .$$

Az elsőrendű közelítés éppen az

$$\int_a^b F'(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi)\,d\xi_i$$

integrálhoz tart. Mivel a keresztmegváltozás növekményének becslése alapján

$$\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k)\approx\Delta\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t_k)\ ,$$

ezért

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k)\approx\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t_k)\ ,$$

tehát

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\xi_i(t_k)\Delta\xi_j(t_k) &\approx \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(\tau_k))\Delta\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t_k)\\ &\to \int_a^b\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}(\xi(t))\,d\langle\xi_i,\xi_j\rangle(t)\ .\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a másodrendű tagokból képzett integrál a négyzetes keresztmegváltozás szerint képzett integrál, vagyis közönséges Stieltjes-integrál, így az a tény, hogy a τ_k nem az intervallum kezdőpontja, nem okoz gondot.

3.1 Itô-formula időtől függő transzformációs függvény esetén

A többdimenziós Itô-formula speciális esete amikor $\eta(s)\overset{\circ}{=}f(s,\xi(s))$, ahol az f kétváltozós, kétszer folytonosan deriválható függvény. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}f(T,\xi(T))-f(t,\xi(t)) &= \int_t^T\frac{\partial f}{\partial s}\,ds+\int_t^T\frac{\partial f}{\partial x}\,d\xi+\\ &+\frac{1}{2}\int_t^T\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\,d\langle s\rangle+\frac{1}{2}\int_t^T\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle\xi\rangle+\\ &+\int_t^T\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial x}\,d\langle s,\xi\rangle\ .\end{aligned}$$

Miként már láttuk, ha a $\zeta_1(t,\omega)$ folyamat trajektóriái korlátos változásúak, a $\zeta_2(t,\omega)$ folyamat trajektóriái folytonosak, akkor $\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle = 0$, így a másodrendű tagban tehát két tényező elhagyható, következésképpen[44]

$$f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t)) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s}\,ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\xi + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle\xi\rangle\ .$$

Ha

$$\xi(u) \overset{\circ}{=} \int_0^u X(s)\,dw(s)\ ,$$

akkor az integrálok négyzetes megváltozásának képlete szerint

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle(u) &\overset{\circ}{=} \left\langle\int_0^u X(s)\,dw(s)\right\rangle = \int_0^u X^2(s)\,d\langle w\rangle(s) = \\ &= \int_0^u X^2(s)\,ds.\end{aligned}$$

Ezt és az integrálokra vonatkozó asszociativitási szabályt kétszer felhasználva

$$\begin{aligned}f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t)) &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s}ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}d\xi + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle\xi\rangle = \\ &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial s}ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}X\,dw + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}X^2\,ds = \\ &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}X^2\right)ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}X\,dw\ .\end{aligned} \tag{2}$$

A pénzügyi matematika könyvek[45] gyakran az Itô-formulát ebben az alakban szokták közölni. Ez az alak azonban csak egy nehezen megjegyezhető, némiképpen zavaros speciális formája az általunk tárgyalt, és remélhetőleg jóval világosabb, általános esetnek.

3.2 Parciális és sztochasztikus differenciálegyenletek

Tekintsük a Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenletet (PDE):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \qquad f(T,S) = \max\{S-K,0\}\ .$$

Ez speciális esete a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf, \qquad f(T,x) = \Phi(x)$$

[44] V.ö.: [8] 3.4. állítás, 214. oldal.

[45] V.ö.: [2], 78. oldal, [3] 3.10. therorem, 38. oldal, de v.ö.: 3.11. proposition, [4] 220. oldal.

Cauchy-feladatnak, ahol μ és σ a keresett f függvényhez hasonlóan a (t,x) független változók függvényei, az r pedig a t függvénye. A parciális differenciálegyenlet megoldását sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE) segítségével adjuk meg. Tekintsük először az általános PDE-hez tartozó következő úgynevezett Cauchy-problémát:[46]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \qquad f(T,x)=\Phi(x)\ . \tag{3}$$

A parciális differenciálegyenlethez formálisan[47] rendeljük hozzá a

$$d\xi(s)=\mu(s,\xi(s))\,ds+\sigma(s,\xi(s))\,dw(s)\ , \qquad \xi(t)=x$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Vegyük észre, hogy az idő jelölésére a t helyébe s kerül, a t időparaméter és az x helyparaméter a kezdeti feltételben jelenik meg. Ismételten megjegyezzük, hogy a sztochasztikus differenciálegyenletre felírt, sztochasztikus analízisben megszokott jelölés valójában a tetszőleges $t<T$ időpontokra teljesülő

$$\begin{aligned}\xi(T)-x &= \xi(T)-\xi(t)=\\ &= \int_t^T \mu(s,\xi(s))\,ds+\int_t^T \sigma(s,\xi(s))\,dw(s)\end{aligned}$$

integrálegyenlőség teljesülését jelenti. Vezessük be az úgynevezett Dynkin-operátort, amely a PDE-ben szereplő x szerint vett deriváltakat tartalmazó tagokból áll:

$$Af\overset{\circ}{=}\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ .$$

Az A segítségével a (3) PDE

$$\frac{\partial f}{\partial t}+Af=0, \quad f(T,x)=\Phi(x) \tag{4}$$

módon írható. Legyen[48] $f(t,x)\in C^2$ az egyenlet megoldása. Az időtől függő (2) Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}df(\xi) &= \frac{\partial f}{\partial s}ds+\frac{\partial f}{\partial x}d\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}d\langle\xi\rangle=\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial s}+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)ds+\sigma\frac{\partial f}{\partial x}dw\overset{\circ}{=}\\ &\overset{\circ}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial s}+Af\right)ds+\sigma\frac{\partial f}{\partial x}dw.\end{aligned}$$

[46] Vegyük észre, hogy a feladat homogén, vagyis nem tartalmazza az f függvényt, csak a deriváltjait, vagyis az rf tagot elhagytuk.

[47] Hangsúlyozni kell, hogy a hozzárendelés formális, következésképpen mechanikus.

[48] Az $f\in C^2$ jelölés azt jelenti, hogy az f kétszer folytonosan deriválható.

Az egyenlőséget integrálként részletesen kiírva és felhasználva, hogy az f megoldása a PDE-nek, vagyis teljesül a (4):

$$\begin{aligned} f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t)) &= \int_t^T \left(\frac{\partial f}{\partial s} + Af\right) ds + \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw = \\ &= \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma dw. \end{aligned}$$

Ha a második tag elég jó,[49] akkor mind a két oldalon várható értéket véve, felhasználva, hogy a sztochasztikus integrál várható értéke nulla

$$\mathbf{M}(f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t))) = \mathbf{M}\left(\int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\, dw\right) = 0\,.$$

Mivel a $\xi(s)$ eleget tesz az SDE-nek, ezért a kezdeti feltétel miatt $\xi(t) = x$, tehát az $f(t,\xi(t)) = f(t,x)$ konstans. Az összefüggést átalakítva:

$$\mathbf{M}(f(T,\xi(T)) - f(t,\xi(t))) = \mathbf{M}(f(T,\xi(T))) - f(t,x) = 0\,.$$

Átrendezve

$$f(t,x) = \mathbf{M}(f(T,\xi(T))) = \mathbf{M}(\Phi(\xi(T)))\ ,$$

ahol felhasználtuk, hogy az f megoldása a PDE-nek, tehát minden y-ra $f(T,y) = \Phi(y)$, így $f(T,\xi(T)) = \Phi(\xi(T))$.

Térjünk vissza az eredeti

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf, \qquad f(T,x) = \Phi(x)$$

inhomogén PDE-re. Az inhomogén egyenlet helyett vegyük a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mu\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \qquad h(T,x) = \exp\left(-\int_0^T rds\right)\Phi(x) \overset{\circ}{=} \Psi(x)$$

homogén egyenletet. Vezessük be az

$$f(t,x) \overset{\circ}{=} \exp\left(\int_0^t rds\right) h(t,x)$$

függvényt, vagyis

$$h(t,x) = \exp\left(-\int_0^t rds\right) f(t,x)\ .$$

Mivel

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-\int_0^t r\,ds\right) f(t,x) = \\ &= -r(t)\exp\left(-\int_0^t r\,ds\right) f(t,x) + \exp\left(-\int_0^t r\,ds\right)\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\ , \end{aligned}$$

[49]Vagyis a sztochasztikus integrál nemcsak lokális martingál, hanem valódi martingál.

ezért, felhasználva, hogy az r csak a t függvénye

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial t} + \mu \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \\ &= \exp\left(-\int_0^t r\,ds\right)\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r(t)\,f\right], \end{aligned}$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf\ .$$

A már bemutatott módon a homogén egyenletet megoldva

$$\begin{aligned} h(t,x) &= \mathbf{M}(h(T,\xi(T))) = \mathbf{M}(\Psi(\xi(T))) \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} \exp\left(-\int_0^T r\,ds\right)\mathbf{M}(\Phi(\xi(T)))\ , \end{aligned}$$

az inhomogén egyenlet megoldása

$$f(t,x) = \exp\left(-\int_t^T r(s)\ ds\right)\mathbf{M}(\Phi(\xi(T)))\ .$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{M}$ várható érték a sztochasztikus differenciálegyenlethez tartozó valószínűség szerint értendő. A sztochasztikus differenciálegyenlet egy matematikai segédeszköz, amely közvetlenül a parciális differenciálegyenlethez tartozik és ezért teljesen független attól, hogy miként jutottunk a parciális differenciálegyenlethez. A derivatív árazás elméletében[50] a parciális differenciálegyenletet egy másik sztochasztikus differenciálegyenletből vezetjük le, amely egyenlet az árak mozgását írja le és amely egyenlet a statisztikailag megfigyelhető valószínűségi mező felett van értelmezve. A parciális differenciálegyenlet megoldásakor használt segédmező azonban egy másik valószínűség,[51] amelyet szokás kockázatmentes valószínűségi mezőnek nevezni és amely elvileg semmilyen kapcsolatban sincsen az eredeti problémában szereplő statisztikailag megfigyelt adatokra támaszkodó valószínűségi mezővel.

Irodalom

1. Arnold, Ludwig: *Sztochasztikus differenciálegyenletek*, Elmélet és alkalmazás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984
2. Baxter, Martin – Rennie, Andrew: *Pénzügyi kalkulus*, Typotex, Budapest, 2002
3. Björk, Tomas: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford, 1998

[50] V.ö.: [4]

[51] Amely csak a matematikusok által kreált fantáziavilágban létezik.

4. Hull, John C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, Prentice Hall, London 1997
5. Gihman, I. I., Szkorohod, A. V. *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1975
6. Jacod, Jean – Shiryaev, Albert, N.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer, Berlin, 1987
7. Medvegyev, Péter: *Valószínűségszámítás*, Aula, Budapest, 2002
8. Medvegyev, Péter: *Sztochasztikus analízis*, Typotex, Budapest, 2004
9. Revuz, Daniel, Yor, Mark: *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin, 1999
10. Száz, János: *Tőzsdei opciók*, Tanszék Kft., Budapest, 1999

INTRODUCING STOCHASTIC ANALYSIS

In the article we present a short, intuitive introduction to stochastic analysis. Our presentation is aimed for economist and we try to discuss only the most elementary properties of the stochastic analysis. Instead of precise proofs we present some simplified intuitive arguments. The central concept of the discussion is the quadratic variation and the Itô's lemma.

DERIVATÍV PÉNZÜGYI TERMÉKEK ÁRDINAMIKÁJA ÉS AZ ÚJ TÍPUSÚ KAMATLÁBMODELLEK[1]

KIRÁLY JÚLIA – SZÁZ JÁNOS
Budapesti Corvinus Egyetem

Ennek a cikknek az a célja, hogy áttekintést adjon annak a folyamatnak néhány főbb állomásáról, amit Black, Scholes és Merton opcióárazásról írt cikkei indítottak el a 70-es évek elején, és ami egyszerre forradalmasította a fejlett nyugati pénzügyi piacokat és a pénzügyi elméletet. A hazai tőkepiacra ugyanakkor mindez csak halovány hatást gyakorolt, és szinte teljesen érintetlenül hagyta a hazai közgazdász társadalmat.[2] Az itthoni közöny politikai okokkal még magyarázható az elmúlt 30 év első felére vonatkozóan, az utolsó 15 év érdektelenségét inkább azzal próbálhatjuk magyarázni, hogy e terület meglehetősen matematikaigényes, és a hazai matematikai közgazdaságtan művelőinek figyelmét elsődlegesen az általános egyensúlyelmélet, a játékelmélet, az operációkutatás köti le. Az opcióárazási problémából kinövő irodalom homlokterében a rövid távú pénzügyi *sztochasztikus dinamika* áll. Leginkább a hazai ökonométer társadalom figyelmét ragadhatta volna meg mindez a módszertan közelsége folytán, de hát a hazai derivatív piacon nem sok empirikus elemeznivaló akad.

A releváns kérdések

A határidős és opciós ügyletek a deviza-, részvény-, hitel- és árutőzsdei ügyletek kapcsán felmerülő piaci kockázat kezelésére alkalmasak, mivel az alapügyletek kockázatait tükrözik vissza valamilyen transzformált formában. Az azonnali (részvény, vagy deviza) árfolyamban megjelenő kockázat legegyszerűbb tükröződése a határidős árfolyam, mivel ez elvben csupán az árfolyamnak a lejárati időpontra felkamatoztatott értéke. A vételi és eladási opciók árazása veti fel annak a kérdését, hogy mi a valószínűsége az opció

[1] Beérkezett: 2005. május 11. A cikk az OTKA T 047193 kutatási projekt keretében készült.

[2] A megjelent hazai derivatív témájú írások, értekezések zöme inkább matematikusoktól, fizikusoktól és az egyetemet nemrég befejezett ifjú közgazdászoktól származik. Itt most megpróbálunk egy tömör illusztrációt adni e területről. Mivel e témakörnek csak a szakkönyvei több olvasótermet töltenének meg, így csak a főbb fogalmakra, módszerekre, kiválasztott termékekre koncentrálunk. Az általunk felkinált sajtban több a luk mint a sajt, de hisszük, hogy az íze hiteles. E terület áttekintése nélkül erősen hiányos lenne e pénzügyekkel foglalkozó különszám. A felhasznált matematikai fogalmakat és tételeket (Wiener-folyamat, Ohrstein-Uhlenbeck-folyamat, Ito-lemma, martingál reprezentációs tétel, Girszanov-tétel, Kolmogorov-egyenletek stb.) nem ismertetjük, hasonlóképpen mellőzzük a szükséges pénzügyi alapfogalmak ismertetését (arbitrázs, hedge, call és put opció, forward, futures, swap ügyletek). Ezekről ld.: Medvegyev, Michaletzky, Varga, Száz, Hull, Baxter-Rennie, Elliott-Kopp könyveket.

lehívásának, tehát mi a jövőbeni árfolyam eloszlása, ehhez pedig tudni kell, hogy milyen folyamatot követ az árfolyam alakulása. Az opciók árazásának problémája pillanatok alatt vezetett általában a származtatott kockázatú termékek árazásának a vizsgálatához. Széles körben alkalmazott fogalom lett a dinamikus replikálás, az *arbitrázsárazás*.

Magyarországon most és a belátható jövőben a derivatív pénzügyi termékek árazásának elmélete és módszertana meggyőződésünk szerint nem a részvény portfóliók kockázatának kezelése, hanem a különböző futamidejű kamatlábak véletlen változásai mögött meghúzódó szükségszerű összefüggések jellegének megértése miatt fontos. Ez utóbbi kérdésfelvetés és szemlélet tökéletesen hiányzik a mai magyar közgazdasági gondolkodásból.

Ha a kötvényárazás problémáját egy kamatláb derivatív termék árazásaként közelítjük meg, akkor az ebből adódó legfontosabb felhasználható eredmény a *Heath-Jarrow-Morton* (HJM) tétel, amelyet a cikk második felében ismertetünk, és azt mondja ki, hogy *a kamatlábak változásának kockázatsemleges valószínűségek melletti trendjét egyértelműen meghatározza a kamatlábak volatilitásának lejárati szerkezete.*

Az itt vázlatosan ismertetésre kerülő, a derivatív termékek árazásának elméletére épülő kamatláb modellek azt számszerűsítik, hogy a rövid lejáratú kamatláb véletlen ingadozásaiból összetevődő lehetséges jövőbeli pályái miként határozzák meg a hozamgörbe alakját, azaz a különböző futamidejű kamatlábak egymáshoz való viszonyát. Megfordítva: adott feltételek mellett a hozamgörbe alakja tartalmazza azokat az információkat, hogy a rövid lejáratú kamatláb a jövőben milyen pályákat futhat be és milyen kockázatsemleges valószínűséggel.

A cikkben felváltva használjuk a folytonos és a diszkrét megközelítést, utóbbit hol az előző numerikus módszereként, hol önálló modell-családként.

Egy származtatott termék árazása két dologtól függ:

– mi a származtatott termék konstrukciója,

– milyen árfolyam-alakulási folyamatot követ az alaptermék.

Először a mindkét szempontból legegyszerűbb modellt mutatjuk be, ez a részvény opció árazás *Black-Scholes modellje.* Az összetettebb termékkonstrukciókra az *egzotikus opciókat* hozhatjuk példaként, az alaptermék áralakulása kapcsán a sztenderd diffúziós folyamat feltételezése után az *átlaghoz visszahúzó folyamatot* vizsgáljuk. Az árfolyam-alakulás mint diffúziós folyamat azt jelenti, hogy a piaci hatékonyság hipotézisének szellemében úgy tekintjük az árfolyam-alakulást, hogy az árfolyamokat véletlenszerűen felle lökdösik a folyamatosan megjelenő új információk — a Brown-mozgást végző részecskék mozgásának analógiájára. Amiként biztosan tudjuk, hogy egy adott részecske most hol van, de csak bizonyos valószínűséggel állíthatjuk, hogy itt vagy ott lesz a jövőben, a részvény vagy devizaárfolyamról is most bizonyosan tudjuk, hogy mennyi az értéke, azonban a jövőbeli nagyságára vonatkozó valószínűség-eloszlást megadó sűrűség függvény ahhoz hasonlóan terül szét időben, amiként az egyetlen pontjában felhevített vasrúdban terül szét a hő. A cikk középső részében taglaljuk azokat a fizikai, illetve pénzügyi parciális differenciálegyenleteket (PDE), amelyek leírják a folyamatokat és alátámasztják, hogy azonos valószínűség számítási apparátus írja le őket (Kolmogorov-egyenletek).

A cikk keretében csak azokat a modelleket vázoljuk fel, amelyek a hozamok *normális* eloszlásán épülnek fel. A gyakorlatban is kimutatható a Gauss-eloszláshoz képesti *vastag-szél jelenség*, azonban ez a jelenség és az extrém hozamok erőteljesebb együttmozgása már külön cikk témái.

A hozamgörbe modellekben lényeges eltérés van az egy, illetve több kockázati faktoros modellek következtetései között. Az *egyfaktoros kamatláb-modellekben* a hozamgörbe pontjai mindig azonos irányba tolódnak el az új információ hatására (bár eltérő mértékben). A gyakorlati alkalmazásokhoz szükséges további kockázati faktorok figyelembevétele. Az amerikai állam-kötvények árfolyam adatai alapján főkomponens elemzéssel olyan 3 faktort szoktak beazonosítani, amelyben az első faktor a hozamgörbe szintjére, a második a meredekségére, a harmadik az alakváltoztatásaira (csavarodására) hat.

Mi a *többfaktoros* opcióárazási modellekre (egyben az egzotikus opciókra) a *csereopciót* (exchange option) hozzuk példaként, amely egyfajta általánosítása a sima call opciónak.

Az opcióárazás állította reflektorfénybe a *dinamikus replikáláson* alapuló arbitrázsárazást, ami elviekben különbözik a közgazdászok által széles körben használt kereslet-kínálat elemzéstől, mivel a relatív árak konzisztenciáját vizsgálja. A piacok teljessége *(complete markets)* alcím alatt tárgyaljuk az arra vonatkozó vizsgálatok eredményeit, hogy miként függ össze az egyes termékek más termékekből való folyamatos kikombinálhatósága az árak összhangjával, és mindez a valószínűségszámítás nyelvére való átfordíthatósággal (a martingálok létezése és egyértelműsége). A *sztochasztikus reprezentáció* jól példázza, hogy amit a modern pénzügy tankönyvek speciális pénzügyi problémaként tárgyalnak, azok a fizikusok által régen kidolgozott összefüggések *(Feynman-Kac formula).*

Az opciók és számos más bonyolult pénzügyi termék ára explicit módon függ az alaptermék volatilitásától, ezáltal lehetővé válik piaci adásvételek formájában olyan elvont nagyságokra vonatkozó fogadások kötése, mint a jövőbeni bizonytalanság mértéke *(volatility trading)*, vagy különböző árfolyamok közötti korreláció nagyságának változása *(trading correlation).*

A Black-Scholes modell

A Black–Scholes–Merton modellben 3-féle termék van:

- egy kockázatmentes,
- egy kockázatos és
- egy származtatott kockázatú termék

(pl. bankbetét + részvény + európai vételi jog). Kérdés, mi a harmadik termék ára, ha ismerjük az első két termék árfolyam-alakulását. Feltesszük, hogy a betét és a részvény (alaptermék) kumulált loghozama a $[0, t]$ időszakra:

$$Y_B(t) = rt \qquad Y(t) = N(\alpha t, \sigma^2 t) \ , \tag{1}$$

ahol t folytonos változó a $[0, T]$ időszakban, r, α, σ konstans, és a részvény kumulált loghozama minden időpontra normális eloszlású.[3] A kumulált loghozam definíciója alapján a betét értékének alakulása konstans kamatláb mellett, ill. a részvény árfolyama konstans drift és volatilitás mellett:

$$B(t) = B(0)e^{Y_B(t)} \qquad S(t) = S(0)e^{Y(t)} \ , \tag{2}$$

azaz a betét egy exponenciális függvény mentén alakul, a részvény árfolyam eloszlása minden időpontban lognormális. Nézzük a származtatott termékek azon körét, amelyeket teljes mértékben meghatároz a T időpontbeli értékük, mivel a $[0, T]$ időszakban nem involválnak pénzmozgást (T-termékek).[4] Jelölje $g(t)$ a származtatott termék t időpontbeli értékét. A forward pozíciót ill. az európai vételi jogot definiáló képletek:

$$g(T) = S(T) - K \qquad g(T) = \max\{\, 0, S(T) - K\,\} \tag{3}$$

ahol K a forward árfolyam ill. az opció lehívási árfolyama.

Adott tehát a $B(t)$ és $S(t)$ $(0 \leq t \leq T)$ és a $g(T)$. Kérdés, mennyi a $g(t)$ értéke $(t < T)$, kiemelten: *mennyi a* $g(0)$ *értéke?* A legelegánsabb választ erre a kérdésre Merton adta 1974-ben az Ito-lemma felhasználásával.[5] A részvény kumulált loghozama az (1) képletben egy Ito-folyamat, amely SDE alakban felírva:

$$dY(t) = d \ln S(t) = \alpha dt + \sigma dW(t) \ , \tag{4}$$

ahol $dW(t)$ a $W(t)$ Wiener-folyamat növekménye.[6] Az árfolyam a kumulált loghozam Ito transzformáltja:

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dW(t) \qquad \mu = \alpha + \frac{\sigma^2}{2} \ . \tag{5}$$

A származtatott termék árfolyam-alakulása az alaptermék árfolyam-alakulásának Ito transzformáltja:

$$dg(S,t) = \left(g_t + g_S \mu S + \frac{1}{2} g_{SS} \sigma^2 S^2 \right) dt + g_S \sigma S dW \ , \tag{6}$$

ahol az indexek a parciális deriváltakat jelölik.[7] A (6) egyenletből kivonva az (5) g_S-szeresét, eltűnik a kockázatot reprezentáló dW-s tag. Ez ekvivalens azzal, hogy kiírunk 1 darab derivatív terméket és veszünk g_S darab

[3] Alternatív megfogalmazásban: minden Δt hosszú periódusban a loghozamok független normális eloszlású valószínűségi változók konstans paraméterekkel.

[4] Ilyen például a forward pozíció, vagy az európai opciók, de nem ilyen a futures pozíció a napi elszámolás miatt, vagy az amerikai típusú opciók a T időpont előtti lehívhatóság miatt.

[5] 1994-ben kapott Nobel-díjat ezen úttörő munkásságáért.

[6] Legalapvetőbb sajátossága, hogy $[dW]^2 = dt$.

[7] A pénzügyes szakzsargonban a g_S neve delta, a g_{SS} a gamma, a g_t a theta.

alapterméket. Ennek a portfóliónak az értéke: $V = -g + g_S S$. E portfólió értékváltozása:

$$dV = -dg + g_S dS = -\left(g_t + \frac{1}{2} g_{SS} \sigma^2 S^2\right) dt \; . \tag{7}$$

Mivel a portfólió kockázatmentes, ezért a dt időszakra a kockázatmentes kamatláb az elvárható hozam.

$$dV = -\left(g_t + \frac{1}{2} g_{SS} \sigma^2 S^2\right) dt = V r dt = (-g + g_S S)\, r dt \; . \tag{8}$$

A dt kiesik és a derivatív termékek árazásának alapegyenletét, a *Black-Scholes egyenletet* (BS) kapjuk:

$$g_t = rg - rSg_S - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 g_{SS} \; . \tag{9}$$

A Black-Scholes (BS) egyenlet megoldása a $g(T) = \max(0, S_T - K)$ lejáratkori peremfeltétel mellett a Black-Scholes képlet, ami a K lehívási árfolyamú vételi jog értékét adja meg:

$$c = SN(d_1) - PKN(d_2) \; , \tag{10}$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln[S/(PK)]}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \qquad P = e^{-rT} \; .$$

A (10)-es formula zárt képlettel adja meg a BS egyenlet megoldását, ami ritkaság, és a call opciót megadó speciális peremfeltételnek köszönhető. A (9) PDE egyenletet a folytonosság és a normalitás feltételezésével kaptuk, azonban többnyire nincs zárt képlettel megadható megoldása a BS parciális differenciálegyenletnek. A numerikus megoldásra bevett gyakorlat a *véges differenciák* módszerének alkalmazása. Bevezetve a szokásos $x = \ln S$ jelölést, a BS egyenlet:

$$g_t = rg - vg_x - \frac{1}{2} \sigma^2 g_{xx} \; , \tag{11}$$

ahol $v = r - 0.5\sigma^2$. Ennek a diszkretizált változata a forward differenciákkal felírva (*explicit véges differenciák* módszere):

$$\begin{gathered} \frac{g_{i+1,j} - g_{ij}}{\Delta t} = \\ = rg_{ij} - v\frac{g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{g_{i+1,j+1} - 2g_{i+1,j} + g_{i+1,j-1}}{\Delta x^2} \; , \end{gathered} \tag{12}$$

ahol g_{ij} a származtatott termék $i\Delta t$ időpontbeli és $e^{j\Delta x}$ árfolyamhoz tartozó értéke. Átrendezve:

$$g_{ij} = \frac{1}{1 + r\Delta t} \left(p_u g_{i+1,j+1} + p_m g_{i+1,j} + p_d g_{i+1,j-1}\right) \; , \tag{13}$$

ahol

$$p_u = \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} + \frac{v}{\Delta x}\right), \quad p_m = 1 - \Delta t\frac{\sigma^2}{\Delta x^2}, \quad p_d = \frac{1}{2}\Delta t\left(\frac{\sigma^2}{\Delta x^2} - \frac{v}{\Delta x}\right). \tag{14}$$

Célszerű választás[8] a $\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t}$, ekkor a (14) alakja:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{v\Delta t}{\Delta x}, \qquad p_m = \frac{2}{3}, \qquad p_d = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\frac{v\Delta t}{\Delta x}. \tag{14b}$$

A (13) képletből látható, hogy a számolás folyamata időben visszafelé halad. Az (i, j) pontok egy téglalap rácspontjai, ahol a g_{ij} téglalap jobb oldalát a derivatív termék lejáratkori értékei határozzák meg, az alsó és felső élek értékeit külön kell megadni.[9]

A központi szerepet játszó (9) egyenlet levezetése azon alapult, hogy az alaptermék és származtatott termék árfolyam-alakulása ugyanazt a Wiener-folyamatot tükrözi. Az (5)-(6) SDE-k a bemutatott módon (pénzügyes zsargonban: dinamikus delta hedge révén) a (9) PDE-vé alakíthatók. Ennek explicit vagy numerikus megoldása adja a derivatív termék keresett értékét. A kockázat folytonos kiküszöbölése azt jelenti, hogy a két kockázatos termék arányának folytonos változtatásával szintetikusan előállítható a kockázatmentes termék. Az összefüggés átrendezhető: a származtatott kockázatú termék előállítható az alaptermék és a kockázatmentes termék segítségével. Ez a replikáló stratégia *önfinanszírozó* és *előrelátható (previsible)* folyamat.[10]

Az *önfinanszírozás* azt jelenti, hogy bár jó eséllyel minden periódus végén meg kell változtatni a replikáló portfólió összetételét, az átrendezés során nem változik a portfólió értéke: ha éppen növelni kell az alaptermék mennyiségét (adott esetben részvényt kell vásárolni), akkor ezt hitelfelvételből tesszük,[11] ha el kell adni az alaptermékből, akkor az ebből befolyó összeget hiteltörlesztésre fordítjuk, vagy betétbe helyezzük. Az előreláthatóság azt jelenti, hogy már ennek a Δt hosszú periódusnak a végén tudjuk a portfólió szükséges összetételét, annak ismerete nélkül, hogy a következő időszakban miként változik az alaptermék árfolyama. A replikálás azt jelenti, hogy a következő periódus minden lehetséges alaptermék árfolyam értékre megegyezik a származtatott termék és replikáló portfólió értéke.

[8] Részletesebben lásd Hull.

[9] Az alsó szél az $S(t) = 0$ értékekhez tartozó derivatív értékeket tartalmazza, a felső szél pedig egy kellően nagynak választott árfolyamszinthez tartozó értékeket. Ha nem pótolnánk ki a szélső értékeket, akkor minden lépésben elvesztenénk egy alsó és felső értéket a táblázatban, és egy balra keskenyedő háromszöget kapnánk, ami balról jobbra nézve egy trinomiális fa (ld. később). A szélső értékek pótlása egyszerű lineáris extrapoláció, ha a felület függőleges görbülete (g_{SS}) nulla. Az $S_{\max}$ kellően nagyra választásával ez többnyire könnyen elérhető.

[10] Bizonyítást ld. pl. Björk.

[11] Ha pozitiv nagyságú betétünk van, akkor ennek terhére vásárolunk.

Árfolyamfák

Az árfolyam-alakulás folyamatát nem csak a Black-Scholes egyenlet levezetése után diszkretizálhatjuk, hanem kiindulásként is. Erre szolgálnak a binomiális és trinomiális fák. Az árfolyam adott értékéből két ill. három különböző árfolyamértékhez létezik közvetlen átmenet egy Δt hosszú periódus alatt. E változások függetlenek, és úgy kell megválasztani e fák paramétereit (a változás mértékét és valószínűségét), hogy a Δt időszak alatti hozam várható értéke $\alpha\Delta t$, varianciája $\sigma^2\Delta t$ legyen.[12] Több választási lehetőség is van (2 feltétel van, és 3 ill. 4 paraméter), többféle modell használatos.[13]

Tekintsünk *egy periódust* a *binomiális modellben.* Az alaptermék árfolyama legyen S, ez vagy u-szorosára nő p valószínűséggel, vagy d-szeresére $(1-p)$ valószínűséggel $[Su, Sd]$. A két feltétel teljesül pl. az alábbi választás mellett:[14]

$$u = e^{\alpha\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}\,, \qquad \ln u = \alpha\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,, \tag{15a}$$

$$d = e^{\alpha\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}\,, \qquad \ln d = \alpha\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\,, \tag{15b}$$

$$p = 0.5\,. \tag{15c}$$

Egy tetszőleges származtatott termék ismert lejárati (Δt időpontbeli) értékeit jelölje g_u és g_d, és a meghatározandó jelenlegi értékét pedig g. A betét értéke mindenféleképpen $G = e^{r\Delta t}$-szeresére nő. Jelölje x a szükséges részvény számot, és y a betét szükséges nagyságát, hogy előállítsuk a származtatott termék lejárati értékeit. Ennek az (x, y) összetételű portfóliónak az előállítási költsége, azaz értéke (V) lesz a származtatott termék jelenlegi értéke (g). A replikáló portfólió lejárati értékét rögzítő két egyenlet:

$$g_u = xSu + yG\,, \tag*{16a}$$

$$g_d = xSd + yG\,. \tag*{16b}$$

A két ismeretlenre megoldva:

$$x = \frac{g_u - g_d}{Su - Sd}\,, \qquad y = \frac{g_u - xSu}{G}\,. \tag{17}$$

A replikáló portfólió, ill. a származtatott termék értéke a jelenben:

$$g = V = xS + y\,. \tag{18}$$

Behelyettesítve, és felhasználva a

$$p = \frac{G-d}{u-d} \tag{19}$$

---

[12]A függetlenség feltételezése miatt nemcsak a várható értékek, hanem a varianciák is összeadhatóak, és mi az $N(\alpha T, \sigma^2 T)$ eloszlást akarjuk visszakapni a $\sum \Delta t = T$ időszakra vonatkozóan.

[13]Ezekről kitűnő áttekintést ad Strickland,, Clewlow (2000) 10-57. o.

[14]Ha a Δt értékét csökkentjük, akkor a kumulált loghozam az $N(\alpha T, \sigma^2 T)$ értékhez tart, ami az elemzésünk kiindulópontja.

jelölést, a derivatív keresett értéke a periódus elején:

$$g = \frac{pg_u - (1-p)g_d}{G} \,. \tag{20}$$

Így a binomiális modellben bármely származtatott termék értéke megegyezik a jövőbeni kifizetés várható értékének jelenértékével, ahol a várható értéket a kockázatsemleges valószínűséggel, a jelenértéket a kockázatmentes kamatlábbal számoljuk. A (19) képletet *kockázatsemleges valószínűségnek* nevezik, mert kielégíti a

$$pSu + (1-p)Sd = SG \tag{21}$$

egyenletet és normál esetben a $d < G < u$, így $0 < p < 1$.

A (17)-(18) egyenletek alapján az árazás menete a következő: balról jobbra haladva felírjuk az S_{ij} árfolyamok táblázatát, ennek utolsó oszlopa és a származtatott termék T időpontbeli kifizetés függvénye alapján a g_{ij} táblázat utolsó oszlopát. Ezt követően lépésről lépésre jobbról balra haladva az S és g táblázatok j-edik oszlopa alapján kiszámítjuk az x, y és g táblázatok $(j-1)$-edik oszlopát [(17)–(18)]. Ez a megközelítés megadja a származtatott termék árfolyam-alakulásának összes lehetséges pályáját és a hozzájuk tartozó (x, y) replikáló stratégiát.

A (20) képlet alapján már csak két táblázat kell, az S és a g — utóbbi most is az utolsó oszlopából kiindulva jobbról balra készül. Ha a várható érték jelenértéke szabályt (20) egy lépésben alkalmazzuk, akkor a derivatív értéke egy szorzatösszeg:

$$g = \sum_{k=0}^{n} e^{-rT} p_k g_k = e^{-rT} \sum_{k=0}^{n} p_k g_k \,, \tag{22}$$

ahol $S(n,k) = Su^k d^{n-k}$, $p(n,k) = p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, és a p_k ill. g_k arra az állapotra utalnak, hogy az árfolyam n lépés során pontosan k alkalommal ment fel.[15]

A mértékcsere, martingálok

Az előző alpont két lényeges mozzanata:

- a binomiális modellben a lépésenkénti (x, y) *replikálás* átfogalmazható a lépésenkénti várható érték számításra a számított p *valószínűség* alapján, ez pedig egy 1 lépésben történő várható érték számításra rövidíthető, és mint látni fogjuk, ezen az alapon lehet általános árazási elméletet felépíteni;

[15] Amennyiben a *trinomiális* fára felírjuk a lokális várható érték és variancia feltételt, akkor az egyik lehetséges megoldást a (14) egyenletek adják, a derivatív értékét pedig épp a (13). Ebben a kontextusban a (13) a várható érték jelenértéke —a véges differenciák esetén nem volt ilyen értelmezése—, és attól lesz kockázatsemleges értékelés, hogy $v = r - 0.5\sigma^2$ és nem $v = \alpha$.

- a (20)-as árazási képletben nem az eredeti (15c) valószínűség szerepel, ami mellett a várható hozam α, hanem a számított (19) kockázatsemleges valószínűség, ami mellett a várható hozam $r - \sigma^2/2$.

A binomiális modellnek ez a sajátossága teljes mértékben megegyezik a folytonos Wiener-folyamaton felépülő eredménnyel.

Amennyiben a (21) képletben átosztunk a G-vel (a bankbetét növekedési együtthatójával), akkor láthatjuk, hogy a kockázatsemleges valószínűség mellett a diszkontált árfolyam-alakulás martingál. A S folyamat a Q mérték szerint martingál, ha minden $j > i$-re

$$\mathbf{E}_Q(S_j \mid F_i) = S_i \ , \tag{23}$$

azaz a folyamat j időpontbeli feltételes várható értéke megegyezik a pillanatnyi értékével.

Kétféleképpen kaphatunk martingál tulajdonságú binomiális fát:

a) adott árfolyamfához keresünk olyan valószínűségeket, amelyekkel súlyozva a fa adott pontjához tartozó kimeneteket, pont a fa adott pontjának árfolyamértékét kapjuk;[16]

b) megadjuk a fa utolsó oszlopát (a T időpontbeli valószínűségi változó lehetséges értékeit), és adott átmenet-valószínűségek segítségével jobbról balról haladva konstruálunk egy *feltételes várható érték folyamatot.*

A származtatott termékek martingál árazásának lépései:

1. diszkontáljuk az alaptermék árfolyamfáját a kockázatmentes kamatlábbal,

2. megkeressük az a) módszer szerint a martingál mértéket,

3. meghatározzuk az opció lehetséges lejáratkori értékeit [az $S_T - K$ számolásnál mindkét érték jelenbeni pénzben értendő],

4. az opció lejáratkori értékeiből képezünk egy feltételes várható érték folyamatot — ennek minden eleme jelenbeni pénzben értendő, ennek a fának a csúcspontja a származtatott termék értéke.

A *binomiális reprezentációs tétel* új megvilágításba helyezi a replikáló stratégiák mibenlétét, létezését és egyértelműségét. Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha két binomiális folyamat (X_i és Y_i) ugyanazon Q mérték szerint martingál, és mindig ugyanabba az irányba mozdulnak el (csak eltérő mértékben), akkor

$$\Delta Y_i = a_{i-1} \Delta X_i \ ,$$

ahol már az $(i-1)$-edik lépésben meghatározódik az a_{i-1} értéke, tehát nem szükséges tudni, hogy a két folyamat felfelé vagy lefelé mozdul-e el. A

[16]Feltéve, hogy a pillanatnyi árfolyam a két lehetséges kimenet közé esik.

származtatott termékek replikálása az alaptermékkel nem más, mint az egyik binomiális martingál megfeleltetése egy másiknak.

Hasonló összefüggések érvényesek a *folytonos* esetben is. A Wiener-folyamat egy folytonos martingál, hiszen a növekménye egy zérus várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó. A folytonos martingálok növekményei is előrelátható módon megfeleltethetők egymásnak az ún. *martingál reprezentációs tételnek* megfelelően.[17] Tehát ekkor is kialakítható a ,,végtelenül rövid periódusokra" a megfelelő replikáló (ill. fedező) stratégia. A Girszanov-tétel értelmében a $dX_1(t) = a(t)dt + dW_1(t)$ folyamatok $dX_2(t) = dW_2(t)$ martingállá alakíthatók bizonyos feltételek mellett a valószínűségi mérték cseréjével.[18] Népiesen szólva a mértékcserével eltüntethető a drift, miközben a volatilitás változatlanul egységnyi marad. Ezek után a származtatott termékek árazása ugyanabban a 4 lépésben történik a folytonos modellben, akárcsak a binomiálisban, csupán a martingál tulajdonságot adó valószínűségi mérték nem a kockázatsemleges valószínűséget definiáló (21) képletből adódik, hanem a Girszanov-tételből.

Sztochasztikus reprezentáció

A binomiális árfolyam-alakulás esetén a dinamikus replikálás valószínűségszámítási átfogalmazása egyfelől a martingál tulajdonsághoz és a martingálreprezentáción keresztül visszavezetett a replikáláshoz, másfelől a (22) várható érték jelenérték szabályra vezetett.

A pénzügyesek által felállított egyenletek itt is egy sokkal általánosabb, már régebben kidolgozott matematikai elméletbe torkolltak. A BS-féle PDE-t kielégítő g függvényhez található egy olyan sztochasztikus differenciálegyenlet (SDE), amelynek megoldását adó X folyamat T időpontbeli értékének a (t, x) időpontokból és állapotokból tekintett feltételes várható értékeit éppen a $g(t, x)$ függvény adja meg. Ez a *Feynman-Kac*-féle sztochasztikus reprezentáció. Ez a megfeleltetés az SDE-vel leírt diffúziós folyamat sajátja. Ez alapján a Black-Scholes PDE-nek megfeleltethető egy várható érték jelenértéke számítás, mivel a BS egyenlet kiindulópontja is egy diffúziós SDE, amelyre alkalmazható az Ito-lemma.

Nézzük meg némi formalizmussal. *Cauchy* a pénzügyektől teljesen függetlenül vizsgálta az alábbi PDE-t:

$$g_t + \mu(x,t)g_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)g_{xx} = 0\,, \qquad g(T,x) = \Phi(x)\,. \tag{24}$$

Tekintsük a következő $X(t)$ diffúziós folyamatot, amely a kiválasztott t időpontban a rögzített x értéket veszi fel:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW\,, \qquad X(t) = x\,. \tag{25}$$

[17]Baxter-Rennie (2002) 100. o.

[18]Baxter-Rennie (2002) 95. o., Avellaneda-Laurence (2000) 167. o.

Ha vesszük az X folyamatnak a g függvény szerinti transzformáltját, akkor felírva az Ito-formula integrál alakját,[19] és felhasználva, hogy a $g(t,x)$ függvény kielégíti a (24) egyenletet, a Feynman-Kac formulát kapjuk:

$$g(t,x) = \mathbf{E}_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right] . \tag{26}$$

Ha a következő analóg problémát vizsgáljuk:

$$g_t + \mu(x,t)g_x + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)g_{xx} + rg = 0\,, \qquad g(T,x) = \Phi(x)\ , \tag{24b}$$

akkor a (26) a következő formát ölti:

$$g(t,x) = e^{r(T-t)}\mathbf{E}_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right] . \tag{26b}$$

A Feynman-Kac formula adja meg a kapcsolatot a BS egyenlet és a várható érték jelenérték szabály között folytonos esetben.

A diffúzió

A diffúzió egyszerre fizikai, pénzügyi és matematikai jelenség.[20] Képzeljünk egy mindkét irányban végtelen vasrudat, ahol $g(t,x)$ mutatja az x helyen a t időpontban mért hőmérsékletet. A hőáramlás, vagy diffúzió

$$g_t = g_{xx} \tag{27}$$

egyenlete egy alaposan megvizsgált folyamat, ahol g_t a hőmérséklet változása egy adott pontban, g_{xx} pedig a hőmérséklet térbeli második deriváltja. Az egyenlet tartalma: bontsuk a rudat Δx hosszú kis intervallumokra. Ha egy adott intervallum bal szomszédja melegebb, a jobb szomszédja pedig hidegebb, akkor az adott intervallum hőmérséklete akkor nő, ha több hő érkezik balról, mint amennyi távozik jobbra. Ez pedig a hőmérsékletkülönbségek eltérése pontosan a (27) egyenlet szerint, feltéve, hogy a szomszédos intervallumok közötti hőcsere arányos a hőmérséklet különbséggel. Ez azt is jelenti, hogy a $g(x)$ függvény inflexiós pontjai választják külön azokat az intervallumokat, amelyek pontjai melegszenek, azoktól, amelyek pontjai hűlnek.

Ha a 0 időpontban az $x = 0$ helyen koncentrálódik a teljes hőmennyiség a rúdban, akkor t idővel később a hőmérséklet eloszlása a rúd különböző részein:[21]

$$g(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} . \tag{28}$$

Mielőtt nagyon belemelegednénk e kitérőbe, vegyük észre:

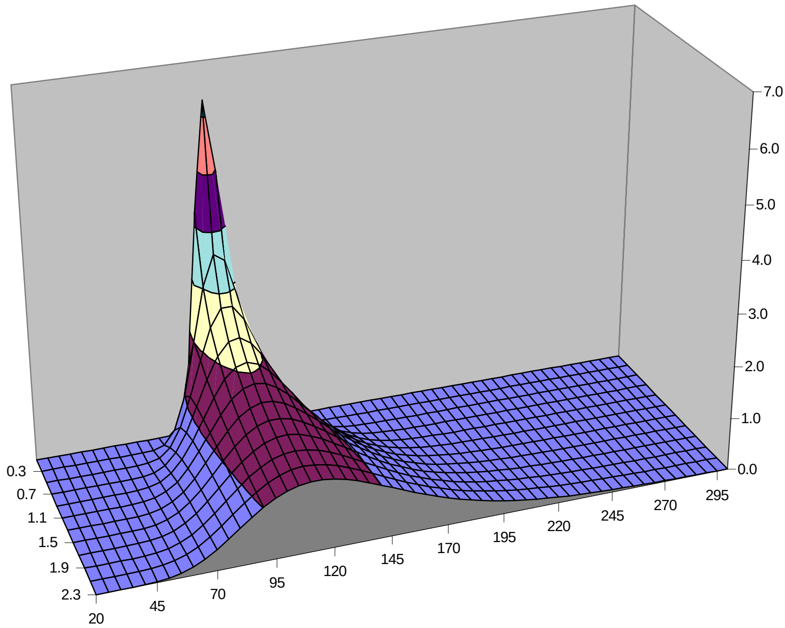
1. a (27) diffúziós PDE hasonlóságát a (9) Black-Scholes PDE-vel;
2. az időbeni szétterülés a Gauss-függvénnyel írható le.

[19] Részletesen ld. Björk (1998) 58-62. o.

[20] És feltehetően még tucatnyi tudományterület felől beazonosítható jelenség.

[21] Részletesen ld.: Wilmott-Howison-Dewynne (1995) 59-69. o.

Az 1. pontbeli hasonlóság teljesebb, mint gondolnánk. A változók (S, t, g) átskálázásával a (9) a jóval egyszerűbb (27) formára hozható.[22] A 2. pontbeli analógia jól látható, ha az (1) és (2) képletek segítségével ábrázoljuk a jövőbeli árfolyam eloszlását, ha tudjuk a mai árat.



1. ábra. Az árfolyam eloszlásának változása az idő függvényében ($S_0 = 100$), Árf: 20-300, idő: 0-3 év

Konzisztens árazás, komponensárak

A határidős pozíció egy statikus replikációval értékelhető, az opció egy dinamikus replikációval. Ezek a kiinduló alapesetei az *arbitrázsárazásnak*. Az arbitrázsárazás esetén eltűnnek a mikroökonómia kereslet-kínálat görbéi, a helyükre lépő egyszerű alapelv: ha két különböző portfólió ugyanazt a kifizetés sorozatot biztosítja a jövőben, akkor a jelenbeni értéküknek is azonosnak kell lenniök. Amilyen egyszerűen hangzik az elv, annyira nem kedvelik a

[22] Az átskálázás lényege, hogy dimenzió nélküli változókkal számolunk. Nem a forintban mért derivatív árat keressük, hanem a lehívási árfolyam százalékában $[g/K]$, nem az árfolyam-alakulásával számolunk, hanem az árfolyam és a lehívási árfolyam logszázalékos távolságával $[\ln(S/K)]$, nem az években mért idővel, hanem a lejáratig hátralevő varianciamennyiség a változó $[0.5\sigma^2(T-t)]$. Részletesebben ld.: Wilmott-Howison-Dewynne (1995) 76-81. o.

hallgatók vizsgafeladatnak a *dinamikus arbitrázs* egyszerűbb eseteit sem. Arbitrázs lehetőség akkor van, ha létezik olyan *stratégia*, amely révén egy nulla induló pozícióból indulva pozitív valószínűséggel nyerünk, miközben kizárt, hogy bármely esetben is veszítsünk. Ha az árak konzisztensek, akkor nincs arbitrázs lehetőség. A konzisztencia ellenőrzése egyszerű a diszkrét idejű, diszkrét állapotterű folyamatok esetén, különösen a T-termékekre.

A különböző termékek lejárati értéke egy-egy n elemű vektorral adható meg (feltéve hogy a T időpontban n lehetséges állapot van). Ha beárazzuk ezt az n darab T-időpontbeli egységvektort, mint speciális származtatott termékeket, akkor az *Arrow-Debreu* árakat *(komponens árakat)* kapjuk. Bármely termék ára ezek lineáris kombinációja. Ellenkező esetben arbitrázs lehetőség van. A komponensárakat (AD árakat) a várható érték jelenértéke szabály alapján egyszerűen megkaphatjuk: mivel a kifizetésvektor az egységvektor, ezért a várható érték az adott állapot valószínűsége: így az AD ár az állapotvalószínűség diszkontált értéke.

Az Arrow-Debreu modell a kerete az előbb felvázolt gondolatmenetnek. Azonban mi egy tetszőleges termék több periódus utáni lehetséges állapotaihoz rendelt komponensáraiból raktuk össze a termék jelenbeni árát,[23] az AD modell alapesetben egy 1 periódusos elemzés, amelyben N értékpapír jelenbeni árait a p vektor tartalmazza, a periódus végi lehetséges állapotokat az ($N \times M$-es) V mátrix. A p vektor és a V mátrix minden információt tartalmaz, az értékpapírpiac minden jellemzőjét lineáris algebrai tételekből kapjuk a probléma ilyen megfogalmazásában. Az AD modellben a piac akkor és csak akkor *arbitrázsmentes, ha a p árvektor a V oszlopvektorainak súlyozott átlaga, ahol a súlyok pozitívak* és egyértelműen meghatározottak.[24] Amennyiben a V mátrixnak van egy olyan sora, amely azonos elemekből áll, akkor van egy kockázatmentes befektetési lehetőség. Ez esetben, ha teljesül az a feltétel, hogy az árvektor az oszlopvektorok súlyozott átlaga (tehát nincs arbitrázslehetőség), akkor az árvektor kifejezhető a várható érték jelenérték szabály alapján. Az AD modellben az arbitrázsmentességből és a korlátlan hitel/betét lehetőségből következik a kockázatsemleges valószínűségek vektorának létezése és a várható érték jelenérték szabály.[25] Az illusztráció kedvéért legyen $N = 2$, $M = 2$ és

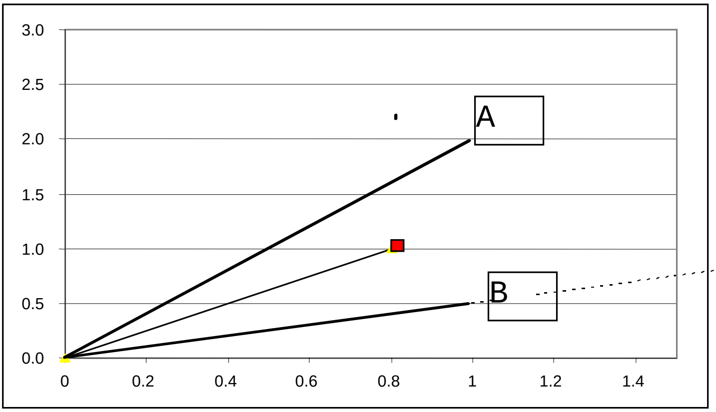
$$p = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a súlyok: $\pi = (\,0.4 \quad 0.4\,)$, a kamatláb 25%, és a kockázatsemleges valószínűségek: $\pi' = (\,0.5 \quad 0.5\,)$.

[23] A (22) összegképlet tagjainak első két komponensét összezárójeleztük: $e^{-rT} p_k g_k = \left(e^{-rT} p_k\right) g_k = AD_k g_k$.

[24] A bizonyítást ld. Avellaneda-Laurence (2000) 3–5. o.

[25] Uo. 6–8. o.



2. ábra. Az Arrow-Debreu modell két termékre és két állapotra

A *2. ábrán* a vízszintes tengelyen az 1. termék, a függőleges tengelyen a 2. termék lehetséges értékei szerepelnek. A V mátrix egyes oszlopait az ábra (A, B) pontjai reprezentálják. Az arbitrázsmentesség feltétele, hogy az árvektor a $0A$, $0B$ félegyenesek közötti területre essen. Az ábrán a két pont azonos függőleges egyenesen fekszik, mert az 1. termék kockázatmentes. Ennek ára (0.8) meghatározza, hogy az árvektor mely függőleges egyenesre essen (P pont).

Külön kihangsúlyozandó, hogy az AD modellben semmi valószínűségszámítási feltétel nincsen, semmi a normális eloszlásról, vagy a Wiener-folyamat binomiális közelítéséről stb.

A piac teljessége

Tegyük fel, hogy a V $(N \times M)$ mátrix sorai az N kereskedett értékpapír lehetséges értékeit tartalmazza az 1 periódus múlvai M lehetséges állapotokra. A piacot[26] akkor nevezik teljesnek, ha tetszőleges (M elemű) kifizetés előállítható a kereskedett papírokból álló portfólió segítségével, azaz tetszőleges M elemű vektor előállítható a V mátrix soraiból. Ez akkor teljesül, ha a V mátrix rangja M. Ha van egy kockázatos részvényünk és egy kockázatmentes kötvényünk, és a részvény árfolyam-alakulását egy trinomiális fa írja le, akkor a V mátrixunk 2×3-as mátrix és a piac nem teljes.

Ha a piac teljes és arbitrázsmentes, akkor léteznek és egyértelműek az állapotárak (komponensárak), és ily módon a kockázatsemleges valószínűségek.[27] A tétel megfordítása is igaz: ha a komponensárak egyértelműek, akkor a piac (modell) teljes.[28]

[26] Az elnevezési konvenció a *piac* teljességéről beszél, azonban sokkal inkább valamely *modell* teljességéről van szó, mint egy létező piac (pl. argentin értékpapírpiac) teljességéről. Vö. binomiális vs. trinomiális modell.

[27] A trinomiális modellben találhatók kockázatsemleges valószínűségek, de nem egyértelműek. Ld. Avellaneda-Laurence 16-18. o.

[28] Bizonyítást ld. Avellaneda-Laurence 15. o.

Harrison és Pliska vizsgálta meg általánosan, hogy miként függ össze

- a *piacok teljessége* (replikálhatóság),
- az *árak összhangja* (arbitrázsmentesség),
- a *martingálmérték* létezése és egyértelműsége (kockázatsemleges értékelés).

Az eszközárazás alaptétele:

1. A piac akkor és csak akkor *arbitrázsmentes*, ha *létezik* martingálmérték
2. A piac akkor és csak akkor *teljes*, ha ez a martingálmérték *egyértelmű*.

Az alaptétel különböző esetekre vonatkozó változatai a *Harrison-Pliska tétel*, a *Dalang-Morton-Willinger tétel*, ill. a *Delbaen-Schachermayer tétel*.[29]

A nem-teljes piacok alapesete, amikor maga az *alaptermék nem* egy *kereskedett* befektetési eszköz. Befektetési eszköz —traded security— olyan termék, amelyet kizárólag befektetési célból tart számos befektető. Ezek jellemzője, hogy ugyanúgy lehet short pozíciót nyitni bennük, mint long pozíciót, viszonylag alacsony a tranzakciós és tárolási költségük, többnyire könnyen transzferálhatóak. Az olajnak van ugyan ára, de az ármeghatározódása nagyon eltérő mechanizmusú, mint a befektetési eszközöké. *Az olaj határidős ára nem egyszerűen az azonnali olajár felkamatoztatott értéke* (még akkor se, ha figyelembe vesszük a tárolási stb. költségeket). Ugyanakkor az azonnali ár *befolyásolja* valahogy azoknak a befektetési eszközöknek az értékét —ha nem is határozza meg egyértelműen a kamatlábbal együtt— amelyek ára az olajon alapszik (pl. olajra szóló futures kontraktus és vételi jog).

A kockázat piaci ára

Tegyük fel, hogy egy nem kereskedett termék árfolyam-alakulása Ito-folyamat. Az erre szóló származtatott termékek árfolyam-alakulása ugyanezt az időbeli bizonytalanságot tükrözi, ezért a kockázat kiküszöbölhető. Ám ebben a kockázatmentes portfólióban két ismeretlen árú származtatott termék szerepel, két ismeretlen van, és egy egyenlet. Ezért a származtatott termékek ára nem egyértelmű, de ha már ismerjük akárcsak egyetlen származtatott termék árát, akkor ismerjük az összes többit. Ennek hiányában a különböző származtatott termékek árának konzisztencia kritériuma:[30]

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{35}$$

értéknek azonosnak kell lenni minden származtatott termékre. A λ szokásos elnevezése: *a kockázat piaci ára*. Ha az alaptermék kereskedett, akkor $\lambda = 0$.

[29] A különböző megközelítések között lényeges különbség, hogy a vizsgált folyamat időben diszkrét vagy folytonos, és a lehetséges árfolyamokra nézve a folyamat diszkrét vagy folytonos. Részletesebben ld. Medvegyev (2002). A szerző itt az alaptétel általa vizsgált esetének egy új bizonyítását adja.

[30] Részletesen ld: Hull (1999.) 365. o.

Ha ismerjük a λ értékét (amit tudnánk, ha ismernénk a befektetők kockázattal kapcsolatos hasznossági függvényét), akkor tudjuk a származtatott termék értékét is. Megszabadulunk a λ meghatározásának nehézségétől, ha például nem csak az olaj árát ismerjük, hanem kiindulópontként ismerjük a határidős olajárat, és ez alapján akarunk beárazni egy olajra szóló opciót. A legfontosabb nem kereskedett pénzügyi termék a *kamatláb*. A kötvény egy kereskedett termék, de a hozama nem.

Egzotikus opciók

Említettük, hogy egy származtatott termék beárazása attól függ, hogy mi a termék definíciója (kifizetése) és mi az alapfolyamat jellege. A legegyszerűbb eset: a T-termék + GBM alapfolyamat konstans kamatlábbal és volatilitással. Nézzük előbb a különböző termék definíciókat, az alapfolyamat kicserélésének a hatását pedig a következő alpontban.

Az *amerikai opcióknál* a T időpontig bármikor lehívható az opció, nem csak a T időpontban, mint az európai opció. Értékelésére nincs zárt formula, a probléma matematikailag izgalmasnak számít, numerikusan viszont igen egyszerű algoritmus használatos: ugyanúgy kell elkészíteni a fát, de minden pontjában meg kell vizsgálni, hogy az azonnali lehívás nem jelentene-e nagyobb értéket, ha igen, akkor ezzel az értékkel kell tovább számolni lépésenként a várható érték jelenértéke szabály alapján. Az amerikai opciók még nem számítanak egzotikusnak, annál is inkább, mert legalább annyira elterjedtek, mint az európaiak.

A T-termékek esetén meg kell tudni mondani, hogy a kockázatsemleges (martingál) valószínűséggel számolva mi a T időpontbeli árfolyam eloszlása. A GBM folyamat elég egyszerű ahhoz, hogy meg lehessen mondani nem csak az S árfolyam eloszlását a T időpontban, hanem a $[0, T]$ időszak *átlagárfolyamának* az eloszlását, az időszak *maximum*, vagy *minimum* árfolyamának eloszlását, azt, hogy milyen valószínűséggel lép át ez idő alatt az S folyamat egy adott *küszöbárfolyamot*[31] stb. Az így transzformált változók alapján definiált származtatott termékeket nevezik egzotikus opcióknak. Ha rendszeresen (pl. hetente) szerzünk be valamely termékből 1 éven át, akkor az 1 év múlvai árfolyam eloszlásánál sokkal fontosabb az év alatti átlagárfolyam eloszlása.[32] Bevezetve

$$I(t) = \int_0^t S(\tau)\, d\tau \tag{36}$$

állapotváltozót, azon származtatott termék értéke, amelyek értéke függ ettől

[31] Az átlagárfolyam eloszlása az ázsiai, a maximum (minimum) eloszlása a visszatekintő opció (lookback), adott küszöbárfolyam eloszlása a limitáras (barrier) opció árazásában játszik szerepet. A visszatekintő opció felfogható úgy is, mint egy olyan amerikai opció, amit garantált, hogy jó időpontban hívunk le, mivel az időszak végén már tudjuk, hogy mi volt a legkedvezőbb árfolyam.

[32] Ez az átlag lehet aritmetikai vagy geometriai, folytonos mintavétellel, vagy időközönkénti mintából számolt.

a mennyiségtől is, eleget kell, hogy tegyen a

$$g_t = rg - rSg_S - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 g_{SS} - Sg_I \tag{37}$$

módosított Black-Scholes egyenletnek.

Az európai call opció két egzotikus opció különbségeként is felírható:

1. ingyen kapunk egy részvényt, ha az árfolyam nagyobb, mint K (long asset or nothing option)
2. fizetünk K dollárt, ha az árfolyam nagyobb, mint K (short cash or nothing option)

Az utóbbit szokás bináris, vagy digitális opciónak is nevezni. Mindkét opció értékében ugrás van a T időpontbeli értékében, így nehéz fedezni ATM esetben, közel a lejárathoz. A két opció értéke nem más, mint a (10)-es képlet két tagja, ami intuitive jól érthető.

Átlaghoz visszahúzás, ugrófolyamat

Az alap GBM folyamattal kapcsolatban legkönnyebben a *konstans kamatláb* feltevés oldható fel. Ha a kamatláb időben előrelátható, determinisztikus módon változik,[33] akkor a (26b) képletben mindössze a diszkonttényező változik, az $e^{-r(T-t)}$ helyére a

$$e^{-\int_t^T r(\tau)\,d\tau} \tag{38}$$

kifejezés kerül, determinisztikusan változó volatilitás esetén a $\sigma^2(T-t)$ helyére pedig az

$$\int_t^T \sigma^2(\tau)\,d\tau \tag{39}$$

kifejezés.

Fák használatakor az u, d, p paraméterek lépésről lépésre változhatnak (a választott modelltől függően), és minden lépésben más és más lesz a pillanatnyi kamatlábat tükrözően a diszkontfaktor. Az időben *változó volatilitás* diszkrét esetben már több problémát tud okozni, hiszen a változó u és d paraméterek mellett a binomiális fa csak akkor marad összeölelkező, ha $u_1 d_2 = d_1 u_2$ feltétel teljesül (ahol az indexek az egymást követő időszakokra utalnak). A változó volatilitás éppen azt jelenti, hogy a fák egyes oszlopait eltérő módon húzzuk szét függőlegesen. Annak érdekében, hogy a fák összeölelkezők maradjanak (ami lényegesen kevesebb számolást igényel), inkább a sztenderd Δt időbeli lépésközt célszerű változtatni.[34]

[33] A sztochasztikus kamatláb és volatilitás esetét ld. később, a több kockázati faktor tárgyalásakor.

[34] Részletesebben ld. Clewlow-Strickland 37. o.

Két gyakran alkalmazott lényeges módosítás az alapfolyamaton az átlaghoz visszahúzás (mean reversion) ill. az ugrások (jump process) bevezetése. Az *átlaghoz visszahúzás* a drift módosítása:

$$dx = a(b - x)dt + \sigma dW \ , \tag{40}$$

ahol a b az X változó hosszú távú értéke.[35] A matematikában Orstein-Uhlenbeck néven ismert (40) folyamatot mindenekelőtt a kamatlábak alakulásának leírásához használják — ekkor a b a kamatláb hosszú távú egyensúlyi értéke. A (40) egyenlethez tartozó folyamat értékei pozitív valószínűséggel vesz fel negatív értékeket. Ez küszöbölődik ki az ún. négyzetgyök folyamatnál *(square root process)*:

$$dx = a(b - x)dt + \sigma\sqrt{x}\, dW \ . \tag{41}$$

Az *ugrófolyamatnál* véletlen időpontokban meghatározott nagyságú ugrásokra kerül sor. Ezekről az ugrásokról azt szokták feltenni, hogy Poisson-folyamatot alkotnak, tehát a két ugrás között eltelt idő exponenciális eloszlású. A kevert modellben (jump-diffusion) már két kockázati forrás van, ekkor az ugrás fedezésére nincs mód, ami számos problémát vet fel.

A Heath-Jarrow-Morton modell

Először nézzük meg a rövid és hosszú kamatlábak változásainak, ill. a kumulált kamatlábak és a kötvény árfolyamok változásainak az összefüggését egy diszkrét számpéldán.

A logkamatlábak esetén az azonnali és a határidős kamatlábak közötti összefüggés:

$$G_n = e^{f_1} e^{f_2} \cdots e^{f_n} = e^{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = e^{n r_n} \ , \tag{42}$$

amiből:

$$r_n = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} \ , \tag{43}$$

ahol G_n mutatja, hogy n periódus alatt hányszorosára növekedett az egységnyi betét értéke. Az elemi kötvény (zero coupon bond) árfolyama a határidős logkamatlábakkal:

$$P_n = e^{-(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)\Delta t} = e^{-\sum f \Delta t} \ . \tag{44}$$

A $\sum f$ kifejezés a kötvény lejáratáig hátralevő időszak *kamattartalma*, egyben a *lejáratig hátralevő kumulált hozam* $Y(t,T) = f = \ln P_n$.

A kamatlábfáknál fontos szerepe van az *egy periódusra vonatkozó kamatlábnak*, amit rövid kamatlábnak (short rate) neveznek. Legyen ennek értéke a t időpontban $r(t)$. A folytonos modelleknél a periódushossz $\Delta t \to 0$. Jelölje $P(t,T)$ a T időpontban esedékes 1 Ft értékű elemi kötvény árfolyamát

[35] A drift előjele jól látható módon attól függ, hogy a folyamat éppen alatta vagy felette van-e a hosszú távú értéknek.

a t időpontban. Legyen az $f(t, T_1, T_2)$ a $[T_1, T_2]$ időszakra vonatkozó, a t időpontban rögzített határidős kamatláb. Legyen az $f(t, T)$ a $[T, T + \Delta t]$ időszakra vonatkozó, a t időpontban rögzített határidős kamatláb. Ez tehát egy későbbi időszakra vonatkozó 1 periódusos kamatlábat jelöl. Az *1. táblázatban* függőlegesen a lejáratok vannak, vízszintesen a naptári idő telik. Az $Y(t, T)$ a forward kamatlábak lejárat szerinti kumulált értékeit mutatja: induláskor 4 évre összesen 46% kamat esedékes.

Az $r(t, T) = Y(t, T)/T$ a hosszabb futamidejű azonnali kamatlábakat adja. Induláskor a 4 éves kamatláb $46\%/4 = 11.5\%$. A mindenkori n éves kamatlábat ebben táblában átlósan lefelé haladva lehet nyomon követni a $T + \Delta t - t = n$ értékek mentén, hasonlóképpen a mindenkor éppen n éves kötvények árfolyamához. A mindenkori rövid kamatlábak a bal felső sarok főátlójában vannak $r(t) = f(t, t)$. A központi szerepet játszó résztábla a *kumulált kamat* $Y(t, T)$ — igazából ennek a tükörképe a másik 3 tábla. Amit a portfólióba be lehet tenni, azok a $P(t, T)$ kötvények. Amiről az újságok írnak, az az $r(t, T)$ hozamgörbe alakulása.

r(t)	**10.0%**	**12.0%**	**11.0%**	**12.0%**	
f(t,T)	1	2	3	4	**t**
1	**10.0%**				
2	11.0%	**12.0%**			
3	12.0%	13.0%	**11.0%**		
4	13.0%	14.0%	12.0%	**12.0%**	
T					

d r(t)		**2.0%**	**-1.0%**	**1.0%**
d f(t,T)	1	2	3	4
1	dT	dt		
2	*1.0%*	1.0%		
3	*1.0%*	1.0%	-2.0%	
4	*1.0%*	1.0%	-2.0%	0.0%
T				

Y(t,T)	1	2	3	4
1	**10.0%**			
2	21.0%	**12.0%**		
3	33.0%	25.0%	**11.0%**	
4	46.0%	39.0%	23.0%	**12.0%**

d Y(t,T)	1	2	3	4
2		1.0%		
3		2.0%	-2.0%	
4		3.0%	-4.0%	0.0%

P(t,T)	1	2	3	4
1	**0.905**	**1.0**		
2	0.811	**0.887**	**1.0**	
3	0.719	0.779	**0.896**	**1.0**
4	0.631	0.677	0.795	**0.887**

dP/P	1	2	3	4
1	**0.100**			
2	0.090	**0.120**		
3	0.080	0.140	**0.110**	
4	0.070	0.160	0.110	**0.120**

r(t,T)	1	2	3	4
1	**10.0%**			
2	10.5%	**12.0%**		
3	11.0%	12.5%	**11.0%**	
4	11.5%	13.0%	11.5%	**12.0%**

d r(t,T)	1	2	3	4
1				
2		1.5%		
3		1.5%	-1.5%	
4		1.5%	-1.5%	0.5%

1. táblázat. Forward kamatlábak, kumulált kamatlábak, hosszú kamatlábak, kötvény árfolyamok

Miután felvázoltuk az $r(t)$, $f(t, T)$, $Y(t, T)$, $r(t, T)$, $P(t, T)$ kapcsolatát, és ezek változásainak kapcsolatát, bontsuk meg a változásokat determinisztikus és sztochasztikus részre. A kiindulópont legyen a forward kamatlábak változása, ami folytonos esetben:

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW \ . \tag{45}$$

Heath, Jarrow és Morton vizsgálták a *forward kamatlábak dinamikáját* és alapvető megállapítást tettek a (45) egyenlet driftje és volatilitása közötti szükségszerű kapcsolatról a kockázatsemleges elemzés keretei között.

A kötvények árfolyam-alakulásának vizsgálatakor kiemelkedő fontosságú az az eset, amikor annyi különböző lejáratú kötvény van, hogy minden periódus végén van lejáró kötvény.[36] Ekkor minden t időpontban van tetszőleges T időponttól kezdődő 1 periódusos határidős kamatláb. Ha ismerjük a kötvények árfolyamának alakulását, és azok Ito-folyamatot követnek, akkor adott a határidős kamatlábak alakulásának a folyamata is.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + v(t,T)dW\,, \qquad v(t,t) = 0\,, \tag{46}$$

$$P(t,T_2) = P(t,T_1)e^{-f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}\,, \tag{47}$$

$$f(t,T_1,T_2) = \frac{\ln P(t,T_1) - \ln P(t,T_2)}{T_2 - T_1}\,. \tag{47b}$$

Az Ito lemma segítségével:

$$d\ln P(t,T_1) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v^2(t,T_1)\right)dt + v(t,T_1)\,dW\,, \tag{48}$$

$$d\ln P(t,T_2) = \left(r(t) - \frac{1}{2}v^2(t,T_2)\right)dt + v(t,T_2)\,dW\,, \tag{49}$$

$$df(t,T_1,T_2) = \frac{1}{2}\frac{v^2(t,T_2) - v^2(t,T_1)}{T_2 - T_1}dt - \frac{v(t,T_2) - v(t,T_1)}{T_2 - T_1}dW\,. \tag{50}$$

A $T_2 \to T_1$ határátmenet révén:

$$df(t,T) = v(t,T)v_T(t,T)\,dt - v_T(t,T)\,dW\,, \tag{51}$$

$$v(t,T) = v(t,T) - v(t,t) = \int_t^T v_T(t,u)\,du \qquad v(t,t) = 0\,. \tag{52}$$

Ha α és σ jelöli a forward kamatláb alakulásának együtthatóit, akkor az (51) alapján:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW\,. \tag{53}$$

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du\,. \tag{54}$$

A levezetés tartalma:

– a határidős kamatláb két „szomszédos” elemi kötvény kamattartalmának a különbsége (47)
– ha ismerjük a kötvény árfolyam változását (46), akkor ismerjük a kamattartalom változását is az Ito-lemma segítségével (48)–(49)
– az (54) formából kiolvasható, hogy *a forward kamatláb driftjét egyértelműen meghatározza a volatilitás szerkezet.*

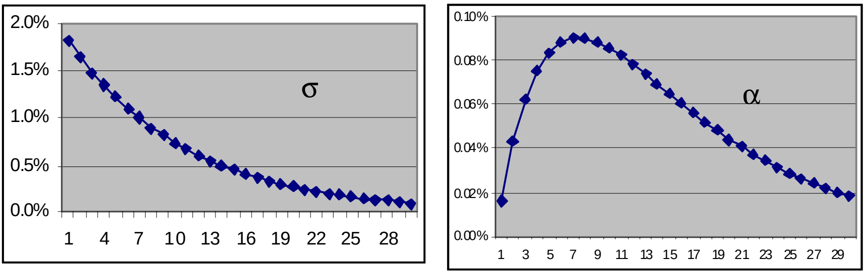
[36] Ez folytonos esetben kontinuum sok kötvényt jelent.

Az (54) formula a HJM modell és egyben a modern kamatelmélet egyik központi állítása: *a különböző futamidejű kamatlábak alakulásának konzisztencia (no-arbitrage) feltételét* fogalmazza meg. Egyik triviális olvasata, ha tökéletes előrelátás van ($\sigma(t,T) = 0$ minden T-re), akkor a forward kamatláb adott T időpontra nézve időben konstans (az $\alpha(t,T) = 0$ minden T-re).

A *forward kamatlábak volatilitás szerkezetére* szokásos feltevés, hogy

$$\sigma(t,T) = \sigma(T-t) = \sigma e^{-\lambda(T-t)} \,, \tag{55}$$

ahol a λ a *volatilitás csökkenés faktor* (volatility reduction factor).



3. ábra. A forward kamatláb alakulásának volatilitása $[\sigma(T)]$ és driftje $[\alpha(T)]$ adott volatilitás csökkenés faktor mellett ($\lambda = 0.1$, $\sigma = 2\%$) a lejárat (T) függvényében

Az *elemi kötvény* árfolyam-alakulása megadja az 1 periódusos forward kamatlábak alakulását, és megfordítva: ha ismerjük a kötvény kamattartalmát adó komponensek változásait, akkor tudjuk annak az összegének a változását, ill. az összeg logaritmusának változását. A forward kamatláb dinamika egyértelműen megadja a mindenkori *rövid kamatláb* dinamikáját, hiszen

$$r(t) = f(t,t) \,. \tag{56}$$

A *rövid kamatláb, a forward kamatláb, az elemi kötvény árfolyam* alakulását leíró (57)-(59) egyenletek bármelyike lehet az elemzés kiinduló pontja, bármelyikből megkapható a másik kettő.[37]

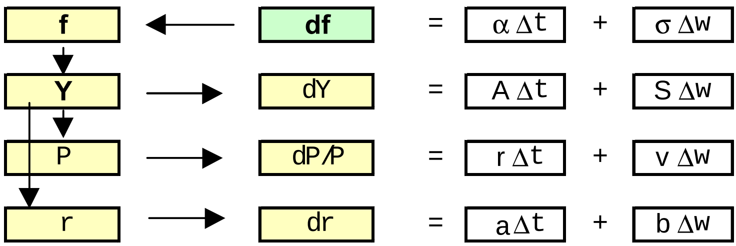
$$dr(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW \qquad \text{short rate} \tag{57}$$

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW \qquad \text{forward rate} \tag{58}$$

$$dP(t,T) = P(t,T)m(t,T)\,dt + P(t,T)v(t,T)\,dW \qquad \text{bond price} \tag{59}$$

$$r(t) = f(t,t)\,, \qquad m(t,T) = r(t) \,. \tag{60}$$

[37] Részletesebben és a levezetéseket illetően ld. pl. Björk . Az a, b vektorokból csak kiegészítő információkkal kapható meg az α és σ matrix, de a fordított irányban az összefüggés teljesen egyértelmű.



2. táblázat. A forward kamatláb és a kötvény árfolyam alakulásának komponensei

Vizsgáljuk meg sztochasztikus kamatlábak mellett a *változó kamatozású elemi betét* értékének és a T időpontban lejáró *elemi kötvény* árfolyamának alakulását. Elemi betét: egységnyi induló összeg kamatozik a T időpontig, eközben nincs kivétel és pótlólagos betételhelyezés. Az elemi betét értéke a t időpontban a $[0,T]$ időszak már mögöttünk levő periódusai rövid kamatainak az összegét tükrözi, az elemi kötvény a még előttünk levő periódusok forward kamatainak az összegét.

Kockázatsemleges világban a két terméknek azonos várható hozamot kell biztosítani minden periódusban: az éppen aktuális rövid kamatlábat. Ha a várható növekedési ütemük azonos, akkor a két termék értékének a hányadosát képezve $[P(t,T)/A(t)]$, annak várható értéke a pillanatnyi értékével kell, hogy megegyezzen. Más szavakkal, a hányados egy martingál jellegű sztochasztikus folyamat. Mindkét termék értékét minden időpontra az induló forward görbe és a forward kamatlábak változásainak a segítségével írjuk fel.

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_s \Delta f(s,T) = f(0,T) + \sum_s \alpha(s,T)\Delta t + \sum_s \sigma(s,T)\Delta W(s) \tag{61}$$

Az elemi betét alakulása $\quad u: 0 \to t \quad s: 0 \to u$; $\quad s: 0 \to t \quad u: s \to t$

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \sum_s \alpha(s,t)\Delta t + \sum_s \sigma(s,t)\Delta W(s) \tag{62}$$

$$A(t) = 1e^{\sum r(u)\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \ln A(t) = \sum_u r(u)\Delta t = \sum_{u=0}^{t-\Delta t} f(0,u)\Delta t + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{t-\Delta t}\alpha(s,u)\Delta t\right)\Delta t + \\ + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{t-\Delta t}\sigma(s,u)\Delta t\right)\Delta W(s)\,. \end{aligned} \tag{63}$$

Az elemi kötvény árfolyam-alakulása $\quad u: t \to T \quad s: 0 \to t$; $\quad s: 0 \to t \quad u: t \to T$

$$P(t,T) = 1e^{-\sum_u f(t,u)\Delta t} \qquad P(T,T) = 1 \tag{64}$$

$$\ln P(t,T) = -Y(t,T) = -\sum_{u=t}^{T-\Delta t} f(t,u)\Delta t$$

$$\begin{aligned} Y(t,T) = \sum_{u=t}^{T-\Delta t} f(0,u)\Delta t + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=t}^{T-\Delta t}\alpha(s,u)\Delta t\right)\Delta t + \\ + \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=t}^{T-\Delta t}\sigma(s,u)\Delta t\right)\Delta W(s) \end{aligned} \tag{65}$$

A diszkontált elemi kötvény alakulása

$$\begin{array}{ll} s:0\to t & u:s\to t \\ s:0\to t & u:t\to T \\ \hline s:0\to t & u:s\to T \end{array}$$

$$\frac{P(t,T)}{A(t)} = P(0,T)e^{-\sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{T-\Delta t}\alpha(s,u)\Delta t\right)\Delta t - \sum_{s=0}^{t-\Delta t}\left(\sum_{u=s}^{T-\Delta t}\sigma(s,u)\Delta t\right)\Delta W(s)} \tag{66}$$

$$\frac{P(t,T)}{A(t)} = \frac{e^{-(f_t+f_{t+1}+\cdots+f_{T-1})}}{e^{f_0+f_{t+1}+\cdots+f_{t-1}}} = e^{-(f_0+f_1+\cdots+f_{T-1})}\,, \tag{67}$$

ahol a szóban forgó forward kamatlábak a t időpontra kialakult értékeket jelentik.

Az elemi kötvény árfolyam-alakulása akkor és csak akkor arbitrázsmentes, ha a $P(t,T)/A(t)$ a kockázatsemleges valószínűség mellett

$$P(0,T) = \mathbf{E}_Q[P(t,T)/A(t)]$$

minden T-re. Ez akkor teljesül, ha a (66) képletben az induló árfolyam szorzótényezőjének várható értéke 1. Belátható, hogy ez pont akkor teljesül, ha fennáll a HJM drift feltétele.[38]

A (66)-(67) képletek sajátossága, hogy itt a viszonyítási alapot jelentő $A(t)$ betét alakulása maga is egy sztochasztikus folyamat. A közgazdaságtanban a pénz jelenti a stabil összehasonlítási alapot a sokszínű áruvilágban (numeraire, ha egyáltalán belefér az adott közgazdasági iskola érvrendszerébe), a betét alakulása a pénz dinamikája, ennek sztochasztikus változatát láttuk most kulcsszerepben.

A Ho-Lee, Hull-White modellek

A HJM elemzés általános feltételek között vizsgálja a jövőbeni rögzített időszakokra vonatkozó forward kamatlábak változásainak hatásait. Ha specifikáljuk a forward kamatlábak volatilitás struktúráját, akkor a mindenkori

[38] A levezetést ld. Jarrow-Turnbull (2000).

rövid kamatlábak dinamikájára konkrét összefüggéseket kapunk. A *Ho-Lee modellnek* nevezett

$$dr = b(t)dt + \sigma dw \tag{68}$$

rövid kamatláb modellben minden forward kamatláb volatilitása azonos (σ). Az (55) képletben definiált volatilitás struktúra felel meg a *Hull-White modellnek* nevezett

$$dr = a\left[b(t)/a - r\right]dt + \sigma dw \tag{69}$$

kamatláb-alakulásnak. Az a paraméter az átlaghoz visszahúzás erősségét mutatja, egyben az (55) képlet volatilitáscsökkenés faktora is (λ). Az $a = 0$ esetre a (68) a (69) speciális esete. A $b(t) = b$ esetben a klasszikus, úttörő jellegű kamatláb modellt, a *Vasicek modellt* kapjuk.[39]

Valamilyen oknál fogva az olyan modelleket, amelyekben csak 2-3 paraméter van (pl. a Vasicek modell) *egyensúlyi* (equilibrium) modelleknek nevezik, amelyben valamely paraméter az idő függvénye (pl. Hull-White), azokat pedig *arbitrázsmentes* (no arbitrage) modelleknek.[40]

Anélkül, hogy akár felszínesen is átszaladnánk a számtalan kamatláb modell közül legalább a népszerűeken, inkább egy számpéldán érzékeltetjük a korábban elmondottak (mindenekelőtt a komponensárak) használatát a kamatláb-alakulás modellezésében.

Tegyük fel, hogy az 1-3 éves elemi kötvény árfolyamok rendre: $P_1 = 0.9$, $P_2 = 0.8$, $P_3 = 0.7$, és a forward kamatlábak volatilitása minden időszakra 1.5%. Milyen binomiális kamatlábfa írja az 1 éves logkamatlábak lehetséges alakulását, amely megfelel az elemi kötvény árfolyamokból számított hozamgörbének? Készítsünk EXCEL táblát, amely elkészíti az induló paraméterekhez tartozó binomiális kamatlábfát, az ehhez tartozó komponensárakat, ezek oszlopösszegeként az elemi kötvény árfolyamokat, ezekből a hozamgörbe értékeit. Legyen az induló kamatláb 10%, legyen $b(t) = b = 1.5\%$.

[39]Ez pontosan a (40)-es egyenlet, ahol az x jelentése a rövid kamatláb. A (41)-es képlet, mint kamatláb modell a Cox-Ingersoll-Ross (CIR) modell nevet viseli.

[40]Véleményünk szerint az elsőnek sincs több köze az egyensúlyhoz, és a másodiknak se az arbitrázsmentességhez, csupán az a különbség, hogy a kevés paraméteres modelleket nem lehet pontosan hozzáilleszteni a pillanatnyi hozamgörbéhez, a sok paramétereset pedig gond nélkül lehet. A kérdés ezen paraméterek időbeli stabilitása, és könnyen megtörténhet, hogy a modell idővel rohamosan veszít leíró erejéből a régi kalibrálás mellett.

t	0	1	2	3
b			**1.5%**	**1.5%**
σ			**1.5%**	**1.5%**
				16.00%
			13.00%	13.00%
r1		**10.00%**	10.00%	10.00%
3				0.087
2			0.201	0.267
1		0.455	0.408	0.274
0	1	0.455	0.207	0.094
P	1.0	**0.909**	**0.815**	**0.722**
G	1.0	1.1000	1.2263	1.3850
spot		10.00%	10.74%	11.47%

3. táblázat. A megadott kamatlábfához tartozó hozamgörbe

A SOLVER segítségével módosítathatjuk a $b(t)$ értékeket és az induló kamatlábat úgy, hogy a P vektor értékeiként a megadott számok jöjjenek ki.

t	0	1	2	3
b			**-0.09%**	**0.33%**
σ			1.5%	1.5%
				17.35%
			14.02%	**14.35%**
r1		**11.11%**	**11.02%**	**11.35%**
3				0.084
2			0.197	0.259
1		0.450	0.400	0.266
0	1	0.450	0.203	0.091
P	1.0	**0.900**	**0.800**	**0.700**
G	1.0	1.1111	1.2500	1.4286
spot		11.11%	11.80%	12.62%

4. táblázat. A keresett kamatlábfa

A 3 éves 12.62% kamatláb a kamatlábfában található összes lehetséges 1 éves kamatláb súlyozott átlaga, ahol a súlyozási procedúrát a komponensárak számítása jelenti.

Az átlaghoz visszahúzó Hull-White modellhez tartozó fa, egy megnyírt trinomiális fa. A megnyírás azt jelenti, hogy van egy minimum és maximum kamatláb, és ezeken a határokon nem lép át a folyamat. A megnyírt szakasz szélső pontjaiból is 3 felé ágazik a fa, de két ág a fa belseje felé mutat, és ezeken a pontokon mások az átmenet-valószínűségek, mint a fa belsejében. Az adott fához ez esetben is egyszerűen a komponensárak kiszámításán és az elemi kötvény árfolyamokon keresztül jutunk el a hozamgörbéhez. A fordított irányban itt is általában az iteráció segíthet (amikor adott hozamgörbéhez keressük a megfelelő kamatlábfát).

Több kockázati faktor

Ha egynél több kockázatos termékünk van, akkor ez több kockázati faktort is jelent. Speciális kockázatos termék a devizaárfolyam, vagy a kötvény árfolyama sztochasztikus kamatláb esetén.[41] Egyetlen kockázatos termék esetén is lehet két kockázati faktorunk, mindenekelőtt, ha sztochasztikus a volatilitás.[42]

A folytonos modelleknél minden úgy működik, mint régen, csak nem 1 db, hanem n db korrelált Wiener-folyamatunk van.[43] Továbbra is igaz, hogy ha n db kockázatos termékünk van, amit n db Wiener-folyamat hajt meg,[44] akkor a kockázat kiküszöbölhető, és a replikálás átfogalmazható a várható érték jelenérték szabállyá, ahol a kockázatsemleges valószínűséggel kell a várható értéket számolni, és a kockázatmentes kamatlábbal kell diszkontálni. A delta hedge úgy működik, hogy a származtatott termékből létesített rövid pozíciót az alaptermékekből folyamatosan akkora nagyságú hosszú pozíciókkal kell egyensúlyozni, amekkora az adott árfolyam szerinti érzékenysége a portfóliónak. Az egy kockázatos termékre felírt (8) egyenlet több alaptermékes változata:[45]

$$dV = \left(g_t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j g_{S_i S_j} \right) dt = V r \, dt \ , \tag{8a}$$

és innen a többfaktoros Black-Scholes egyenlet:

$$g_t = rg - r \sum_{i=1}^{n} S_i g_{S_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} S_i S_j g_{S_i S_j} \ . \tag{9a}$$

[41] Az 1 periódusos betét sztochasztikus kamatláb mellett is kockázatmentes termék.

[42] Ezekről a modellekről ad áttekintést magyar nyelven Zsembery [1999]

[43] A korábbi $[dW]^2 = dt$ hüvelykujjszabályunk a $dW_i dW_j = \rho_{ij} dt$ szabállyá általánosodik, és a többváltozós Ito-lemmát kell használni.

[44] Az olyan származtatott termékeket, amely több alaptermék függvénye, basket option vagy rainbow option névvel illetik.

[45] Ahol $g_{S_i S_j} = \frac{\partial g}{\partial S_i \partial S_j}$.

A *csereopciók* két kockázatos eszköz meghatározott arányban történő elcserélésére vonatkoznak a majdani T időpontban. A két termék árfolyamalakulása:

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dW_i\,, \quad i = 1,2\,; \qquad dW_1 dW_2 = \rho\,. \tag{5a}$$

Az (9a) egyenlet megoldása a

$$\max(q_1 S_1 - q_2 S_2, 0) \tag{70}$$

feltétel mellett:

$$c(S_1, S_2, t) = q_1 S_1 N(d_1) - q_2 S_2 N(d_2)\,, \tag{10a}$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln \frac{q_1 S_1}{q_2 S_2} + \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\,, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,, \qquad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\,.$$

Amennyiben a $\sigma_2 = 0$, akkor az összefüggés a Black-Scholes képletre egyszerűsödik, hisz ekkor az egyik eszköz a kockázatmentes befektetés. Mivel a feladat két GBM távolságáról szól, nem teljesen meglepő, hogy a kapott formula ennyire emlékeztet a BS képletre.

A csereopciók egy fontos esete, amikor egy kockázatos eszközt egy más devizában rögzített fix összegre cserélünk (forward) vagy cserélhetünk (opció). Ezeket *quantóknak* nevezik. Amennyiben konstans kamatláb mellett két kockázatos termékre külön-külön felírjuk a binomiális modellt mint közelítést, akkor egy lépés után négy lehetséges állapotunk van, és nem tudunk egyértelmű replikációs stratégiát felírni. *Hua He* javasolt egy eljárást,[46] amelyben ha M kockázati faktorunk van, akkor egy $M+1$ irányba ágazó fával leírva az alaptermékek árfolyam-alakulását, így tudunk replikáló stratégiát felírni. E fa minden pontjához az alaptermékek egy n elemű árvektor tartozik. Az átmenet-valószínűség minden pontba $1/M$. Két kockázatos termékekre megmutatjuk a szükséges trinomiális fa szerkesztését.

$$dB_t/B_t = r dt \qquad dS_{t1}/S_{t1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dw_{t1}$$
$$dS_{t2}/S_{t2} = \mu_2 dt + \sigma_2 \rho dw_{t1} + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dw_{t2}$$

folytonos modell közelítése, ha $\Delta t = 1/n$:

$$P\left(\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathbf{E}(\varepsilon_1) = \mathbf{E}(\varepsilon_2) = 0\,,$$
$$P\left(\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathrm{Var}(\varepsilon_1) = \mathrm{Var}(\varepsilon_2) = 1\,,$$
$$P\left(\varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\,, \qquad \mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0\,.$$

[46] Ld. Hua He (1990).

$$S_{k+1,1}^n = \begin{cases} S_{k1}^n\left(1+\frac{\mu_1}{n}+\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \\ S_{k1}^n\left(1+\frac{\mu_1}{n}\right) \\ S_{k1}^n\left(1+\frac{\mu_1}{n}-\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \tag{75}$$

$$S_{k+1,2}^n = \begin{cases} S_{k2}^n\left(1+\frac{\mu_2}{n}+\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\left[\rho\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \\ S_{k2}^n\left(1+\frac{\mu_2}{n}-\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\rho^2}\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ S_{k2}^n\left(1+\frac{\mu_2}{n}+\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\left[-\rho\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right) \end{cases} \tag{76}$$

ahol az S_{kj}^n a j-edik termék árfolyama a k-adik lépésben, feltéve, hogy n részre osztjuk az idő egységét. A többfaktoros modellek azért fontosak a kamatláb-alakulás modellezésében, mert az egyfaktoros modellek esetében a kamatlábak mindig ugyanabba az irányba mozdulnak el minden lejáratra, még ha nem is azonos mértékben.

A volatilitás és a korreláció kereskedése

Két termék közötti korreláció kereskedése azt jelenti, hogy olyan portfóliót alakítunk ki, amelynek értéke függ az adott korrelációs együtthatótól, és a portfólió összetételével biztosítjuk, hogy a többi változó[47] (árfolyam, kamatláb, volatilitás) szerinti érzékenység nulla legyen. Ekkor, ha a portfólió értéke nő a korreláció együttható növekedésével, és úgy gondoljuk, hogy a korreláció együttható tényleges értéke nagyobb, mint amit a származtatott termék értéke tükröz, akkor az adott portfólióból long, ellenkező esetben short pozíciót kell felvenni. Elég általános vélekedés, hogy a rövid távú árfolyam-alakulásban a korrelációs együtthatók meglehetősen instabilak.

A volatilitásra teljesen hasonló módon lehet „fogadásokat kötni". A piaci szóhasználattal: megvettük a volatilitást, ha olyan portfóliónk van, amelynek a volatilitás szerinti deriváltja pozitív.

Az opciók talán legnagyobb haszna, hogy az opciós piacok árai alapján visszaszámíthatók az opciós díjakban megbúvó volatilitások.[48] A piac jövőbeni bizonytalanságával kapcsolatos várakozások így jól mérhetők. Különböző időtávokra vonatkozó átlagos volatilitásokból jövőbeni részidőszakokra vonatkozó *forward volatilitások* számíthatók.

A volatilitások szerepét illetően emlékeztetünk a HJM modell üzenetére: a jövőbeni kamatlábváltozások várható értékét teljes mértékben meghatározza kamatláb volatilitások lejárati szerkezete. Ebből a szempontból egyáltalán

[47] Kivéve az idő változót.

[48] Az opciós piac információinak ilyen felhasználása R. Rendlemann nevéhez fűződik.

nem egy ártatlan jelenség a forint kamatláb elmúlt 2 évben drámaian megnövekedett volatilitása.

Az opcióárazásból kinövő kamatláb modellek irányították rá a figyelmet, hogy nemcsak a kamatlábak szintjének van hatása a gazdaság működésére, hanem annak is komoly és számszerűsíthető hatása van a kamatlábak jövőben várható szintjére, hogy miként változik a kamatlábak ingadozásainak a mértéke.

Irodalom

1. Avellaneda–Laurence: *Quantitative modeling of derivative securities.* Chapman, 2000.
2. Baxter-Rennie: *Pénzügyi kalkulus.* Typotech, 2002.
3. Berlinger-Walter: Faktormodellek az értékpapírpiacokon. *Bankszemle*, 1999.
4. Björk: *Arbitrage theory in continuous time.* Oxford University Press, 1998.
5. Briys-Bellalah-Mai-de Verenne: *Options, futures and exotic derivatives* Wiley, 1998.
6. Clewlow-Strickland: *Implementing derivatives models.* Wiley, 1998.
7. Elliott-Kopp: *Pénzpiacok matematikája.* Typotex, 2000.
8. Heath-Jarrow-Morton: Bond pricing and term strucuture of interest rates. *Econometrica*, 60 (1992))
9. Hua He: Convergence from discrete to continuous time contingent claims prices, *The Review of Financial Studies*, 3, 1990, 523–546.
10. Hull: *Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek*, Panem-Prentice Hall, 1999.
11. Jarrow-Turnbull: *Derivative securities.* South Western College, 2000.
12. Makara T.: A hozamgörbe becslése spline módszerrel (in: *Bankról, pénzről, tőzsdéről*). Bankárképző, 1998.
13. Medvegyev P.: A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, 2002. júl.-aug.
14. Medvegyev P.: *Valószínűségszámítás.* Aula, Bp. 2002.
15. Mikolasek A.: A kamatlábkockázat mérése és kezelése (in: *Bankról, pénzről, tőzsdéről*). Bankárképző, 1998.
16. Rebonato: *Interest-rate option models.* Wiley, 1996.
17. Száz: *Tőzsdei opciók.* Tanszék, Bp. 1999.
18. Varga J.: Pénz- és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modelljei. *Szigma*, 2001.
19. Varga J: *Sztochasztikus módszerek a finanszírozási elméletben.* PTE, Pécs, 2000.
20. Wilmott: *Derivatives.* Wiley, 1998.
21. Wilmott-Howison-Dewynne: *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge University Press, 1995.
22. Zsembery L: Volatilitás kereskedés az opciós piacokon. *Bankszemle*, 1999.

23. Zsembery L:: A volatilitás előrejelzés és a visszaszámított modellek. *Közgazdasági Szemle*, 2003. június.
24. Zsembery L: Volatilitás kereskedés volatilitásra szóló származtatott termékek felhasználásával. *Hitelintézeti Szemle*, 2003. december.)

INTEREST RATE MODELS AND THE PRICE PROCESSES OF FINANCIAL DERIVATIVES

This review article compares the development of financial theory within and outside Hungary in the last three decades starting with the Black-Scholes revolution. Problems like the term structure of interest rate volatilities which is in the focus of many research internationally has not received the proper attention among the Hungarian economists. The article gives an overview of no-arbitrage pricing, the partial differential equation approach and the related numerical techniques, like the lattice methods in pricing financial derivatives. The relevant concepts of the martingal approach are overviewed. There is a special focus on the HJM framework of the interest rate development. The idea that the volatility and the correlation can be traded is a new horizon to the Hungarian capital market.

HASZNOSSÁGI FÜGGVÉNYEK ÉS KOCKÁZATI ATTITŰD[1]

ULBERT JÓZSEF
PTE Közgazdaság-tudományi Kar

A kockázati attitűd mérésére tett modern kísérletek immáron több mint fél évszázados múltra tekintenek vissza. Több tudományterület tekintette feladatának e probléma vizsgálatát, nyilvánvaló módon más szempontokat kiemelve. Csak az utóbbi néhány évtizedben kezdenek közelíteni egymáshoz a különböző tudományterületi megközelítések, ezért természetesen még igen sok kérdés nyitott. A közelítés oka, hogy a hasznosságelvű döntéshozatalon alapuló kockázati attitűd-vizsgálatok tulajdonképpen csődöt mondtak. Önmagában a hasznosságmaximálás elve nem ad magyarázatot számos racionalitási és kockázati attitűdre vonatkozó empirikus megfigyelésre. A gondolat, mely szerint a hasznossági függvény ismerete, vagy becslése elegendő a kockázati attitűd méréséhez, egyre inkább a múlté. A kockázati attitűd hasznosságelvű megközelítésének technikai megújító kísérletei zsákutcának látszanak. A kognitív pszichológia és a szociológia kockázatészlelésre vonatkozó eredményei nélkül a hasznosságelvű döntéshozatal elve nem képes megújulni. Célunk annak bemutatása, hogy a hasznosságelvű kockázati attitűdmérés milyen fejlődési stádiumokon keresztül jutott el odáig, hogy a kognitív pszichológia kockázatészlelésen alapuló felismeréseit felhasználva az empirikus kutatások által felvetett problémákra elfogadhatóbb magyarázatot találjon. E sajátos kettős megközelítésen alapul egy ma már három éves múltra visszatekintő OTKA kutatás, melynek egyik eredménye ez a cikk is.

Bevezetés, alapfogalmak

Daniel Bernoulli (1738, 1954) a szentpétervári paradoxon feloldására javasolta a hasznosság várható értéke maximalizálásának elvét.[2] Ennek lényege

[1]Beérkezett: 2004. szeptember 26. Ulbert József a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának docense (`ulbert@ktk.pte.hu`) és az OTKA T035105 sz. kutatás témavezetője. Ezúton mondok köszönetet a kutatás támogatásáért. Itt kell megköszönnöm Varga Józsefnek (PTE KTK egyetemi tanára) a cikk megírásához nyújtott segítségét is.

[2]D. Bernoulli egy olyan szerencsejátékról értekezik, amelyben a játékos egy szabályos pénzérmével addig dob, amíg fejet nem kap. Ha ez a k-adik dobásra következik be, akkor a bank 2^k tallért fizet a játékosnak. Kérdés: mennyi az a pénzösszeg, amelyet méltányos játék esetén a játékosnak fizetnie kell ahhoz, hogy egy ilyen játékot végigjátszhasson? Ha a méltányosságot úgy értelmezzük, hogy a tiszta nyeremény átlagos értéke (várható értéke) 0 legyen, akkor ez a természetes követelmény arra a paradox eredményre vezet, hogy akármilyen (véges) sok pénzt fizet a játékos a banknak, a játék mindig hátrányos lesz a bank számára, hiszen a bank veszteségének várható értéke végtelen. Ennek a játéknak a várható nyereményígérete (a nyeremény várható értéke) végtelen, a játékban való részvételért a

a következő két mondatban foglalható össze: „Egy dolog értékének nem árán, hanem a belőle származó hasznosságon kell alapulnia... A vagyon növekményének hasznossága fordított arányban lesz a birtokolt javak mennyiségével.”[3]

Az értékeket tehát egy hasznossági transzformációnak kell alávetni, amihez elsősorban jól körülírható hasznossági függvényre van szükség, amely a döntéshozó hasznosság-maximalizáló és kockázat-minimalizáló törekvéseinek alapját képezi.

D. Bernoulli úgy találta, hogy a döntéshozók nagy részének döntéseit a leginkább adekvát módon leíró függvény logaritmikus. A fent idézett megállapítás alapján a hasznossági függvényre felírható differenciálegyenlet megoldása[4] az $u(w) = k \ln w$ függvény.

A logaritmikus hasznossági függvény alakjánál fogva tulajdonképpen megfelel Gossen első törvényének, a határhaszon csökkenése elvének. Ez vezet ahhoz, hogy a végtelen nyereményígéretű lottóért véges részvételi díjat hajlandóak fizetni a játék potenciális résztvevői. A paradoxon tehát ekképpen feloldható lenne. Bernoulli korszakalkotó felismerése szerint nem a nyeremény abszolút összege a hasznosság gyarapodásának mérőszáma, hanem annak a döntéshozatal időpontjában meglévő vagyonhoz történő hozzájárulása képezi a hasznosság mérésének alapját.[5]

A szabály ezek után nagyon egyszerű. Több kínálkozó alternatíva közül azt kell választani, amelyik a legnagyobb várható hasznossággal rendelkezik, vagyis amelyre

$$\mathbf{E}u(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \to \max ,$$

ahol x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ egy alternatíva lehetséges kimeneteleinek pénzértékeit, p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ a kimenetelek bekövetkezési valószínűségeit jelöli, $u(\cdot)$ pedig a döntéshozó hasznossági függvénye.

A hasznossági transzformáció lehetőséget ad arra, hogy nem azonos dimenziójú eredményeket is össze tudjunk hasonlítani egymással, a közös mérték a hasznosság ($u(x)$), illetve annak várható értéke ($\mathbf{E}u(x)$) lesz. A fenti általános feladatból leolvasható, hogy az alternatívák rangsorolása szempontjából központi szerepe a hasznossági függvénynek van (Hirshleifer-Riley (1992)), hiszen a várható hasznosság meghatározása a már ismert szabályok szerint történik.

Ha a hasznossági függvény kialakításakor, illetve meghatározásakor az eredménytagok csak pozitív lineáris transzformációs lépéseken mennek ke-

---

potenciális játékosok azonban csak véges részvételi díjat hajlandóak fizetni. Ez a döntési probléma szentpétervári paradoxonként, a döntési szabály pedig Bernoulli-elvként ismert.

[3] Az idézetek D. Bernoullitól valók. Részleges fordításuk magyarul tudomásunk szerint először Bernstein (1998) munkájában látott napvilágot.

[4] Bernoulli szerint az egyén vagyonának dw növekménye okozta du hasznosság növekmény fordítottan arányos a w teljes vagyonával, vagyis $du = k dw/w$. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása a fent említett logaritmus függvény.

[5] Itt kívánjuk megjegyezni, hogy a Neumann-Morgenstern-féle axiómarendszer, továbbá Markowitz (1952) megközelítése, és még később Kahnemann-Tversky (1979) újítása is ezen a felismerésen alapul.

resztül, akkor annak eredményeként egy lineáris hasznossági függvény áll elő, melynek általános alakja:

$$u(x) = \alpha + \beta x ,$$

ahol az iménti feltétel miatt $\beta > 0$, α pedig a jelenlegi vagyonhoz rendelhető hasznossági potenciál mértéke.

Ebben az esetben a hasznosság várható értékének maximalizálása, mint döntéshozói célkitűzés megfeleltethető a várható érték maximalizálása célkitűzésének. Ez utóbbiról tudjuk, hogy egyértelműen a kockázat semleges döntéshozók döntési szabálya, ezért a kockázat semleges döntéshozók lineáris hasznossági függvénnyel rendelkeznek. Megfordítva is igaz, ha egy döntéshozó lineáris hasznossági függvénnyel rendelkezik, akkor semleges kockázati attitűddel jellemezhető.

A lineáris hasznossági függvények az állandó határhaszon esetét tükrözik. A semleges döntéshozó egy befektetési alternatíváért annak várható értékét hajlandó fizetni, így a pénz által képviselt kiadott hasznosság (az ár haszonáldozata) éppen megegyezik a nyert hasznosság várható értékével. $\mathbf{E}u(x) \geq u(\mathbf{E}x)$, ha $u(x)$ konvex, és fordítva, ha $u(x)$ konkáv, a kettő csak lineáris hasznossági függvények esetében egyezik meg egymással.

A linearitásra és a paraméterek előjelére vonatkozó korlátozó feltételekkel szakítva, például kvadratikus hasznossági transzformációt feltételezve a hasznossági függvény általános alakja:

$$u(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 .$$

Ha a transzformáció eredményeként egy maximummal rendelkező (konkáv) parabola alakul ki, akkor az a csökkenő határhaszon elvét képviseli. Ezt a Bernoulli elv is elfogadja a kockázatkerülő döntéshozók sajátjaként. Általánosítva, bármilyen transzformáció esetén állíthatjuk, hogy a konkáv hasznossági függvényt eredményező transzformációk kockázatkerülő döntéshozókra jellemzők.

Teljesen hasonló megfontolások érvényesíthetők a konvex hasznossági függvényekkel kapcsolatban, amelyek a kockázatbarát döntéshozókra jellemzők. A klasszikus hasznossági függvények[6] alapján a döntéshozók képesek arra, hogy az alternatívák hasznossági különbözeteit meghatározzák, majd ezek alapján rangsort állítsanak fel.

A másik megközelítés abból indul ki, hogy a projektek rangsorolásához, illetve a határár meghatározásához elegendőek a gyenge preferencia relációk, amelyek a racionális magatartási axiómákon alapulnak.[7] Az így becsült, ún. Neumann-Morgenstern hasznossági függvények alapján elvégezhető az

[6] Összefoglaló néven azok a függvények, amelyek esetében elegendő információ áll rendelkezésre ahhoz, hogy a hasznossági függvény egyértelműen definiált legyen, és egy meghatározott kérdezési technika (Bernoulli kérdőívek) segítségével, általában az intervallumfelezés módszerével becsülhető maga a függvény.

[7] Többféle axiómarendszert ismerünk, amelyek közös alapjául a Neumann-Morgenstern (1948) axiómarendszer szolgált. Az alkalmazott módszer legtöbbször az ún. referencia alternatíva módszer.

alternatívák rangsorolása, ez azonban csak az első lépés a döntés felé, hiszen az alternatívák beszerzési ára is befolyásolja a végső döntést.

A hasznossági függvények három alaptípusának ismert kombinációiban[8] közös elem, hogy:

- a kockázati magatartás, illetve ezzel párhuzamosan a hasznossági függvény alakja a döntéshozó mindenkori vagyoni helyzetétől (w), illetve annak változásától függ,[9]
- a vagyon várható végső értékét ($\overline{w}$) valószínűségi változónak tekintjük, amely két részből áll: az induló vagyonból (w_0), illetve egy bizonytalan lottó várható értékéből ($\overline{x}$), amelyekre

$$\overline{w} = w_0 + \overline{x} \ ,$$

- továbbá a függvény növekvő (a döntéshozó preferálja a többet a kevesebbel szemben) és differenciálható. (Csökkenő függvény esetében a racionalitás kritériuma nyilvánvalóan sérül.)

A fenti feltételek mellett bármilyen módszerrel állítjuk is elő, becsüljük a hasznossági függvényt, annak alakja a kockázati attitűdre utal. Lineáris haszonkockázati függvénnyel rendelkező semleges döntéshozó akkor és csak akkor vesz részt egy szerencsejátékban, ha a feláldozott hasznosság éppen akkora, mint a nyert hasznosság várható értéke. Semleges döntéshozó csak és kizárólag igazságos (fair) játékban vesz részt. Olyan játék, illetve döntés tekinthető igazságosnak, amelyben a nyeremény, illetve a vagyon tranzakció után várható értéke (nyert hasznosság) éppen megegyezik a játszmában való részvétel díjával (feláldozott hasznosság). Jelekben:

$$\mathbf{E}u(w) = u(\overline{w}) \ ,$$

ahol $\mathbf{E}w = \overline{w}$. Megfordítva is igaz: aki csak igazságos játékban vesz részt, azt kockázat semleges döntéshozónak tekinthetjük, ami akkor és csak akkor lehetséges, ha a döntéshozó nem tart igényt a kockázati prémiumra[10] ($RP(\overline{w}) = 0$), mivel nem érzékeli, illetve nem értékeli a kockázatot.[11]

A vagyont valószínűségi változónak tekintve, a kockázati prémium előjele tulajdonképpen azt mutatja meg, hogy a döntéshozó hogyan viszonyul egy bizonytalan, illetve kockázatosnak tekinthető pénzügyi tételhez, amennyiben az vagyonának részét képezi. Kockázatkerülő döntéshozóról akkor beszélhetünk, ha a kockázati prémium pozitív, mert ebben az esetben a kockázati prémium

[8]Ezek közül talán legismertebb az ún. Friedman–Savage (1948) függvény, amelyben konkáv, konvex és lineáris szakaszok egyaránt előfordulhatnak.

[9]Markowitz (1952) éppen e tekintetben bírálta a Friedman–Savage-féle hasznossági függvényt.

[10]A kockázati prémium az a felár, amelyet a döntéshozók a megnövekvő kockázatért cserébe elvárt megtérülés többletigényként megfogalmaznak.

[11]Nem tudjuk, hogy azért nem értékeli-e, mert nem érzékeli, vagy azért nem érzékeli, mert nem érdekli. A már hivatkozott OTKA-kutatás is azt tekintette fő céljának, hogy az észlelés és a kockázati attitűd közti kapcsolatot vizsgálja.

az a maximális hozam, amelyről a döntéshozó lemondhat. Ekkor a fenti összefüggés a következőképpen módosul:

$$\mathbf{E}u(w) = u(\overline{w} - RP(\overline{w})) \ .$$

Kockázatkerülő döntéshozó csak akkor kaphatja meg a kockázati prémiumot, illetve annak egy részét, ha a vagyonának részét képező kockázatos tételt megtartja, hiszen ekkor vállalja a kockázatot. A megtartás-eladás dilemmát leginkább meghatározó tényező az ún. biztonsági ekvivalens (certainty equivalent),

$$CE = \overline{w} - RP(\overline{w}) \ .$$

A biztonsági ekvivalens az eladás határára. Akkor dönt az eladás mellett a döntéshozó, ha a kockázatos lottóért cserébe legalább ekkora összeget kap.[12] Másképpen megfogalmazva, akkor vállalja a megtartással együtt járó kockázatot, ha a kapott vételi ajánlatok egyike sem éri el a biztonsági ekvivalens szintjét.

A csere egyenértékű, mert csak akkor kerülhet sor rá, ha a döntéshozó a biztonsági ekvivalenst éppen olyan hasznosságúnak ítéli, mint a kockázatos tétel várható hasznosság értékét.[13]

A hasznossági transzformáció ismeretében azt mondhatjuk, hogy monoton növekvő, konkáv hasznossági függvény esetén a várható érték nem kisebb, mint a biztonsági ekvivalens, azaz a kockázati prémium pozitív előjelű. Konvex hasznossági függvény esetén viszont éppen fordítva, a biztonsági ekvivalens nem kisebb a várható értéknél.

A kockázati attitűd mérése

A szakirodalom Bernoulli nyomdokán egyértelműen állást foglal a tekintetben, hogy a hasznossági függvény ismerete szükséges a kockázati attitűd meghatározásához, azaz, hogy a hasznossági függvény egyértelműen definiál egy kockázati attitűdöt. A fentiek alapján logikusnak tűnő következtetés, hogy a kockázati prémium előjele a kockázati magatartásra utal, tehát a hasznossági függvényből elő kell állítani a kockázati prémiumot. E gondolatmenet, illetve az attitűd mérésére tett első kísérlet Pratt (1964) nevéhez fűződik.

Ha a döntéshozó induló vagyonának (w_0) része a kockázatos $\overline{x}$ várható értékű pénzügyi tétel, melynek árfolyama $P(L)$, akkor a vagyon várható értékét ($\overline{w} = w_0 + \overline{x}$) egy eladásra, vagy megtartásra vonatkozó döntés alakítja:

---

[12] Természetesen a másik oldal is hasonlóképpen mérlegel: aki nem rendelkezik a kockázatos tétellel, az kialakítja annak határárát, vagyis azt az összeget, amennyiért még hajlandó megvásárolni azt. Ezt igazságos (fair) árnak hívjuk. Tranzakcióra pedig nyilvánvaló módon csak akkor kerülhet sor, ha a fair ár nagyobb, mint a biztonsági ekvivalens.

[13] A biztonsági ekvivalens vagy a hasznossági függvény inverze segítségével (ld. Pratt (1964), Arrow (1971)), vagy a vállalatértékelés során a CAPM felhasználásával állítható elő (magyarul ld. Ulbert (2003)).

1. *Eladás.* Eladja a kérdéses pénzügyi tételt, mely esetben tulajdonképpen nem vállalja, hanem áthárítja a kockázatot, így nem kapja meg a kockázati prémiumot, csak a biztonsági ekvivalenst. Ha kockázatkerülő döntéshozóról van szó, akkor az eladásra csak akkor kerülhet sor, ha $RP(\overline{w}) \geq 0$, ami a fenti definíció szerint azt feltételezi, hogy $\overline{x} \geq P(L)$, hiszen $RP(\overline{w}) = \overline{x} - P(L)$. Eladás esetén a vagyona: $w = w_0 + P(L)$ lesz. Ez tulajdonképpen a biztonsági ekvivalens, hiszen: $P(L) = \overline{x} - RP(\overline{w})$, $\overline{w} = w_0 + \overline{x}$, és $CE = \overline{w} - RP(\overline{w})$.

2. *Megtartás.* A pénzügyi tétel megtartása esetén a kockázatot vállalja a döntéshozó, ezért igényt tarthat a bizonytalan kockázati prémiumra, de le kell mondania a biztonsági ekvivalensről. Vagyona ebben az esetben $\overline{w} = w_0 + \overline{x}$ lesz.

Az egyenértékű csere, azaz $\mathbf{E}u(w) = u(\overline{w} - RP(\overline{w}))$ miatt a hasznossági transzformáció a következő egyenlőséget eredményezi:

$$\mathbf{E}u(w_0 + \overline{x}) = u\big(w_0 + P(L)\big) = u\big(w_0 + \overline{x} - RP(\overline{w})\big) \ .$$

Ebből a kockázati prémium csak akkor fejezhető ki közvetlenül, ha a hasznossági függvény invertálható. Ez nem túl korlátozó feltevés, hiszen a hasznossági függvényekre vonatkozóan csak annyit jelent, hogy azok szigorúan monoton növekvők. Ekkor

$$RP(\overline{w}) = w_0 + \overline{x} - u^{-1}\big(\mathbf{E}u(w_0 + \overline{x})\big) = \overline{w} - CE \ .$$

Az összefüggések ismeretében már látszik, hogy az összeg utolsó tagja, a hasznossági függvény inverze tulajdonképpen nem más, mint a biztonsági ekvivalens. A kockázati prémium előjele pedig csak akkor pozitív, ha $\overline{w} \geq CE$. Az inverz a $w_0 + \overline{x}$ pont körüli Taylor-polinommal helyettesíthető:

Az eladási oldalon elsőrendben közelítve:

$$u\big(w_0 + \overline{x} - RP(\overline{w})\big) \approx u(w_0 + \overline{x}) + u'(w_0 + \overline{x})\big(-RP(\overline{w})\big) \ .$$

A megtartási oldalon másodrendben közelítve a hasznossági függvényt a $w_0 + \tilde{x}$ ($\tilde{x}$ valószínűségi változó) pontban a $w_0 + \overline{x}$ pont körül:

$$u(w_0 + \tilde{x}) \approx u(w_0 + \overline{x}) + u'(w_0 + \overline{x})(\tilde{x} - \overline{x}) + \frac{1}{2}u''(w_0 + \overline{x})(\tilde{x} - \overline{x})^2 \ .$$

Mindkét oldal várható értékét véve az

$$\mathbf{E}u(w_0 + \tilde{x}) \approx u(w_0 + \overline{x}) + u'(w_0 + \overline{x})\mathbf{E}(\tilde{x} - \overline{x}) + \frac{1}{2}u''(w_0 + \overline{x})\mathbf{E}(\tilde{x} - \overline{x})^2$$

összefüggést kapjuk. Felhasználva az $\mathbf{E}(\tilde{x} - \overline{x}) = 0$, és $\mathbf{E}(\tilde{x} - \overline{x})^2 = \mathrm{Var}(\tilde{x}) = \sigma^2$ összefüggéseket, továbbá az egyenértékű cserét figyelembe véve a két oldal egyezőségéből az egyenletet a kockázati prémiumra rendezve látható, hogy az tulajdonképpen egy kétváltozós függvényként is felfogható:

$$RP(\overline{w}) = -\frac{1}{2}\frac{u''(\overline{w})}{u'(\overline{w})} \cdot \sigma^2 \ .$$

A kockázat mértéke (variancia), illetve a kockázati magatartást, egészen pontosan a kockázatelutasítás intenzitását mutató mérőszám az abszolút kockázatelutasítási együttható (Absolute Risk Aversion, ARA[14]) magyarázzák a kockázati prémium előjelét illetve mértékét.

A fenti egyenletből különös figyelmet kell szentelnünk a Pratt-Arrow mértéknek, amely általános formában a következő:

$$ARA(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} ,$$

illetve az ebből származó ún. relatív kockázat elutasítási (Relatív Risk Aversion, RRA) mutatónak. A közöttük levő kapcsolatot az

$$RRA(w) = ARA(w) \cdot w$$

egyenlőség mutatja. Az alábbi következtetéseket vonhatjuk le a fenti mértékekkel kapcsolatban:

- minél nagyobb a variancia, annál nagyobb a kockázati prémium, azaz, minél nagyobb a kockázat, annál többet követel ellensúlyozásként a döntéshozó,
- a kockázati prémium nagysága konstans variancia esetén a kockázatelutasítás intenzitásától függ: a kockázatelutasító döntéshozó kockázati prémiuma pozitív előjelű, ami monoton növekvő haszonkockázati függvény esetén konkáv alakot jelent,
- a kockázati prémium negatív előjele konvex haszonkockázati függvények sajátossága,
- monoton növekvő haszonkockázati függvény esetén ARA első deriváltjának előjeléből egyértelműen következtethetünk az RP-értékekre és előjelekre, amennyiben a vagyon varianciája állandó,
- ha a variancia változik, azaz a vagyon belső struktúrája módosul, akkor RRA első deriváltjának előjele és mértéke befolyásolja a kockázati prémium arány- és irányváltozásait.

A fentiekből világosan látszik, hogy az ARA, illetve a RRA néhány speciális esetben igen jó mutatója lehet a kockázat elutasításának. Ha az induló vagyon nem függ a kockázattól, azaz ARA értéke konstans, vagy minden tranzakció kockázati struktúra-tartó, azaz RRA konstans. Belátható, hogy pl. $ARA(w) \equiv k$ konstans voltát (konstans abszolút kockázatelutasítás) a következő hasznossági függvényosztály biztosítja:[15]

$$u(w) = c_2 - \frac{c_1}{2k} e^{-2kw} ,$$

[14]Pratt, J. W. és Arrow, K. J. munkásságának elismeréseként Pratt-Arrow (néhol Pratt-Finetti) mutatónak, mérőszámnak is nevezik.

[15]Ld. bővebben Penati, A. – Pennacchi, G. (2003)

ahol $c_1 \neq 0, c_2 \in R$ tetszőleges konstansok. Pratt levezetéséből közvetett bizonyítékhoz jutottunk arra nézve, hogy a hasznosságelvű kockázati attitűdmérés egészen addig, amíg a hasznossági függvény időben stabil, illetve alakja nem függ a mindenkori vagyoni, jövedelmi helyzettől, pontosan képes leírni a kockázati magatartást. Ez azt jelenti, hogy ilyen esetekben a hasznossági függvény mintájára a kockázati attitűd is időben stabilitást mutat.

Számos igen korai empirikus kutatás[16] azonban kétségbe vonta ezt a stabilitást. Kimutatták, hogy az egyéni hasznossági függvények és a kockázati attitűdök nem stabilak, a döntéshozók gyakran nem hoznak konzekvens döntéseket.

Harsányi mutat rá, hogy a hasznosságelvű kockázati attitűdmérés eredetileg a bizonyosság esetére korlátozódott és a döntéselméletnek éppen az a feladata, hogy kiterjessze e felfogást a bizonytalan szituációkra is.[17]

Ezekben az esetekben a várható érték olyan módosulásokat eredményezhet a varianciában, amelyek problematikussá tehetik a kockázati prémium meghatározását. Erre a problémára hívta fel a figyelmet Amihud (1980), aki a kockázati prémium vagyon szerinti rugalmasságát két komponensre bontotta az alábbiak szerint:

$$\varepsilon_{RP} = \frac{dRP(\overline{w})/RP(\overline{w})}{d\overline{w}/\overline{w}} = \frac{d(-u''/u')/u''/u'}{d\overline{w}/\overline{w}} + \frac{d\sigma^2/\sigma^2}{d\overline{w}/\overline{w}} \equiv \Gamma(\overline{w}) + k(\overline{w}) \; .$$

A kockázati prémium $\Gamma(\overline{w})$ hasznosság alapú komponensét javasolta általános kockázatelutasítási mértéknek, mivel ez speciális esetként magában foglalja a két ismert kockázat elutasítási mértéket, az ARA abszolút és az RRA relatív kockázatelutasítási mértékeket is. Kimutatta, hogy közöttük a következő kapcsolatok figyelhetők meg:

	$\Gamma < -1$	$\Gamma = -1$	$-1 < \Gamma < 0$	$\Gamma = 0$	$\Gamma > 1$
$ARA'(\overline{w})$	< 0	< 0	< 0	$= 0$	> 0
$RRA'(\overline{w})$	< 0	$= 0$	> 0	> 0	> 0

1. táblázat.

Ha Γ konstans, akkor a $kw^{\Gamma(w)} = -u''(w)/u'(w)$ feltétel, ahol k valamely nem-negatív konstans, az

$$u(w) = h \int \exp\left(-\frac{k}{\Gamma+1} w^{\Gamma+1}\right) dw$$

speciális hasznossági függvényosztályt vonja maga után. Itt h szintén nemnegatív konstans. A $\Gamma = 0$ esetben $u(w)$ exponenciális vagy lineáris függvény

[16] Jó összefoglaló olvasható ezekről Schoemaker (1980) munkájában.

[17] Harsányi János (előadás): „Eredeti formájában a hasznosságelmélet racionális magatartás koncepciója a bizonyosság esetére vonatkozott csak... A döntéselmélet feladata ennek a racionalitás felfogásnak a kiterjesztése a bizonytalanság esetére..." (http://kvtr.elte.hu 2. oldal)

konstans abszolút kockázatelutasítással. A $\Gamma = -1$ az $u(w) = \log w + c$ logaritmikus hasznossági függvényhez, vagy a konstans elaszticitású

$$u(w) = \frac{1}{1-\alpha} w^{1-\alpha}$$

függvényhez tartozik. Ha Γ nem konstans, akkor a korlátjai határozzák meg a hasznossági függvény kockázatelutasítási karakterisztikáját.

A kockázati prémium vagyon szerinti rugalmasságának $k(\overline{w})$ komponense a vagyon pont-elaszticitását méri, melynek konstans értékei szintén kapcsolatba hozhatók az abszolút és a relatív kockázatelutasítási mértékekkel.

Amihud a hasznossági függvények típusait a rugalmassági komponensek értékhatáraihoz rendeli, ezáltal kibővíti a hasznossági függvények körét, tágabb értelemben használja az ARA és az RRA kategóriáit, de alapjaiban nem változtatja meg a következtetés rendszert. Röviden megemlítjük még a Merton (1971) által javasolt $HARA$ (Hyperbolic Absolute Risk Aversion) hiperbolikus abszolút kockázat elutasítási mértéket, amely szintén rendelkezik az ARA és az RRA tulajdonságaival. Itt

$$HARA(w) = \left(\frac{w}{1-a} + \frac{b}{c}\right)^{-1} > 0\,,$$

ahol a, b és c bizonyos feltételeket kielégítő konstansok.[18]

Természetesen más, hasonlóan technikai megközelítések is születtek a kockázati attitűd, illetve a kockázatelutasítás intenzitásának mérésére. Ezen próbálkozások közös jellemzője, hogy az irracionális döntésekre, illetve a hasznossági függvények becslési hibáira, problémáira nem adnak választ, hiszen alapvető kiinduló pontjuk, hogy a hasznossági függvény az egyének szintjén egyértelműen meghatározható. Abból pedig a kockázati attitűd éppen aktuális mérőszáma, mutatója levezethető. Ebben az értelemben tekintjük nem túl sikeres technikai megközelítéseknek ezeket, hiszen a kockázati attitűdöt csak és kizárólag a hasznosság oldaláról közelítik meg. Nem ismernek el más kiinduló pontot.

Sokkal fontosabbnak és előbbre mutatóbbnak érezzük azokat a megközelítéseket, amelyek a szociológia és a kognitív pszichológia kockázatészleléssel kapcsolatos felismeréseit ültették át a döntéstudományba. Kiemelkedő ebben a tekintetben Kahneman és Tversky (1979, 1992) munkássága, akik bizonyos szempontból a várható hasznosságelmélet továbbfejlesztéseként dolgozták ki két lépcsőben az ún. kilátás elméletet (prospect theory), melynek főbb tézisei a következők:

- a döntéshozók szubjektíven érzékelik a bekövetkezési valószínűségeket: a csak valószínű, de nem bizonyos eseményeket alábecsülik a biztos bekövetkezésű eseményekhez képest (döntési súlyfüggvény), ami olyan

[18] A konstansoknak nem könnyű közgazdasági értelmezést tulajdonítani. Ezeknek a paramétereknek alkalmas értékeket választva kaphatjuk a konstans relatív kockázatelutasítást (CRRA) és a konstans abszolút kockázatelutasítást (CARA) reprezentáló függvényeket. Bővebben lásd a hasznosságelmélet szakirodalmát.

következménnyel járhat, hogy a nagyobb várható haszonkockázati értékű, bizonytalan alternatívát hátrébb sorolják a kisebb értékű, de biztos alternatívánál: ez ellentmond a tranzitivitás elvének,

- az alternatívák preferencia sorrendje ugyan megváltozik, ha a nyereségeket veszteségekké alakítjuk, de a változás nem szimmetrikusan történik, ami azzal a következménnyel jár, hogy a nyereséges tartományban kockázatkerülő döntéshozók veszteséges tartományokban kockázatbaráttá válnak, mivel a csak valószínű veszteség csábítóbb, mint a biztos veszteség, az előbbiekben leírt ún. bizonyossághatás tehát a pozitív tartományban érvényesül, a negatív tartományban viszont a veszteség taszító erejét növeli („S" alakú értékfüggvény),

- döntéseink függnek a mindenkori vagyoni helyzetünktől, azaz a vagyoni helyzet megváltozásától, melyet a haszonkockázat-elvű döntéshozatal nem vesz figyelembe, mivel nem egy kiinduló vagyoni helyzethez képest méri az elmozdulásokat, hanem minden alternatívát önmagában értékel.

Az ezt követő empirikus vizsgálatok nem csak a kérdésfeltevés módjából eredő torzító hatásokra hívták fel a figyelmet (Varga, 2003), hanem arra is, hogy a racionalitási kritériumok —leggyakrabban a függetlenségi axióma— sérülése miatt tulajdonképpen az egész várható hasznosság elmélet megkérdőjelezhető (Machina, 1982.)

A legújabb kutatások megerősítik a kétségeket a hasznosságelvű döntéshozatal alapelveit illetően. Rabin (2000) és Rabin-Thaler (2001) szerint az általánosan alkalmazott hasznossági függvények az elhanyagolhatóan kicsi kockázatokra, illetve kimeneti értékekre vonatkozóan a kockázatkerülő magatartást jól magyarázzák, ugyanakkor viszont extrém kockázatkerülést jeleznek nagyobb valószínűség és nagyobb kimeneti összegek esetén. Szintén ők hívják fel a figyelmet Samuelson (1963) nyomán arra, hogy a döntéshozók az egyes izolált kockázatokat nem ugyanúgy ítélnek meg, azaz nem gondolkodnak konzekvensen minden döntési szituációban. Különböző hasznossági függvények esetében Varga (2001) is hasonló következtetésre jut.

Legújabban már a kilátáselmélet értékfüggvényének és döntési súlyfüggvényének alakja is vita tárgyát képezi (Levy-Levy (2002)). A hasznosságelvű kockázati attitűdmérés és maga a hasznosságelvű döntéshozatal is válságát éli. Ilyen körülmények között természetes, hogy egyre inkább előtérbe kerültek azok az empirikus és modellértékű vizsgálatok, amelyek nem csak kritizálják az egymásból kinövő hasznosságelvű döntéshozatalt, illetve a kilátáselméletet, hanem igyekeznek magyarázatot találni arra, hogy mi okozza a torzításokat, amelyek a racionalitás érvényre jutását is megakadályozzák.

Ezek a megközelítések a szociológiai és a kognitív pszichológiai kutatások elért eredményeire támaszkodnak. A többször hivatkozott OTKA kutatás szintén ilyen aspektusból vizsgálódott. Az 1200 fős, az alapvető szociológiai háttérváltozók szerint reprezentatív országos mintán elvégzett kérdőíves felmérés összefoglaló eredményeit egy korábbi publikációban tettük közzé (Ulbert–Csanaky, 2004). E kutatás során a hasznossági függvények becslésére a korábbiakban felsorolt problémák miatt nem vállalkoztunk, azonban a viszonylag nagy minta lehetőséget adott arra, hogy a kockázati attitűdről átfogó képet alkossunk, az irracionálisnak tartott döntéseket regisztráljuk, illetve elemezzük, hogy azok hátterében milyen szociológiai változók bújnak meg, bírnak releváns magyarázó erővel.

A kockázatészlelés hatékonysága kutatási eredményeink szerint egyértelműen visszavezethető néhány szociológiai tényezőre, melyek közül kiemelkedő jelentőséggel bírnak: a jövedelmi helyzet, az iskolai végzettség és a nem. A magasabb jövedelemmel rendelkezők általában iskolázottabbak is, tehát a két szociológiai változó szoros korrelációt mutat. Arra a következtetésre jutottunk, hogy a nők és a magasabb jövedelmű rétegek kockázatészlelésének hatékonysága szignifikánsan jobb, mint a férfiaké, illetve az alacsonyabb jövedelmű rétegeké. Ebben nyilván nem csak a relatív pénzhiányból fakadó érdektelenség játszik szerepet, hanem a tőkepiaci befektetési lehetőségek vonatkozásában a nem kellő informáltság is.

A kockázatészlelés hatékonyságának általunk mért eltérései alapján a kockázati magatartást tekintve viszonylag homogén csoportok képezhetők. Az igen erőteljes kockázatelutasítási magatartással jellemezhető csoportban (1200 főből 419 fő ide sorolható) a mintabeli arányukhoz képest szignifikánsan nagyobb arányban képviseltetik magukat a nők és a legszerényebb jövedelemmel rendelkezők, valamint a legfeljebb 8 általánossal rendelkezők és a nyugdíjasok. Az erőteljes kockázatkerülő magatartás ,,veszélyeztetettjei" kutatásunk szerint a nők, az alacsony jövedelműek és a legkevésbé iskolázottak, valamint a nyugdíjasok.

A kevésbé intenzíven kockázatkerülő csoportban (276 fő) olyan döntéshozók vannak többségben, akik a befektethető összeg növekedésével válnak egyre inkább kockázatkerülővé. Ez a magatartás leginkább a 30-39 és az 50-59 éves korosztályokra jellemző. Megállapítottuk továbbá, hogy annak ellenére, hogy a magasabb jövedelműek körében a többség maga menedzselné vagyonát, ugyanebben a kategóriában egyre nagyobb részt képviseltek azok, akik kisebb tétel esetén önmaguk döntenének, nagyobb tétel esetében viszont már szakembert kérnének meg erre.

A harmadik, az előzőekhez képest kevésbé homogén összetételű csoportban (471 fő) minden kockázatbarát döntéshozó szerepel, bár a csoport tagjainak nagy része nem kockázatbarát. Ebben a csoportban szignifikánsan több férfi van, mint nő, ami arra utal, hogy a kockázatbarát döntéshozókat elsősorban a férfiak között kell keresni. Más háttérváltozó tekintetében nem találtunk szignifikáns eltérést.

Nem sikerült elkülöníteni egyértelműen a kockázatbarát döntéshozókat a kockázatkerülőktől, az viszont figyelemre méltó, hogy már első megközelítésben is egyértelmű, hogy a megkérdezettek közel 60%-a teljes bizonyossággal, bár különböző intenzitás mellett, kockázatkerülőnek minősíthető.

Megállapítottuk, hogy a megkérdezettek sok tekintetben megsértik a racionális magatartási axiómákat, viszont egy tekintetben konzekvensen racionálisnak tekinthetők: befektetési preferenciáik illeszkednek kockázati magatartásukhoz. Az abszolút kockázatkerülő típusú döntéshozók csak állampapírokkal és ingatlanokkal foglalkoznak. A vegyes csoport tagjai pedig más befektetési alternatívákat is elfogadhatónak tartanak.

Ebből arra következtettünk, hogy a háttérváltozók közül leginkább a jövedelemszint és vele összhangban az iskolai végzettség, és utolsó sorban a nem lehet az a változó, ami a pénzügyi kockázatok érzékelését leginkább befolyásolja. A kockázatészlelés hatékonysága és a kockázati magatartás között így szoros kapcsolatot regisztrálhatunk, ami természetesen a befektetési preferenciákra is hatást gyakorol.

A klasszikus Bernoulli kérdéssorozat, mint a teljes kérdőív része a biztonsági ekvivalencia és a valószínűségi ekvivalencia módszereit egyaránt alkalmazta. Nyolc darab két kimenetelű lottóról alkottak véleményt a megkérdezettek. Ezzel mintegy azt kívántuk tesztelni, hogy a kockázati magatartásra vonatkozó indirekt következtetéseink megállják e helyüket a hasznosságból eredő indirekt következtetések tükrében.

Legfontosabb szignifikáns megállapításaink összhangban voltak az általános kockázati attitűdre vonatkozó következtetéseinkkel. Bebizonyosodott, hogy:

- A jövedelmi, illetve vagyoni helyzet meghatározza a kockázati attitűdöt, ugyanis a magasabb jövedelemmel rendelkező, módosabb, vagyonosabb polgárok kockázatkerülési intenzitása csökkenő. Az alsó két jövedelmi tizedben még sokkal inkább kockázatkerülők az emberek, mint a felső jövedelmi tizedben. Ezt erősítő következtetésre jutottunk a kockázatészlelésre vonatkozó kérdésekre adott válaszokból is.

- Az iskolai végzettségbeli különbség szintén szignifikánsnak bizonyult. Lényegesen nagyobb a kockázatvállalók, illetve a kevésbé kockázatkerülők aránya a diplomások között, mint a legfeljebb nyolc általános iskolát végzettek között. A kockázatészlelésen alapuló megállapításaink alátámasztják az iskolai végzettség meghatározó szerepét. Ez nyilván azzal magyarázható, hogy az iskolai végzettség és a jövedelmi helyzet között szoros korreláció mutatható ki.

- Az életkor szintén meghatározó. Megállapításunk szerint a 18-29 éves korosztály a legkevésbé intenzíven kockázatelutasító, ugyanakkor a leginkább kockázatelutasítók a 60 év felettiek.

- Végül, de nem utolsó sorban megállapítottuk, hogy a nők között lényegesen magasabb az erősen kockázatkerülők aránya. A férfiak kockázatkerülésének intenzitása kisebb. E megállapítás egybevág más kutatások eredményeivel (Szerb-Pintér, 2003).

Kutatásunk eredményei egyértelműen azt mutatják, hogy a kockázatkerülés intenzitásának a kockázatészlelés hatékonyságán keresztül történő mérése nem lehet rossz irány, azaz a hasznossági függvényeken alapuló megközelítések összehangolhatók a kognitív pszichológiai megközelítésekkel. A kockázat kétféle megközelítése (pszichológiai-szociológiai vetület versus közgazdasági-döntéstudományi vetület) közös elméleti gyökerekre vezethető vissza, ezért a kockázati magatartást éppúgy levezethetőnek tartjuk a kockázatészlelésből, mint a döntéselméleti megközelítésből. Mindkettőnek megvannak az előnyei és a hátrányai, ezért inkább kiegészítő megoldásként javasolhatók.

Összefoglalás

A kockázatkerülés intenzitásának mérésére kidolgozott, hasznosságelvű döntéseken alapuló megközelítések közül kettőt hasonlítottunk össze, amelyek egymásra épülnek: Pratt-Arrow és Amihud megközelítését. Utóbbi a hasznossági függvények tágabb körére terjesztette ki a Pratt-Arrow mértéket, de továbbra sem tudott mit kezdeni a hasznossági függvények becslési eljárásait torzító tényezőkkel, illetve nem tud magyarázatot találni a racionalitás esetenkénti hiányára.

Többekhez hasonlóan a szerző is azt a véleményt osztja, hogy a fenti két probléma a tisztán hasznosságelvű megközelítések relevanciáját is megkérdőjelezi. Megoldást a hasznosságelvű megközelítés eme válságából csak a kognitív pszichológiai megközelítések elterjedése hozhat, amelyek az irracionálisnak tartott döntésekre szociológiai, pszichológiai magyarázatot igyekeznek adni. (Irracionális döntésnek a racionális magatartási axiómák valamelyikének megsértésével hozott döntést tekintjük.)

A magatartás gazdaságtana (behavioral economics) e tekintetben a kockázatkerülés intenzitásának mérőszámát nem technikai értelemben alkotja újjá, hanem visszavezeti a kockázatészleléssel összefüggő kérdésekre. Kutatásunk a kétféle megközelítés megfeleltetési kísérletének tekinthető.

Irodalom

1. Amihud, Y. (1980): General Risk Aversion and Attitude Towards Risk, *The Journal of Finance*, Vol. 35 Issue 3, 1980 Jun., 685–691 pp.
2. Arrow, K. J. (1971): The Theory of risk aversion, in: *Essays in the Theory of Risk-Bearing*. Ed. Arrow, K. J., 1971, Amsterdam, 90–120 pp.
3. Bernoulli, D. (1738, 1954): *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, 1738 Szentpétervár, (illetve először angolul: *Econometrica*, 1954, Vol. 22, 23–36. o.)
4. Bernstein P. L. (1998): *Szembeszállni az istenekkel*, Panem, Budapest, 1998.
5. Friedman, M. – Savage, L.J. (1948): The utility analysis of choices involving risk, *Journal of Political Economy*, 1948/Aug., 279–304 pp.
6. Harsányi János: A racionális viselkedés elmélete, ELTE előadás Budapest, 2000, http://kvtr.elte.hu (pp. 5)
7. Hirshleifer, J. – Riley, J. G. (1992): Elements of Decision under Uncertainty, in: *The Analytics of Uncertainty and Information*, (Ed.: Hirshleifer-Riley, 1992, Cambridge University Press, 7–42 pp.)
8. Kahneman, D. – Tversky, A. (1979): Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica*, Vol. 47, 1979, 263–291 pp.

9. Levy, M. – Levy, P. (2002): Prospect Theory: Much ado about nothing?, *Management Science*, 2002. Oct., 1334–1349.
10. Machina, M. J. (1982): Expected Utility Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, Vol. 50, 1982 March, 277–323 pp.
11. Markowitz, H. (1952): The Utility of Wealth, *Journal of Political Economy*, Vol. 60, 1952, 151–158 pp.
12. Merton, R. C. (1971): Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model, *Journal of Economic Theory.*
13. Neumann, J. – Morgenstern, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1947.
14. Penati, A. – Pennacchi, G. (2003): *Risk Aversion and Risk Premia*, Working Papers, Finance 400 Series, University of Illinois, www.business.uiuc.edu/gpennacchi.
15. Penati, A. – Pennacchi, G.(2003): *Risk Aversion and Portfolio Choice*, Working Papers, Finance 400 Series, University of Illinois, www.business.uiuc.edu/gpennacchi.
16. Pratt, J. W. (1964): Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, 1964 Vol. 32, 122–136 pp.
17. Rabin, M. – Thaler, R. H. (2001): Anomalies, Risk Aversion, *Journal of Economic Perspectives*, 2001, Vol. 15. 219–232 pp.
18. Rabin, M. (2000): Risk Aversion and Expected Untility-Theory: A Calibration Theorem, *Econometrica*, Vol. 68. 2000, 1281–1292 pp.
19. Samuelson, P. (1963): Risk and Uncertainty: A Fallacy of large Numbers, *Scientia*, 98, 1963, 108–113 pp.
20. Schoemaker, P.J. (1980): *Experiments on Decisions under Risk*, Martinus Nijjhoff, Boston, 1980.
21. Szerb L. – Pintér É.: Women Entrepreneurship in Hungary, *Diana International First International Symposium of Growth Financing for Women Entrepreneurs*, Stockholm, 2003, June 21-23.
22. Taylor, D. (1965): Decision Making and Problem Solving, in: *Handbook of Organizations* (ed. March, J.), Chicago, 1965.
23. Tversky, A. – Kahneman, D. (1992): Advances in Prospect Theory: Cumulative representation of uncertainty, *Journal of Risk and Uncertainty*, 1992/5, 297–323 pp.
24. Ulbert, J. (2003): Kockázatkezelés a vállalatok értékelésekor, *Pénzügyi Szemle*, 2003/2, 186–198 o.
25. Ulbert, J. – Csanaky, A. (2004): Kockázatészlelés és kockázati magatartás, *Közgazdasági Szemle*, LI. évfolyam, 2004/3, 235–258 o.
26. Varga, J. (2001): Kockázatelutasítás többforrású kockázat esetében, *Szigma*, XXXII., 2001/3-4, 127–135 o.
27. Varga, J. (2003): Torzító hatások a hasznossági függvények becslési eljárásaiban, *Kézirat*, OTKA, Pécs, 2003. (28 pp.)

UTILITY FUNCTIONS AND RISK ATTITUDE

In their path breaking works, Pratt and Arrow developed two measures of risk aversion which are generally referred to as absolute and relative risk aversion (ARA and RRA respectively). Later Amihud proposed a more general measure of attitude of individuals towards risk. This paper compares these approaches from the viewpoint of biases in utility function assessment. The author finds that the utility theory based approach alone is not able to give a real explanation of biases and the lack of rationality in some cases. Conclusions are based on empirical research too.

VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSOK SZÉLFÜGGŐSÉGE, TŐZSDEINDEX PORTFÓLIÓ SZÉLSŐSÉGES VESZTESÉGEINEK ELEMZÉSE KOPULA ALKALMAZÁSÁVAL[1]

VARGA JÓZSEF – LUKÁCS PÉTER
PTE KTK – CIB Bank

Bevezetés

A pénzügyi kockázatmenedzsment új fejezete nyílt meg akkor, amikor a Baseli Bizottság belső modellek alkalmazását ajánlotta a bankoknak a piaci kockázat becslésére. (Basel Committe on Banking Supervision, 1995). Ez az ajánlás 1998 táján beépült az egyes nemzetek törvénykezésébe, lehetővé téve a bankok számára, hogy ne csak a pénzügyi termékek, hanem a kockázatmenedzsment innovációjában is versenyezhessenek egymással.

A piaci kockázat mérésére alkalmazandó mértékként a kockáztatott érték (VaR) került előtérbe. A VaR azt a maximális értéket számszerűsíti, amelyet elveszíthetünk egy portfólióban adott időperiódusban, adott megbízhatóság mellett. A statisztika nyelvén fogalmazva a portfólió kockáztatott értéke a portfólió veszteség eloszlásának kvantilise adott időintervallumban, adott valószínűségi szinten.

Sok pénzintézet számára a legnagyobb kihívást az ügyfélkiszolgáló és háttérrendszerek, valamint az adatbázisok kezelésére szolgáló számítógépes rendszerek alkalmazása jelentette. Ez szoftveripari feladat, amelynek az a célja, hogy a portfólió pozíciókat és a múltbeli piaci adatokat centralizált kockázatmenedzsment keretbe foglalják. Másfajta kihívást jelentett a kiszámított VaR értékek kontroll kockázat céljára történő felhasználása, valamint olyan környezet kialakítása, amelyben a kockázatmenedzsment rendszer minden résztvevő számára elfogadott. Ez szervezési, illetve társadalmi kérdés. A kockázat modellezésének módszertani kérdése azért jelentős, mert a VaR nem megfelelő alkalmazása a kockázatmenedzsment rendszer összes jó teljesítményét leronthatja.

A pénzügyi kockázatkezelés egyik kritikus pontja a szélsőséges veszteségeket megfelelően figyelembe vevő modell alkalmazása. Értékpapírokból, derivatív eszközökből, vagy akár hitelekből álló portfólió esetében a szélsőséges veszteségek két tényezőre vezethetők vissza. Egyrészt a portfóliót alkotó eszközök egyedileg rendelkezhetnek szélsőséges negatív hozamokkal, másrészt a nagy negatív hozamok együttes előfordulása okozhat jelentős portfólió hozam veszteséget. Az ilyen szélsőséges hozamokat eredményező események bekö-

[1] Beérkezett: 2005. február 8. E-mail: `varga@ktk.pte.hu`.

vetkezési valószínűségeinek becslése komoly feladatot jelent a pénzügyi kockázatkezeléssel foglalkozó szakemberek számára.

A szélsőséges portfólió veszteségek kezelésére, modellezésére több módszer áll rendelkezésre. A kockáztatott érték (VaR) alkalmazása jelentette az áttörést ezen a területen, majd később a VaR hiányosságait kiküszöbölő, a várható szélsőséges veszteségekre alapozó modellek (ES – várható deficit, CVaR – feltételes kockáztatott érték stb.) is megjelentek az 1990-es évek végén.

Portfóliók esetében a várható szélsőséges veszteségek modellezésére alkalmazható eszköz a hozam valószínűség-eloszlások szélfüggőségének vizsgálata. A következőkben először a valószínűség-eloszlások szélfüggőségével kapcsolatos fontosabb fogalmakat, tételeket összegezzük, azután az elliptikus kopulák fontosabb tulajdonságait foglaljuk össze, majd bemutatjuk a módszer alkalmazását szélsőséges portóolió veszteségek vizsgálatára egy speciális elliptikus kopula, a Student-féle t kopula alkalmazásával. Megmutatjuk, hogy szélfüggőségű kopula alkalmazásával hatékonyan modellezhetők a szélsőséges események.

1 Valószínűség-eloszlások szélfüggősége

Az eloszlás szélek függősége kétváltozós esetben a valószínűségi változók között a koordinátarendszer első, illetve harmadik negyedében jelentkező függőség mértékével kapcsolatos fogalom. Ezekben a negyedekben mindkét változó egyszerre pozitív, illetve negatív értékeket vesz fel, ezért az első negyed a szélsőséges nagy hozamok, míg a harmadik negyed a kiugróan nagy veszteségek közötti függőség vizsgálatára alkalmas.

Az X és Y folytonos valószínűségi változók közötti szélfüggőség kopula tulajdonság, ezért a szélfüggőség nagysága invariáns az X és Y szigorúan monoton transzformációival szemben. (Lásd Nelsen (1999)).

1.1 Definíció. *Jelölje $(X,Y)^T$ az F illetve G marginális eloszlásfüggvénnyel jellemzett folytonos valószínűségi vektorváltozót. Az $(X,Y)^T$ felső szélfüggőségi együtthatója*

$$\lim_{u\to 1^-} P\big(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)\big) = \lambda_U\ ,$$

feltéve, hogy a $\lambda_U \in [0,1]$ határérték létezik. Ha $\lambda_U \in (0,1]$, akkor X és Y aszimptotikusan összefügg a felső eloszlásszélben, ha pedig $\lambda_U = 0$, akkor X és Y aszimptotikusan független változók ugyanott.

Mivel $P\big(Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)\big)$ az alábbi

$$\frac{1 - P\big(X \le F^{-1}(u)\big) - P\big(Y \le G^{-1}(u)\big) + P\big(X \le F^{-1}(u), Y \le G^{-1}(u)\big)}{1 - P\big(X \le F^{-1}(u)\big)}$$

alakban is írható, a folytonos valószínűségi változóra az 1. definícióval ekvivalens alternatív definíció adható, amelyből belátható, hogy az eloszlás szélfüggőség valóban kopula tulajdonság.

1.2 Definíció. *Ha a C kétváltozós kopula olyan, hogy a*

$$\lim_{u\to 1^-} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \lambda_U$$

határérték létezik, akkor felsőszélfüggőségű, ha $\lambda_U \in (0,1]$, *és felső szélfüggetlen a* $\lambda_U = 0$ *esetben.*

A fogalom szemléltetésére tekintsük a Gumbel-kopula család következő tagját:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right) , \quad \theta \geq 1 .$$

Ekkor

$$\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = \frac{1-2u+\exp\left(2^{1/\theta}\ln u\right)}{1-u} = \frac{1-2u+u^{2^{1/\theta}}}{1-u} ,$$

és ezért

$$\lim_{u\to 1^-} \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = 2 - \lim_{u\to 1^-} 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta}-1} = 2 - 2^{1/\theta} .$$

Ebből pedig leolvasható, hogy $\theta > 1$ esetben C_θ felső szélfüggőségű.

Ha a kopula nem adható meg zárt formulával, hasznosabb a λ_U meghatározására másik összefüggést alkalmazni. Ezt az esetet a Gauss-kopulával szemléltetjük. A Gauss-kopula

$$C_R(u,u) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_{12}^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{2(1-R_{12}^2)}\right) ds\, dt ,$$

ahol $-1 < R_{12} < 1$ és Φ a standard normális eloszlásfüggvény. Tekintsük az $U \sim U(0,1)$ és $V \sim U(0,1)$ eloszlású (U,V) valószínűségi változókat, amelyek kopuláját jelölje C. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy

$$P\left(V \leq v \mid U = u\right) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \quad \text{és} \quad P\left(V > v \mid U = u\right) = 1 - \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} ,$$

és hasonló módon határozható meg a V feltétel melletti eloszlás. Ekkor

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{u\to 1^-} \frac{\overline{C}(u,v)}{1-u} = -\lim_{u\to 1^-} \frac{d\overline{C}(u,u)}{du} = \\
&= -\lim_{u\to 1^-} \left(-2 + \frac{\partial}{\partial s} C(s,t)|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s,t)|_{s=t=u}\right) = \\
&= \lim_{u\to 1^-} \left[P\left(V > u \mid U = u\right) + P\left(U > u \mid V = u\right)\right] .
\end{aligned}$$

Ha C kommutatív kopula, vagyis $C(u,v) = C(v,u)$, akkor λ_U a következő egyszerű alakban írható:

$$\lambda_U = 2 \lim_{u\to 1^-} P\left(V > u \mid U = u\right) .$$

Példaként tekintsük az $(X,Y)^T$ kétváltozós standard normális eloszlást ρ lineáris korrelációs együtthatóval, vagyis $(X,Y)^T \sim C(\Phi(x),\Phi(y))$, ahol C a fentebb vizsgált Gauss-család egyik tagja $R_{12}=\rho$ esetben. Mivel ennek a kopula családnak a tagjai kommutatívak,

$$\lambda_U = 2 \lim_{u\to 1^-} P\left(V > u \mid U = u\right) ,$$

és mivel Φ értelmezési tartománya a $(-\infty,\infty)$ intervallum,

$$\lim_{u\to 1^-} P(V > u \mid U = u) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} P(\Phi^{-1}(V) > x \mid \Phi^{-1}(U) = x) = \lim_{x\to\infty} P(X > x \mid Y = x) .$$

Felhasználva az ismert összefüggést, amely szerint, ha $(X,Y)^T$ eloszlása kétváltozós standard normális eloszlás, $Y \mid (X=x) \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$, azt kapjuk, hogy

$$\lambda_U = 2 \lim_{x\to\infty} \overline{\Phi}\left(\frac{x-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = 2 \lim_{x\to\infty} \overline{\Phi}\left(x\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right) ,$$

ahonnan leolvasható, hogy $\lambda_U = 0$, ha $R_{12} < 1$. Tehát a Gauss-kopula $\rho < 1$ lineáris korrelációs együtthatóval nem felső szélfüggőségű.

Az alsó szélfüggőség fogalma hasonló módon értelmezhető. Ha a

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{C(u,u)}{u} = \lambda_L$$

határérték létezik, akkor a C kopula alsó szélfüggőségű, ha $\lambda_L \in (0,1]$, és alsó szélfüggetlen a $\lambda_L = 0$ esetben.

Azokra a kopulákra, amelyeknek nem létezik egyszerű zárt alakú formulája, hasznosabb másik összefüggést alkalmazni a λ_L meghatározására. Tekintsük az $(U,V)^T$ véletlen vektort C kopulával. Ekkor az alsó szélfüggőségi együttható

$$\begin{aligned}
\lambda_L &= \lim_{u\to 0^+} \frac{C(u,u)}{u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{dC(u,u)}{du} = \\
&= \lim_{u\to 0^+} \left(\frac{\partial}{\partial s} C(s,t)|_{s=t=u} + \frac{\partial}{\partial t} C(s,t)|_{s=t=u}\right) = \\
&= \lim_{u\to 0^+} \left[P\left(V < u \mid U = u\right) + P\left(U < u \mid V = u\right)\right] .
\end{aligned}$$

Amennyiben C kommutatív kopula, vagyis $C(u,v) = C(v,u)$, akkor λ_L kifejezése a következő egyszerű alakra hozható

$$\lambda_L = 2 \lim_{u\to 0^+} P\left(V < u \mid U = u\right) .$$

A C kopulájú kétdimenziós valószínűségi vektor továbbélési kopulája pedig

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v) .$$

Két $U(0,1)$ típusú C együttes eloszlásfüggvényű valószínűségi változó együttes továbbélési függvénye

$$\overline{C}(u,v) = 1 - u - v + C(u,v) = \hat{C}(1-u, 1-v) \; .$$

Ezért

$$\lim_{u \to 1^-} \frac{\overline{C}(u,u)}{1-u} = \lim_{u \to 1^-} \frac{\hat{C}(1-u,1-u)}{1-u} = \lim_{u \to 0^+} \frac{\hat{C}(u,u)}{u} \; ,$$

tehát a C felső szélfüggőségi együtthatója megegyezik a $\hat{C}$ alsó szélfüggőségi együtthatójával. Ugyanígy a C alsó szélfüggőségi együtthatója megegyezik a $\hat{C}$ felső szélfüggőségi együtthatójával.

2 Elliptikus kopulák

Kopulák alkalmazásával elválasztható valamely portfólió hozam alakulása esetében az egyedi eszközök veszteségeinek hatása az együttes bekövetkezések okozta portfólió veszteségektől. Az első fajta veszteséget a marginális eloszlások, a második fajtát —a veszteségek függőségi struktúráját— pedig a kopulák modellezik. Kopulák szerkesztése, gyakorlati alkalmazása —különösen kettőnél több eszközből álló portfólió esetében— nem túlságosan egyszerű feladat. Az elliptikus kopulák elliptikus eloszlások kopulájaként határozhatók meg.

2.1 Az elliptikus eloszlások

Az elliptikus eloszlások osztálya sok olyan többváltozós eloszlást magában foglal, amelyek a többváltozós normális eloszlás számos jó tulajdonságával rendelkeznek, és alkalmas a többváltozós szélsőséges értékek és nem-normális függőségi mértékek modellezésére.

2.1. Definíció. *Ha $\mathbf{X}$ n-dimenziós véletlen vektor, amelyre valamely $\mu \in R^n$ vektorral, valamint az $n \times n$ típusú nem-negatív definit, szimmetrikus $\mathbf{\Sigma}$ mátrixszal fennáll, hogy az $\mathbf{X} - \mu$ karakterisztikus függvénye felírható a $\mathbf{t}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{t}$ kvadratikus forma függvényeként, azaz $\varphi_{\mathbf{X}-\mu}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{t})$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{X}$ elliptikus eloszlású μ, $\mathbf{\Sigma}$ és ϕ paraméterekkel, és így jelöljük: $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$.*

Az $n = 1$ esetben az elliptikus eloszlások osztálya egybeesik az egydimenziós szimmetrikus eloszlásokkal. A definícióban szereplő ϕ függvényt karakterisztikus generátornak nevezzük.

2.1 Tétel. $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$, $\mathrm{rank}(\mathbf{\Sigma}) = k$ *akkor és csak akkor, ha létezik olyan, a $\{\, \mathbf{z} \in R^k \mid \mathbf{z}^T \mathbf{z} = 1 \}$ egységhipergömbön egyenletes eloszlású k-dimenziós $\mathbf{U}$ vektortól független $R \geq 0$ valószínűségi változó és az $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{\Sigma}$ feltételt kielégítő $n \times k$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix úgy, hogy*

$$\mathbf{X} =_d \mu + R\mathbf{A}\mathbf{U} \; .$$

A tétel bizonyítása, valamint az R és ϕ közötti kapcsolat vizsgálata megtalálható Fang, Kotz és Ng (1987) könyvében.

2.1 Példa. *Legyen* $\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$*. Mivel az* $\mathbf{X}$ *vektorváltozó komponensei függetlenek, és* $X_i \sim N(0,1)$ $i = 1, \dots, n$ *és* X_i *karakterisztikus függvénye* $\exp(-t^2/2)$*, az* $\mathbf{X}$ *vektorváltozó karakterisztikus függvénye*

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{t}\right\}.$$

A 2.1 Tételből következik, hogy $\mathbf{X} \sim E_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n, \phi)$*, ahol* $\phi(u) = \exp(-u/2)$*.*

Ha $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$, ahol $\mathbf{\Sigma}$ diagonál mátrix, akkor $\mathbf{X}$ komponensei korrelálatlanok, feltéve, hogy $0 < \mathrm{Var}(X_i) < \infty$. Ha $\mathbf{X}$ komponensei függetlenek, akkor $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma})$.

A többváltozós normális eloszlás az egyetlen olyan elliptikus eloszlás, amely esetében a komponensek korrelálatlanságából azok függetlensége következik.

Az $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$ véletlen vektor nem szükségképpen rendelkezik sűrűségfüggvénnyel. Ha van sűrűségfüggvénye, akkor annak

$$|\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} g\big((\mathbf{X}-\mu)^T \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{X}-\mu)\big)$$

alakúnak kell lennie, ahol g egyváltozós nem-negatív függvényt jelöl. Ezért *az egyenlő sűrűségű pontok ellipszoidot alkotnak* R^n*-ben.*

Az $\mathbf{X}$ valószínűségi vektorváltozó $E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$ reprezentációja nem egyértelmű. Adott eloszlás esetében a μ egyértelműen meghatározott, $\mathbf{\Sigma}$ és ϕ azonban csak egy pozitív konstans erejéig meghatározottak. Pontosabban, ha $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$ és $\mathbf{X} \sim E_n(\mu^*, \mathbf{\Sigma}^*, \phi^*)$, akkor

$$\mu^* = \mu, \quad \mathbf{\Sigma}^* = c\mathbf{\Sigma}, \quad \phi^*(\cdot) = \phi^*(\cdot/c)$$

valamely $c > 0$ konstanssal. A 2.1 Tétel alkalmazásával kereshetünk olyan reprezentációt, amelyre $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$.

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}(\mu + R\mathbf{AU}) = \mathbf{AE}(R^2)\mathrm{Cov}(\mathbf{U})\mathbf{A}^T,$$

feltéve, hogy $\mathbf{E}(R^2) < \infty$. Legyen $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$. Akkor $\mathbf{Y} =_d \|\mathbf{Y}\|\mathbf{U}$, ahol $\|\mathbf{Y}\|$ független $\mathbf{U}$-tól. Továbbá, mivel $\|\mathbf{Y}\|^2 \sim \chi_n^2$, $\mathbf{E}(\|\mathbf{Y}\|^2) = n$. Mivel pedig $\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) = \mathbf{I}_n$, beláthatjuk, hogy amennyiben $\mathbf{U}$ egyenletes eloszlású az R^n egységhipergömbjén, akkor $\mathrm{Cov}(\mathbf{U}) = \mathbf{I}_n/n$. Így $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{AA}^T\mathbf{E}(R^2)/n$. A $\phi^*(s) = \phi(s/c)$ karakterisztikus függvény választásával ($c = \mathbf{E}(R^2)/n$) azt kapjuk, hogy $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$.

Ezért az elliptikus eloszlást teljesen leírja μ, $\mathbf{\Sigma}$ és ϕ, ahol ϕ úgy választható, hogy fennálljon $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}$ (ha $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ értelmezett). Ha $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ a fenti módon adódik, akkor $\mathbf{X}$ eloszlását egyértelműen meghatározza $\mathbf{E}(\mathbf{X})$, $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ és az egydimenziós marginális függvényeinek típusa, például normális vagy t-eloszlás.

2.2 Tétel. *Legyen* $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$, $\mathbf{B}$ *$q \times n$ típusú mátrix és* $\mathbf{b} \in R^q$. *Akkor*

$$\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim E_q(\mathbf{b} + \mathbf{B}\mu, \mathbf{B}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}^T, \phi) .$$

Bizonyítás. Az 1. Tétel szerint $\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ sztochasztikus reprezentációja

$$\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{X} =_d \mathbf{b} + \mathbf{B}\mu + R\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{U} .$$

■

Végezzük el a következő particionálást:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{11} & \mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{\Sigma}_{21} & \mathbf{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{X}_1$ és μ_1 $r \times 1$ típusú vektorok, $\mathbf{\Sigma}_{11}$ pedig $r \times r$ típusú mátrix.

2.1 Következmény. *Legyen* $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$. *Akkor*

$$\mathbf{X}_1 \sim E_r(\mu_1, \mathbf{\Sigma}_{11}, \phi), \quad \mathbf{X}_2 \sim E_{n-r}(\mu_2, \mathbf{\Sigma}_{22}, \phi) .$$

Az elliptikus eloszlások marginális eloszlásai tehát elliptikus eloszlások és ugyanolyan típusúak (megegyezik a karakterisztikus generátoruk). A következő tétel azt fogalmazza meg, hogy az $\mathbf{X}_1$ vektorváltozó adott $\mathbf{X}_2$ melletti feltételes eloszlása szintén elliptikus eloszlás, általában azonban nem az $\mathbf{X}_1$ típusával megegyező típusú.

2.3 Tétel. *Legyen* $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$, $\mathbf{\Sigma}$ *szigorúan pozitív definit mátrix. Akkor*

$$\mathbf{X}_1 \mid (\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}) \sim E_r(\tilde{\mu}, \tilde{\mathbf{\Sigma}}, \tilde{\phi}) ,$$

ahol

$$\tilde{\mu} = \mu_1 + \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{x} - \mu_2) \quad \text{és} \quad \tilde{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{\Sigma}_{11} - \mathbf{\Sigma}_{12}\mathbf{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{21} .$$

Továbbá $\tilde{\phi} = \phi$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma})$.

A bizonyítás és részletesebb elemzés megtalálható Fang, Kotz és Ng (1987) korábban már említett könyvében.

A következő lemma azt állítja, hogy független, elliptikus eloszlású, egy pozitív konstans erejéig megegyező $\mathbf{\Sigma}$ szóródásmátrixú valószínűségi vektorváltozók lineáris kombinációja elliptikus eloszlású marad.

2.1 Lemma. *Legyen* $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$ *és* $\tilde{\mathbf{X}} \sim E_n(\tilde{\mu}, c\mathbf{\Sigma}, \tilde{\phi})$ *két független valószínűségi vektorváltozó,* $c > 0$ *állandó. Akkor tetszőleges* $a, b \in R$ *esetén*

$$a\mathbf{X} + b\tilde{\mathbf{X}} \sim E_n(a\mu + b\tilde{\mu}, \mathbf{\Sigma}, \phi^*) ,$$

ahol $\phi^*(u) = \phi(a^2u) + \tilde{\phi}(b^2cu)$.

Bizonyítás. A 2.1 Definíció alapján elegendő azt megmutatni, hogy minden $\mathbf{t} \in R^n$ esetében

$$\begin{aligned}
\varphi_{a\mathbf{X}+b\tilde{\mathbf{X}}-a\mu-b\tilde{\mu}}(\mathbf{t}) &= \varphi_{a(\mathbf{X}-\mu)}(\mathbf{t})\,\varphi_{b(\tilde{\mathbf{X}}-\tilde{\mu})}(\mathbf{t}) = \\
&= \phi\left((a\mathbf{t})^T\mathbf{\Sigma}(a\mathbf{t})\right)\,\tilde{\phi}\left((b\mathbf{t})^T(c\mathbf{\Sigma})(b\mathbf{t})\right) = \\
&= \phi(a^2\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{t})\,\tilde{\phi}(b^2c\,\mathbf{t}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{t})\,.
\end{aligned}$$

■

Legyen $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \mathbf{\Sigma}, \phi)$. Feltéve, hogy $0 < \mathrm{Var}(X_i), \mathrm{Var}(X_j) < \infty$,

$$\rho(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}\,.$$

Ez megmagyarázza, hogy miért természetes függőségi mérték a lineáris korreláció együttes nem-degenerált ($\Sigma_{ii} > 0$ minden i-re) elliptikus eloszlás esetében. Az $\mathbf{R}$ mátrixot ($R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$) az $\mathbf{X}$ lineáris korrelációs mátrixának nevezzük. Vegyük észre, hogy ez a definíció általánosabb a szokásosnál és az elliptikus eloszlások esetében még nagyobb jelentőséggel bír. Mivel az elliptikus eloszlást egyértelműen meghatározza μ, $\mathbf{\Sigma}$ és ϕ, a nem-degenerált elliptikus eloszlású valószínűségi vektorváltozó kopuláját egyértelműen meghatározza $\mathbf{R}$ és ϕ.

A következő szakaszban megindokoljuk a Student t-kopula választásának helyességét szélsőséges portfólió veszteségek modellezésére.

3 Student t-kopulák

Ha $\mathbf{X}$ sztochasztikus reprezentációja

$$\mathbf{X} =_d \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}\mathbf{Z}\,,$$

ahol $\mu \in R^n$, $S \sim \chi^2_\nu$ és $\mathbf{Z} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ függetlenek, akkor $\mathbf{X}$ n-változós t_ν eloszlású μ várható értékkel (ha $\nu > 1$) és $\frac{\nu}{\nu-2}\mathbf{\Sigma}$ kovarianciamátrixszal (ha $\nu > 2$). Ha $\nu \leq 2$, akkor $\mathrm{Cov}(\mathbf{X})$ nem értelmezett. Ebben az esetben $\mathbf{\Sigma}$ az $\mathbf{X}$ eloszlása alakparaméterének tekintendő.

A t_ν eloszlású $\mathbf{X}$ valószínűségi vektorváltozó kopulája a következőképpen adható meg

$$C^t_{\nu,\mathbf{R}}(\mathbf{u}) = t^n_{\nu,\mathbf{R}}\left(t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_n)\right)\,,$$

ahol $R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ és ahol $t^n_{\nu,\mathbf{R}}$ jelöli a $\sqrt{\nu}\mathbf{Y}/\sqrt{S}$ eloszlásfüggvényét, továbbá $S \sim \chi^2_\nu$ és $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ függetlenek. Itt t_ν jelöli a $t^n_{\nu,\mathbf{R}}$ megegyező marginális függvényeit, vagyis a $\sqrt{\nu}Y_1/\sqrt{S}$ eloszlásfüggvényét. Kétváltozós esetben a kopula a következő alakban írható:

$$C^t_{\nu,\mathbf{R}}(u, v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_{12}^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R_{12}^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds\,dt\,.$$

Itt R_{12} egyszerűen a megfelelő kétváltozós t_ν $(\nu > 2)$ eloszlás lineáris korrelációs együtthatója.

Ha $(X_1, X_2)^T$ standard kétváltozós t-eloszlású ν szabadságfokkal és $\mathbf{R}$ lineáris korreláció mátrixszal, akkor $X_2 \mid (X_1 = x)$ szintén t-eloszlású $\nu + 1$ szabadságfokkal és

$$\mathbf{E}(X_2 \mid X_1 = x) = R_{12}x\,, \quad \mathrm{Var}(X_2 \mid X_1 = x) = \frac{\nu + x^2}{\nu + 1}(1 - R_{12}^2)\,.$$

Ezt felhasználhatjuk annak igazolására, hogy a t-kopula rendelkezik felső (és a radiális szimmetria következtében) alsó szélfüggőséggel:

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= 2\lim_{x\to\infty} P(X_2 > x \mid X_1 = x) = 2\lim_{x\to\infty} \overline{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+x^2}}\frac{x - R_{12}x}{\sqrt{1 - R_{12}^2}}\right) = \\
&= 2\lim_{x\to\infty} \overline{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu/x^2+1}}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right) = \\
&= 2\,\overline{t}_{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}\frac{\sqrt{1-R_{12}}}{\sqrt{1+R_{12}}}\right)\,.
\end{aligned}$$

A fenti összefüggés azt mutatja, hogy a felső szélfüggőségi együttható R_{12} növekvő, míg a ν szabadságfoknak csökkenő függvénye, amint az várható. Továbbá az is látható, hogy a felső (alsó) szélfüggőségi együttható zérushoz konvergál, ha a szabadságfok végtelenbe tart és $R_{12} < 1$. A következő táblázatban a kétváltozós t-kopula felső szélfüggőségi együtthatói találhatók néhány R_{12}, illetve ν értékre.

ν	$R_{12} = -0.5$	$R_{12} = 0$	$R_{12} = 0.5$	$R_{12} = 0.9$	$R_{12} = 1$
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1
4	0.01	0.08	0.25	0.63	1
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1
∞	0	0	0	0	1

1. táblázat. A kétváltozós t-kopula felső szélfüggőségi együtthatójának értékei

A táblázat utolsó sora a kétváltozós Gauss kopulát jellemzi, amelynek nincsen felső szélfüggősége (és a szélfüggőség radiális szimmetriája következtében alsó szélfüggősége), így *szélsőséges veszteség vizsgálatára a Gauss kopula nem alkalmas.* Az elliptikus kopulák szélfüggőségi együtthatóinak részletesebb vizsgálata megtalálható Embrechts, Mikosch, és Klüppelberg (1997) könyvében.

A $C^t_{\nu,\mathbf{R}}$ kopulából könnyen generálható véletlen változó az

$$\mathbf{X} =_d \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}}\mathbf{Z}$$

összefüggés felhasználásával. Az algoritmus a következő:

- n számú eszköz ($n > 2$) esetében először meghatározzuk az eszközhozamokat, majd ezek $\mathbf{R}$ kovariancia mátrixát.
- Előállítjuk az $\mathbf{R}$ mátrix Cholesky dekompozícióját. (Mivel $\mathbf{R}$ pozitív definit mátrix, a felbontás létezik, vagyis van olyan $n \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix, amellyel $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$.)
- Generálunk n számú, független standard normális eloszlású változót, amelyeket a $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ vektorban foglaljuk egybe.
- Generálunk egy, a $z_1, \ldots, z_n$ változóktól független, χ^2_ν eloszlású s valószínűségi változót.
- Meghatározzuk az $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ vektort.
- Meghatározzuk az $\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{s}}\mathbf{y}$ vektort.
- Meghatározzuk az $u_i = t_\nu(x_i),\ i = 1, \ldots, n$ koordinátákat.
- $(u_1, \ldots, u_n)^T \sim C^t_{\nu,\mathbf{R}}$, ezzel létrehoztuk a kopulát.

4 Szélsőséges hozam veszteségek modellezése t-kopula alkalmazásával

A vizsgálat során 37 különböző nemzetközi tőzsdeindex hozamának alakulását elemeztük. A tőzsdeindex adatokat[2] 1998. április 30-tól 2002. február 20-ig vettük figyelembe. Ez indexenként 990, összesen 36631 árfolyamadatot jelent. Tekintettel arra, hogy az ünnepnapok —így a tőzsdei szünnapok is— országonként jelentős eltérést mutatnak, több alkalommal kellett átlagolásos adatpótlást végezni. Az adatpótlások aránya alig haladja meg a 6,5%-ot.

A tőzsdeindex hozamok számításakor az alábbi formulákat alkalmaztuk:

$$\begin{aligned} r_t^* &= \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1} \\ r_t &= e_t r_t^* \end{aligned}$$

ahol

P_t : a tőzsdeindex árfolyama a t időpontban,

r_t^* : a tőzsdeindex hozama a t időpontban,

e_t : az USD (USA dollár) árfolyama a t időpontban,

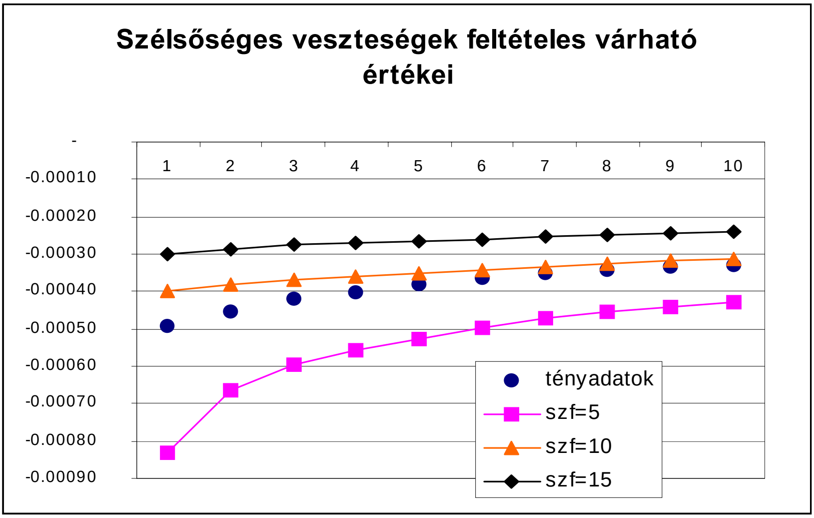
r_t : az USD-re átszámított tőzsdeindex árfolyam a t időpontban.

A különböző nemzetközi hozamadatok jellemzőinek összehasonlíthatósága érdekében szükséges, hogy egy devizabázison elemezzük őket. Ennek jogosságát egy példával világítjuk meg. Tegyük fel, hogy két különböző tőzsdeindex

[2] Az adatokat a Yahoo Finance internetes szolgáltató oldalairól gyűjtöttük.

hozamainak eloszlása normális, várható értékük, szórásuk —mely ebben az esetben a hozamingadozásból adódó kockázatot jól fejezi ki— azonos. Amennyiben egyik befektetésünk CHF-ben (svájci frank), a másik pedig egy jelentősen nagyobb volatilitású devizában (pl. orosz rubelben) van, nem mondhatjuk, hogy két befektetésünk kockázata azonos. Amennyiben a vizsgált időszak alatt a két tőzsdeindex devizanemének árfolyama megváltozik, nem beszélhetünk azonos kockázati szintről. A befektetők —mind a magánszemélyek, mind pedig az intézményiek— könyvelési, pozíciónyilvántartási rendszere minden esetben egy-egy konkrét valutanemhez kötődik. Ebből adódóan amennyiben ettől a valutanemtől eltérő befektetést eszközölnek, a megtérülés számításakor figyelembe kell venniük a devizaárfolyam változásának hatásait. Két eltérő devizájú befektetés hozamainak jellemzőit csak azonos devizabázison tudjuk tehát összevetni. A nemzetközi valutáris rendszer fő jellemzőit figyelembe véve elmondhatjuk, hogy az értékmérő szerepkörében hosszú idő óta, mind a mai napig az USD szinte az egyetlen használatos eszköz. 1992-ben a világ nemzetközi kereskedelmének 47,2%-a USA dollárban bonyolódott. A jegybankok tartalékait 61%-ban USD-ben képezték meg 1997-ben. Mindezek indokolják az USD referencia valutanemként való alkalmazását. Hozamadatainkat tehát USA dollár bázison hasonlítjuk össze.

Elsőként az indexeket egyenlően súlyoztuk és így alakítottunk ki egy portfóliót. Ennek a portfóliónak a szélsőséges veszteségeit modelleztük t-kopulákkal. Az eredményeket a szélsőséges veszteségek feltételes várható értékeivel illusztráltuk. A veszteségek feltételes várható értékéről jó összefoglalást találunk Acerbi és Tasche (Acerbi, C., Tasche, D., (2002)) tanulmányában. Esetünkben a veszteségek feltételes várható értékeit a megfelelő számú —csökkenő sorba rendezett— szélsőséges veszteségek átlagával becsüljük.



1. ábra. Szélsőséges veszteségek feltételes várható értékei különböző szabadságfokok esetében

Az eredményeket az *1. ábra* illusztrálja. A vízszintes tengelyen azon szélsőséges veszteségek száma szerepel, melyet figyelembe vettünk a feltételes várható veszteség becslésekor. Az 1-es érték azt jelenti, hogy csupán a legszélsőségesebb egyetlen veszteségadatot vettük figyelembe. A 2, 3, ..., 10 érték esetében pedig a 2, 3, ..., 10 legnagyobb veszteség alapján számítottuk a feltételes várható veszteséget.

A számított eredmények alapján látható, hogy a különböző szabadságfokú kopulák közül leginkább a 10 szabadságfokú Student t-kopula közelíti meg a tényadatokat. Látható továbbá az is, hogy a szabadságfok növekedésével a modellezett szélsőséges veszteségek —melyeket a függőleges tengelyen mérünk— csökkennek. Az 5 szabadságfokú kopula túlbecsli, a 15 pedig jelentősen alulbecsli a portfólió szélsőséges veszteségek miatti kockázatát. Meg kell jegyeznünk, hogy a szabadságfok növekedésével, végtelenhez való tartásával a modellünk közelíti a többváltozós normális eloszlás modelljét, ahol a hozamok függőségi struktúrája normális, a szélsőséges veszteségek függőségi mutatója zérus, tehát azok függetlenek. Minél inkább közeledik a szabadságfok a 2-es (minimális) értékéhez, egyrészt annál inkább vastag eloszlásszélekkel rendelkeznek a portfóliót alkotó egyedi eszközök hozameloszlásai, másrészt pedig azok függősége egyre inkább erősödik, a veszteségek (nem várt szélsőséges események) együttes bekövetkezésének kockázata növekszik.

A bevezetőben már utaltunk rá, hogy az 1990-es évek végén megjelentek azok a modellek, melyek a huszadik század közepétől szinte egyeduralkodó Markowitz modellben alkalmazott portfólió variancián, mint kockázatmértéken túllépnek. Rockafellar és Uryasev a feltételes kockáztatott értéket (CVaR) minimalizáló modellt dolgozott ki (Rockafellar, R. T., Uryasev, S., (2000)). Az eljárás lényege, hogy rögzített hozamszint mellett a modell úgy optimalizálja a portfóliót, hogy a szélsőséges portfólió veszteség minimális legyen. Azt, hogy mit tekintünk szélsőséges veszteségnek —vagyis azt, hogy a sorbarendezett veszteségek közül a legnagyobbak közül mennyit veszünk figyelembe— mi magunk határozhatjuk meg. Az optimalizáló feladat lineáris programozási módszerrel oldható meg, és a Markowitz modellhez hasonlóan szerkeszthetők a hatékony felületek.

Esetünkben a fent említett lineáris programozási probléma az alábbiak szerint írható fel:

$$\min_{\mathbf{x},\psi}\left[-\psi+\frac{1}{[N\alpha]}\mathbf{e}^T z\right]$$

az alábbi feltételek mellett:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z} > \mathbf{y}\,,\\
&\mathbf{z} > \mathbf{0}\,,\\
&\mathbf{e}^T\mathbf{x} = 1\,,\\
&\mathbf{r}^T\mathbf{x} = R\,,\\
&\mathbf{z} \geq \mathbf{0}\,,
\end{aligned}$$

ahol

$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{e}\psi$ a ψ-t meghaladó veszteségek mértéke,
$\mathbf{y} \in R^n$ veszteségvektor,

$\mathbf{x} \in R^n$ súlyvektor,

ψ skalár mesterséges változó,

$\mathbf{e} \in R^n$ egységvektor,

N az adott tőzsdeindex hozamvektora elemeinek száma,

$1 - \alpha$ megbízhatósági szint,

$\mathbf{r} \in R^n$ várható hozam vektor,

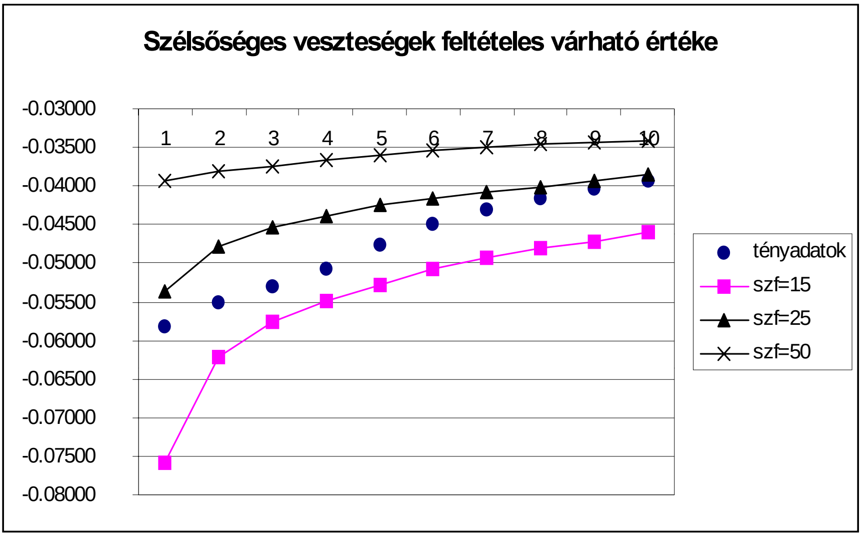
R a portfólió elvárt hozama,

$\mathbf{0} \in R^n$ null-vektor.

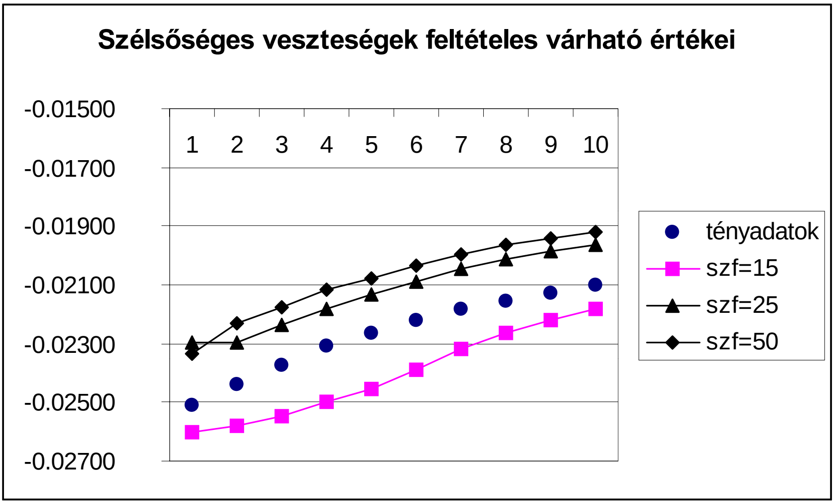
Létrehoztunk egy olyan indexportfóliót, amely $1 - \alpha = 0{,}995$ (99,5%-os) megbízhatósági szint mellett került optimalizálásra a fenti feladat szerint, ami azt jelenti, hogy egy körülbelül 1000-es ($N = 990$) mintanagyság esetén az öt legszélsőségesebb veszteség előfordulásának valószínűségét minimalizálja a modell relatíve magas elvárt napi hozam ($R = 0{,}0008$) mellett. Az eredményeket a *2. ábra* mutatja.

A 2. ábráról leolvasható, hogy amíg az egyenlő súlyozás (ld. 1. ábra) esetében a 15 szabadságfokú Student féle t-kopula jelentősen alábecsülte az extrém veszteségek miatti kockázatot, addig az optimalizált portfólió esetében már szignifikánsan túlbecsli azt. A szélsőséges portfólióveszteségeket a 15 és 25 szabadságfok közötti kopulák becslik jól.

Amennyiben csökkentjük az előírt hozamszintet ($R = 0$), kevésbé kockázatos portfóliókhoz juthatunk. Egy ilyen alacsony hozamú, következésképpen alacsony szélsőséges veszteségek miatti kockázatú portfólió elemzésének eredményeit mutatja a *3. ábra*.



2. ábra. Optimalizált, magas kockázatú portfóliók veszteségeinek modellezése t-kopulával



3. ábra. Optimalizált, alacsony kockázatú portfóliók veszteségeinek modellezése t-kopulával

A két optimalizált portfólió szélsőséges veszteségeinek modellezése alapján arra a megállapításra juthatunk, hogy mindkét esetben 15 és 25 szabadságfok közé esik annak a Student féle t-kopulának a szabadságfoka, amely jól közelíti a tényleges szélsőséges veszteségeket.

A fenti eredmények azt mutatják, hogy a szélsőséges portfólió veszteségnek két alapvető oka van. Egyrészt az egyedi hozameloszlások vastag eloszlásszél jellegét modelleztük azzal, hogy véges szabadságfokú ($\nu \ll 50$) Student féle t-marginális eloszlásokat alkalmaztunk, másrészt pedig a szélsőséges veszteségek —normálisnál nagyobb— együttes bekövetkezési valószínűségét modelleztük úgy, hogy a szélsőséges veszteségek függőségi struktúráját Student féle t-kopulával közelítettük. Láthattuk azt is, hogy a szabadságfok becslések jó próbáját adhatják a különböző portfólió optimalizáló modellek hatásosságának.

Irodalom

1. Acerbi, C., Tasche, D. (2002): „On the Coherence of Expected Shortfall", Working Paper, April 19, 2002, *http://www.gloriamundi.org/var/wps.html*
2. Fang, K. T., Kotz, S., K. W. Ng (1987): *Symmetric Multivariate and Related Distributions* Chapman & Hall, London.
3. Nelsen, R. (1999): *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
4. Rockafellar, R. T., Uryasev, S. (2000): „Optimalization of Conditional Value-at-Risk", *Journal of Risk* 2 (3).
5. Varga, J. (2004): „Kopulák alkalmazása a pénzügyi kockázatmenedzsmentben", *Szigma*, XXXV, 3-4. sz., 97-111.

ANALYSING EXTREME PORTFOLIO LOSSES USING COPULA

Integrated risk management (IRM) is concerned with the quantitative description of risks to a financial business. In this paper Student t copula was used as a practical instrument to generate Monte Carlo scenarios of extreme portfolio losses. It was found that the optimal degree of freedom of the Student copula lies between 15 and 25. It was also shown that the degrees of freedom's estimates serve as good test of efficiency for different portfolio optimization models.

TŐKEPIACOK KOCKÁZATI HATÁSAI A PÉNZÜGYI KONGLOMERÁTUMOKBAN[1]

SZÜLE BORBÁLA
Budapesti Corvinus Egyetem

A szakirodalom a pénzügyi konglomerátumokkal kapcsolatban gyakran a kockázatcsökkentési tendenciákra fókuszál. A tanulmányban a bankok és biztosítók együttműködésével létrejövő pénzügyi konglomerátumok kockázatához kapcsolódóan a kockázatvállalási döntésekkel foglalkozom. A Ph.D.-kutatásaim során kialakított elemzési kereten belül bemutatom, hogy a konglomerátumon belül létrejövő belső tőkepiac, illetve a külső finanszírozásra lehetőséget biztosító külső tőkepiac jellemzői befolyásolják a pénzügyi konglomerátumban létrejövő kockázatvállalás mértékét: a tanulmányban levezetem, hogy a résztvevő intézmények kockázatvállalásának optimális szintje a pénzügyi konglomerátum létrejöttekor növekedhet is.

Bevezetés

Ez az írás a pénzügyi konglomerátumok kockázatával foglalkozik. A bankok és biztosítók részvételével működő pénzügyi konglomerátumok térhódítása a fejlett országok egy részében az utóbbi években indult meg; szerteágazó hatásaik miatt a folyamat következtében előálló kockázat-változások pedig a kezdetektől a szakmai érdeklődés középpontjában álltak. A banki és biztosítási tevékenységgel is foglalkozó pénzügyi konglomerátumok létrehozása nem jelenti a két intézmény tőkéjének, illetve állományainak teljes egyesítését — az együttműködést számos szabály korlátozza, amelyek a különböző pénzügyi szolgáltatásokat igénybe vevők követeléseinek biztonságát is hivatottak védeni. Egyebek mellett az egy csoporton belül többféle pénzügyi intézményt kombináló szervezetek potenciális veszélyeit tekintve a bankok és biztosítók együttműködésén alapuló pénzügyi konglomerátumok kockázatainak vizsgálata az intézményi stabilitás esetleges változása miatt is időszerű téma. A tanulmány a következő kérdés megválaszolásához igyekszik hozzájárulni: a pénzügyi intézmények kockázata növekszik vagy csökken-e a pénzügyi konglomerátumok megjelenése révén?

A tanulmány a kockázat számos lehetséges aspektusa —például a bétához kapcsolódó elemzések [19], illetve egyéb mutatószámok [14]— közül a kockázatvállalásra gyakorolt hatásokkal foglalkozik. A témához kapcsolódó szakirodalomban viszonylag ritkák azok az írások, amelyek a banki és biztosítási tevékenység kombinálásával létrehozott szervezetek kockázatait elemzik. A tanulmányban ezt a kérdést egy —a Ph.D. disszertációmban bemutatott,

[1] Beérkezett: 2005. január 20. E-mail: `borbala.szule@uni-corvinus.hu`.

önálló fejlesztésű— elméleti modell keretében vizsgálom. A következőkben először pontosítom a vizsgált téma kereteit, amelyet a tanulmány eredményeinek bemutatása követ.

A pénzügyi konglomerátumok és kockázataik a gyakorlatban

Az Európai Unióban a pénzügyi konglomerátumok kockázataival foglalkozó direktíva [20] olyan csoportként definiálja a pénzügyi konglomerátumokat, amelyeknek egyik része a biztosítási szektorba, legalább egy másik része pedig a banki vagy befektetési szektorba tartozik:

> „financial conglomerate shall mean a group ... at least one of the entities in the group is within the insurance sector and at least one is within the banking or investment services sector."

Egy másik definíció [7] a pénzügyi konglomerátumok fogalmát a következőképpen határozza meg:

> „A pénzügyi konglomerátum a vállalkozások olyan, egységes irányítás és ellenőrzés alatt álló, egy gazdasági egységet képező csoportja, amelyen belül a vállalkozások által folytatott pénzügyi tevékenység meghatározó (kizárólagos vagy domináns) jelentőséggel bír, vagy e tevékenység a fokozott (a vállalkozások esetében általában nem alkalmazott) állami felügyelet szempontjából problémákat vet fel."

A pénzügyi konglomerátumok elterjedtsége tekintetében az egyes országok számottevően különböznek. Míg például az Egyesült Államokban 1999-ig (a Gramm-Leach-Bliley Act elfogadásáig) a bankok és biztosítók együttműködését jogilag is erőteljesen korlátozták, más országokban az 1990-es években már jelentős volt a pénzügyi konglomerátumok szerepe (Ausztráliában például 1996-ban a pénzügyi rendszer összes eszközállományának mintegy 80 százaléka tartozott pénzügyi konglomerátumokhoz,[2] [2]). Az Európai Unió tagállamaiban a pénzügyi konglomerátumok elterjedtsége szintén vegyes képet mutat: 2000-ben például Belgiumban és Hollandiában a bankbetétek területén a pénzügyi konglomerátumok részesedése meghaladta a 90 százalékot, míg ugyanez az arány ekkor Németországban 10 százalék körül volt [9]. Magyarországon tulajdonláson, illetve közös anyavállalaton keresztül megvalósuló együttműködés is megfigyelhető a hitelintézetek és biztosítók között (2003 végén az ezen együttműködésekben résztvevő hitelintézetek Magyarországon meghatározó piaci részesedéssel bírtak, [11]).

[2] Az ausztrál intézmények esetében pénzügyi konglomerátumnak a banki, biztosítási és alapkezelési (*funds management*) tevékenység közül legalább kettő tevékenységet végző intézményeket tekintették. A pénzügyi konglomerátumok leggyakoribb formája a banki és biztosítási tevékenységet kombinálta.

A pénzügyi konglomerátumok esetében a kockázat vizsgálata azért is fontos kérdés, mert a különböző kockázatok kezelése a bankok és biztosítók tevékenységének is központi területe. A bankok ,,klasszikus" tevékenysége abban áll, hogy betétek elfogadása és hitelek nyújtása révén közreműködnek a megtakarítások beruházásokká történő alakulásában, ami azt is eredményezi, hogy a bankok mérlegében az eszközök között jelentős szerepe van a hitelállománynak, míg a források között a betétek rendelkeznek nagy súllyal. (Magyarországon 2003 harmadik negyedévében például a bankszektor eszközállományán belül a hitelek 64 százalékot, a források között a betétek pedig 58 százalékot képviseltek, [15].) A banki kockázatokon belül a hitelkockázat jelentőségét támasztják alá egy témához kapcsolódó vizsgálat [13] eredményei is, amelyek szerint a bankok esetében a kockázati profilt meghatározó egyik legfontosabb tényező a piaci, illetve például a működési kockázatokon túl a hitelkockázat (a gazdasági tőke-szükséglet —economic capital— összességében 55 százalékban a hitelkockázatra vezethető vissza).

A bankok és biztosítók ,,klasszikus" tevékenységének kockázatai nagyrészt eltérnek egymástól: a biztosítók esetében a fő kockázati forrást a biztosítási szerződésekben meghatározott biztosítási kockázat és a díjtartalékok befektetéséből származó befektetési kockázat jelentik (erről részletesebb leírás [17]-ben és [18]-ban található). A biztosítóknál emellett különbség van az életbiztosítók és a nem-életbiztosítók között is [1]: a biztosítók kockázatait elemezve egy tanulmány [13] például megállapította, hogy a nem-életbiztosítások esetében a kockázati profilt erősebben befolyásolta a nem-életbiztosítási kockázat, mint amekkora hatása az életbiztosítások esetében az életbiztosítási kockázatnak volt. Az életbiztosítóknál a kockázati profilt nagyrészt a piaci, illetve ALM (Asset-Liability Management: eszköz-forrás menedzselési) kockázatok befolyásolták.

A gyakorlatban a bankok és biztosítók kockázatainak körében a ,,klasszikus" tevékenységükkel járó kockázatokon túli kockázatok is találhatók. A bankok esetében például az eszközök között az értékpapír-állománynak szerepe van a piaci kockázat megjelenésében, illetve a bankoknál és biztosítóknál egyaránt előfordulhatnak a másik intézménytől transzferált kockázatok is (a hitelkockázat a biztosítók felé például banki részvények vagy kötvények vásárlásával, a biztosítási kockázat a bankok felé pedig például katasztrófakötvények alkalmazásával transzferálható). A pénzügyi konglomerátumok kockázata alapvetően két forrásból származhat: egyrészt a biztosítók és a bankok eredeti kockázataiból, másrészt pedig azokból a hatásokból, amelyek a biztosító és a bank pénzügyi konglomerátumban történő együttműködése következtében jönnek létre. Az Európai Unióban a pénzügyi konglomerátumok kockázatainak felmérésével foglalkozó direktíva egyebek mellett ezzel összefüggésben a tőkemegfelelés, a kockázat-koncentráció, a csoporton belüli tranzakciók, illetve a belső kockázatkezelési eljárások területét érinti.

Korábbi kutatási eredmények

A tanulmány alapkérdése a pénzügyi konglomerátumok kockázatához kapcsolódik; ezzel összefüggésben pedig főként ahhoz, hogy a bankok és biztosítók tevékenységének (részleges) kombinálása növeli vagy csökkenti-e a kockázatvállalást. Ezt a kérdést a tanulmány a finanszírozási forrásokat jelentő tőkepiacok hatásának figyelembevételével vizsgálja. Az igénybevett források költségének az intézményi kockázatvállalással való kapcsolata (azaz a tőkepiaci ,,fegyelem"), illetve a belső tőkepiac kiterjedtsége alapján a tanulmány az optimális kockázatvállalás szintjének alakulását elemzi. A szakirodalom ezen témához kapcsolódó eddigi eredményei a tanulmányban felvázolt kérdésnek általában az egyik részét hangsúlyozzák; az eddigi elemzések főként vagy a pénzügyi konglomerátumok kockázatmódosító hatásával (például [6,3]), vagy pedig a tőkepiacok konglomerátumok működésére gyakorolt hatásával foglalkoztak (például [5]).

A szakirodalomban a bankok és biztosítók együttműködésének vizsgálatával kapcsolatban elterjedt a portfólióelméleti megközelítés (ennek alapjait [10] írja le), amely a kockázatcsökkenés mértékét az egyes befektetési lehetőségek hozamai közötti korreláció mértékével hozza összefüggésbe. Ezen elméletnek a pénzügyi konglomerátumok kutatásában való megjelenését az jellemzi, hogy a bankok és biztosítók együttműködésének kockázatcsökkentő hatását hangsúlyozzák, amennyiben az empirikus vizsgálatok a két intézmény hozamai között alacsony korrelációt mutatnak (például [6]).[3]

Az egyik probléma ezzel a megközelítéssel az, hogy a tényleges hatások köre szélesebb is lehet, mint ami az elmélet keretei között előfordulhat. A pénzügyi konglomerátumok kockázataival foglalkozó egyes szerzők [3] a kockázatcsökkentő hatáson túl a kockázat növekedése irányába ható tényezőkre is felhívják a figyelmet: leírásuk szerint a kockázat növekedhet, ha a két intézmény között olyan együttműködés van, amely alapján bármely intézmény problémái a másik (egyébként ,,egészséges") intézményt is érintik — ez ekkor a problémák pénzügyi szektorok közötti átterjedését is jelentheti. A portfólióelmélettől különböző szemléletben [8] szintén a kockázatváltozás egyik lehetséges irányát emeli ki: a bank és biztosító néhány kiválasztott jellemzője alapján egy periódusos modellben, általában konstansnak feltételezett paraméterek mellett azt mutatja be, hogy az együttműködés során a tevékenység kockázata a modell paramétereinek megfelelő beállítása esetében csökkenhet. Általában véve az előző tanulmányok hiányossága, hogy nem foglalkoznak részletesen a pénzügyi konglomerátumot alkotó intézmények döntéshozatali mechanizmusaival, illetve néhány kérdést (például a belső tőkepiac hatásait) figyelmen kívül hagyják.

A tőkepiacok jellemzőinek a vállalatok értékére gyakorolt hatásával foglalkozó szakirodalom már könyvtárnyi terjedelmű, ezen belül a konglome-

[3] Az említett tanulmányok esetében a hozam többnyire a banki és biztosítási tevékenység, valamint az eszközök befektetésének eredményességét is tükrözi, azonban mivel az elemzésekben szereplő intézmények között gyakran nincsenek tulajdonosi kapcsolatok, így a közös tulajdonláson alapuló pénzügyi csoportokban előforduló belső tranzakciók hatását ezen tanulmányok eredményei sok esetben nem tartalmazzák.

rátumok létrejöttéhez kapcsolódó írások is nagy számban vannak jelen. A pénzügyi konglomerátumok kockázatának elemzésekor ezen tanulmányok következtetései esetében az jelenti az egyik legfontosabb problémát, hogy a pénzügyi konglomerátumot alkotó pénzügyi intézmények (bankok, biztosítók) működése jelentősen eltér a nem pénzügyi vállalatokétól. Ezt a jelenséget szemlélteti az is, hogy miközben a nem pénzügyi vállalatok konglomerátumainak elterjedését egyes elméletek a külső finanszírozási forrást jelentő tőkepiac nem tökéletes (például aszimmetrikus informáltsággal jellemezhető) működésével hozták összefüggésbe,[4] a pénzügyi konglomerátumok fejlődése éppen a tőkepiac hatékonyabbá válásakor kezdett dinamikusabbá válni (mivel a nem pénzügyi vállalatok számára például maguk a bankok jelentik egy részét a külső finanszírozást lehetővé tevő tőkepiacnak, [12]).

A konglomerátumok létrejöttével foglalkozó publikációk között találhatók olyan írások, amelyek a kockázati hatásokkal foglalkoznak, ezek a tanulmányok azonban a pénzügyi konglomerátumokban résztvevő bankok és biztosítók működési sajátosságaiból adódó hatásokat még nem vizsgálták részletesen. Ezen tanulmányok közül például [5] modelljében a nem pénzügyi konglomerátumok kockázatával kapcsolatban a külső tőkepiac fegyelmének hatására hívja fel a figyelmet. Ez a modell feltételezi, hogy a konglomerátumot két részleg alkotja, amelyek közül az egyik pénzáramlása exogén módon adott, a másik pedig megvalósít egy egy periódus múlva hozamot realizáló projektet úgy, hogy a részleg vezetője dönt a projekttel kapcsolatos (költséges) monitorozás intenzitásáról, ami befolyásolja a projekt kockázatát. A monitorozás intenzitásától függően meghatározható az egyes részlegek, illetve a konglomerátum forrásköltsége, illetve adott a projektet megvalósító részleg későbbi működtetésének várható értéke is. Ilyen feltételek mellett meghatározható a projekt monitorozási intenzitásának optimális mértéke, amely a modellben a kockázatról, illetve a kockázatvállalásról nyújt információt. Ezen modell egyik fő következtetése, hogy a konglomerátumban az előbb bemutatott módon definiált kockázat (amit a monitorozási intenzitás jelez) elsősorban gyenge tőkepiaci fegyelem és néhány egyéb feltétel együttes megléte esetén csökkenhet, egyéb esetekben a kockázat növekedhet. E modell következtetéseinek pénzügyi konglomerátumokra való alkalmazását nehezíti, hogy az elemzés kerete (például a modell specifikációja, a kockázat definíciója) nem veszi figyelembe a bankok és biztosítók tevékenységének speciális jellemzőit. A tanulmányban a következőkben szereplő modell kimondottan a bankok és biztosítók sajátos működési feltételei által meghatározott körülmények között mutatja be a pénzügyi konglomerátumok kialakulása következtében potenciálisan létrejövő kockázati hatásokat.

---

[4]Ekkor a konglomerátum létrejöttével kevésbé volatilissé válhat a vállalati pénzáramlás, aminek következtében kevésbé lesz szükség a nem tökéletesen működő külső tőkepiaci finanszírozásra, így végső soron a forrásköltség (vagyis például a finanszírozási források után fizetendő kamat) csökkenhet.

A modell feltételrendszere

A korábbi szakirodalom áttekintése után ez a rész a tanulmány elméleti eredményeinek levezetésére alkalmazott keret ismertetését tartalmazza. A bemutatott modell a szakirodalomban eddig megjelent, a bankok és biztosítók működésével foglalkozó elméleti írások alapjairól kiindulva olyan keretet alakít ki a tanulmányban felvetett kérdés elemzésére, amelyet ilyen formában tudomásom szerint még nem mutattak be és nem is publikáltak. A modellezés során arra törekedtem, hogy a banki és a biztosítási tevékenységek legfontosabbnak tartott vonásait emeljem ki. A modell emiatt nem vállalkozik arra, hogy a gyakorlatban tapasztalható helyzetek pontos mása legyen, ehelyett a banki és biztosítási tevékenység legfontosabb vonásainak együttes hatása következtében kialakuló főbb tendenciák és jelenségek bemutatását célozza. Mivel a modell csak a legfontosabb sajátosságok kiemelésére törekszik, ezért a modell alapján előállított eredmények közül azok lehetnek igazán érdekesek, amelyek a potenciális kedvezőtlen folyamatokra hívják fel a figyelmet.

A modellben alkalmazott fontosabb definíciók

A kockázatvállalást a modellben a bank által megállapított hitelkamat méri. A (kereskedelmi) bankok kockázatának egyik meghatározó tényezője a hitelkockázat, amely a modellben a banktól felvett hitelek visszafizetésének elmaradásaként nyilvánulhat meg.[5] A bank kockázatvállalásának növekedése a modellben azt jelenti, hogy a bank nagyobb hitelkamatot határoz meg, ezáltal pedig csökken a hitelvisszafizetés valószínűsége.

A modellben a bank működtetésében a bank saját tőkéjén túl további források is szerepet játszanak. A betétállományon túl a banknak a rövid távú likviditási problémák esetében likviditási hitelre, illetve a pénzügyi konglomerátumon belül hozzáférhető belső forrásokra lehet szüksége. A modellben *tőkepiacnak* nevezzük az intézmények finanszírozásában szerepet játszó egyes források beszerzésének helyét. A *külső tőkepiacról* való forrásszerzés a modellben azt jelenti, hogy a likviditási hitelt a bank nem a pénzügyi konglomerátumon belülről (a biztosítótól) szerzi be, hanem a banktól független piaci szereplőktől (például más bankoktól). A *belső tőkepiac* esetében a bank számára a pénzügyi konglomerátumban működő biztosító nyújt finanszírozási forrást (a modell figyelembe veszi azt is, hogy a belső tőkepiac méretét a gyakorlatban a jogi szabályozás többnyire erősen korlátozza).

A *forrásköltség* a modellben a különböző finanszírozási források után fizetendő kamatokat jelenti.

A *tőkepiaci fegyelem* a modellben azt mutatja meg, hogy a bank kockázatvállalásának hatása miként tükröződik a különböző források után fizetendő

[5] A gyakorlatban a hitelvisszafizetés valószínűségét több (például makrogazdasági, iparági, a hitelfelvevőre, illetve a hitelkonstrukcióra egyedileg jellemző) tényező együttesen határozza meg; a bank által meghatározott hitelkamat egyike ezeknek a tényezőknek. A bank által megállapított hitelkamatnak a hitelvisszafizetés valószínűségére gyakorolt hatása a modellben a banki döntéshozatal következményeinek elemzése érdekében jut kiemelt szerephez.

kamatokban (vagyis a kockázatvállalás hogyan hat a forrásköltségre). A tőkepiaci fegyelem hatását a külső és belső tőkepiac esetében elemzi a modell. A tőkepiaci fegyelem hiánya azt jelenti a modellben, hogy a bank kockázatvállalásának változása nem befolyásolja az érintett tőkepiaci forrásköltséget, a tőkepiaci fegyelem megléte pedig azt jelenti, hogy ha a bank kockázatvállalása nő, akkor az érintett tőkepiaci forrásköltség is emelkedik. Ha a tőkepiaci fegyelem erősödik, akkor ez a modellben azt jelenti, hogy a bank kockázatvállalása növekedésének hatására az érintett tőkepiaci forrásköltségben bekövetkező emelkedés nagyobb lesz, mint korábban. A tökéletes belső tőkepiaci fegyelem azt jelenti a modellben, hogy a belső tőkepiac fegyelme megegyezik a külső tőkepiac fegyelmével.

A bank modellje

A bankot alapvetően kereskedelmi banknak tekintjük: a bank betéteket gyűjt, amelyeket saját tőkéjével együtt —a likviditási szabályok alkalmazása mellett— hitelek nyújtására fordít. A modell feltevései szerint a betétesek a betéteket a hitelek visszafizetése előtt kivehetik a bankból.[6] A modellben a bank a hosszú távú hitelkihelyezések és a rövid távra elhelyezett betétek lejáratának különbözősége miatt rövid távon likviditási kockázatnak van kitéve, amelynek kezelésére a likviditási tartalék szolgál (ezt a tartalék-előírásoknak megfelelően az aktuális betétállományt figyelembe véve képezik). A modell feltételezi, hogy a bank szükség esetén likviditási hitelhez juthat, amely esetében a fizetendő kamat tőkepiaci fegyelem meglétekor a bank kockázatvállalásának növekvő függvénye. A bankot a betétek piacán „árelfogadónak" tételezzük fel, ami azt is jelenti, hogy a betétgyűjtéssel történő forrásszerzés költsége nem változik a betétállomány növekedésével. A hitelállomány a feltételezések szerint azonos kockázatú hitelekből tevődik össze és azonos a felvett hitel összege is. A modellben a hiteleket vagy teljesen —kamatokkal együtt— visszafizetik, vagy pedig egyáltalán nem fizetik vissza a lejárat végén (a lejárat végéig a hitelek nem likvidek: a bank ezen eszközeit lejárat előtt nem tudja „pénzzé tenni"). A bank által meghatározott hitelkamat (r_H, $(1 + r_H) = R_H$)[7] a modellben a szakirodalom több írásában (például [4,16]) megfogalmazott feltevésekhez hasonlóan hatással van a hitelvisszafizetés valószínűségére. Jelölje ξ_{1j} a j-edik folyósított hitel esetében a következő (ka-

[6] A modell feltételezi a fejlett gazdaságokban elterjedt betétbiztosítási rendszer meglétét, így a betétekre fizetendő kamat nagyságát a bank kockázatvállalása nem befolyásolja. A modell feltevései alapján a betétesek értesülhetnek a bank által felszámított hitelkamat nagyságáról is, és a növekvő hitelkamat a betétesek egy részét a betétek visszavonására ösztönözheti még akkor is, ha a betétbiztosítási rendszer megléte miatt a betéteket kamattal együtt mindenféleképpen visszakapnák. A modellben a rövid távon a bankban megmaradó betétek arányát $x(R_H)$ jelöli; e függvényről feltételezzük, hogy az R_H szerinti első és második deriváltja is negatív.

[7] Az érdemi következtetések módosítása nélkül a jelölések egyszerűsítése érdekében az elemzésben r_H hitelkamat helyett az $R_H = 1 + r_H$ értéket alkalmazzuk. $R_H > 1$ azt a szorzószámot jelenti, amellyel a felvett hitel összegét megszorozva meghatározható a hitelvisszafizetés esetén a banknak járó pénzösszeg.

rakterisztikus) valószínűségi változót:[8]

$$\xi_{1j} = \begin{cases} 0, & \text{ha a hitelt visszafizetik} \\ 1, & \text{ha a hitelt nem fizetik vissza.} \end{cases}$$

Legyen ξ_{1j} valószínűsége $P(\xi_{1j}) = p_H(R_H)$, a folyósított hitelek száma n, és jelölje ξ_1 a ξ_{1j} valószínűségi változók összegét:

$$\xi_1 = \xi_{11} + \xi_{12} + \ldots + \xi_{1n} .$$

Ebben az esetben a ξ_1 valószínűségi változó eloszlása binomiális,[9] várható értéke pedig $np_H(R_H)$. A modellben feltételezzük, hogy

$$\frac{dp_H(R_H)}{dR_H} > 0 \quad \text{és} \quad \frac{d^2p_H(R_H)}{dR_H^2} > 0,$$

vagyis hogy ha a bank megemeli a hitelkamatot, akkor egy eredetileg magasabb szinten lévő hitelkamat esetében nagyobb mértékben növekszik a hitel vissza nem fizetésének esélye, mint egy eredetileg alacsonyabb szinten lévő hitelkamat esetében.[10]

A hitelek visszafizetését a modellben időben megelőzi a betétállomány egy részének esetleges visszavonása, így a hitelek visszafizetéséből befolyó összegnek a kamattal növelt betétállományon kifizetésén túl a visszavont betétállomány miatt felvett további hitelek (például a külső tőkepiacról bevont likviditási hitelek, vagy esetlegesen a belső tőkepiacról szerzett további források) kifizetésére is fedezetet kell nyújtania. A hitelek és kamataik visszafizetéséből a bank kötelezettségeinek kifizetése után megmaradó összeg (pénztöbblet) a bank profitja. A modell feltevései szerint a bank a kockázatvállalást jelentő döntéseivel a hitelek visszafizetésekor várható pénztöbbletének[11] (a várható profitjának) maximalizálására törekszik.

A biztosító modellje

A biztosító modellje a bankéhoz hasonlóan azon az elven alapul, hogy a modellnek a szektor legfontosabb jellemzőit kell kiemelnie. A biztosítások a gyakorlatban rendkívül sokféle formában jelenhetnek meg, a modell azonban nem deklarálja külön, hogy melyik biztosítási fajtáról van szó, hanem a biztosítási tevékenység általános vonásait (a bankokénál likvidebb eszközállományt és a bankokénál hosszabb futamidejű forrásállományt) emeli ki. A modellben a biztosító a biztosításmatematikai módszerek alapján megállapított egyszeri díjat beszedi a biztosítási szerződést kötő ügyféltől, amelyből díjtartalékot

[8] A hitelállomány felépítésének modellezése [8] modelljéhez hasonlóan történik.

[9] A karakterisztikus változók összegének eloszlása binomiális eloszlást ad.

[10] A hitel vissza nem fizetésének valószínűsége természetesen maximum 1 lehet.

[11] Az elemzés szóhasználatában a pénztöbblet és a profit fogalma hasonló értelemben fordul elő. A ,,pénztöbblet" kifejezés gyakoribb említésének a hátterében az áll, hogy kifejezőbbnek, illetve a ,,profit" kifejezéssel szemben a gazdasági szóhasználat más területein való ritkább alkalmazása következtében a jelenség leírására alkalmasabbnak tartottam.

képez és ezt saját tőkéjével együtt befekteti. A befektetési hozamok a modellben egy befektetési periódus során kétfélék lehetnek: a hozamok vagy ,,kedvezően", vagy ,,kedvezőtlenül" alakulnak; a befektetések tehát kockázatosak, ugyanakkor a feltevések szerint rövid távon likvidek is. A modellben jelölje ξ_{2j} a j-edik biztosítási kötvény esetében a következő (karakterisztikus) valószínűségi változót:

$$\xi_{2j} = \begin{cases} 1 & \text{, ha a } j\text{-edik kötvénynél bekövetkezik a biztosítási esemény} \\ 0 & \text{, ha nem következik be a biztosítási esemény.} \end{cases}$$

Legyen ξ_{2j} valószínűsége $P(\xi_{2j}) = p$, a biztosítási szerződések száma m, és jelölje ξ_2 a ξ_{2j} valószínűségi változók összegét:

$$\xi_2 = \xi_{21} + \xi_{22} + \ldots + \xi_{2m} \,.$$

Ebben az esetben a ξ_2 valószínűségi változó eloszlása binomiális, várható értéke pedig mp. A biztosítási kifizetések a biztosítási szerződésre jellemző valószínűségi változótól függnek, és időben a bank hiteleinek visszafizetésekor esedékesek.[12] A bank modelljéhez hasonlóan a biztosító esetében is kiszámítható a bank hiteleinek visszafizetése időpontjában esedékes pénztöbbletnek (a biztosító profitjának) a nagysága. A biztosító modellje alapján meghatározható azon összeg is, amelyet a jogszabályi korlátozások figyelembevételével a biztosító a bank számára a pénzügyi konglomerátum belső tőkepiacán a bankban befektethet.

A pénzügyi konglomerátum modellje

A pénzügyi konglomerátum a modellben definíciószerűen a bank és a biztosító intézményéből összeállított ,,szervezeti egység", amely azonban nem jogi egység: azt feltételezzük, hogy a bank és a biztosító ekkor ugyanazon (teljes egészében saját tőkéből finanszírozott) holdingtársaság 100 százalékos tulajdonában van. A feltételezések szerint a pénzügyi konglomerátumban résztvevő bank és biztosító eszközei teljesen elkülönülnek egymástól, azonban eredményük felett a holding rendelkezik. Ez azt jelenti, hogy például ha a banknak pozitív eredménye keletkezik miközben a biztosítónál nem tudnak minden fizetési kötelezettségüknek eleget tenni, akkor a bank pozitív eredményéből (amelyre a bankban a fizetési kötelezettségek kiegyenlítésénél már nincs szükség) a biztosítónál hiányzó összeget kifizethetik. Technikai szempontból ez a feltevés annyiban reálisnak tekinthető, hogy a bank nyereségével a tulajdonos (ebben az esetben a holding) rendelkezik, amely azt fordíthatja például a biztosítónál tőkeemelésre is. Ez a művelet ekkor a modellben a bank biztonságos működését sem veszélyezteti, mivel csak a keletkezett nyereséget vonhatják el a banktól, azokat az eszközöket nem, amelyek a betétesek felé fennálló, illetve az egyéb kötelezettségeik kiegyenlítésére

[12] A modellben azonban nincs közvetlen kapcsolat a banki hitelek és a biztosítási kötvények között.

szolgálnak.[13]

A pénzügyi konglomerátum működését a modellben tehát ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változó is befolyásolja. A pénzügyi konglomerátumban a bank kockázatvállalását befolyásoló fontos tényező, hogy a létrejövő belső tőkepiacon (a biztosító rövid távon is likvid eszközállománya miatt) a bank forrásokhoz juthat (természetesen csak a jogszabályokban meghatározott korlátozások figyelembevételével).

Egyéb feltevések

A modellben kitüntetett szerepe van a különböző feltételezett események és az idő kapcsolatának. A modellben adottnak tekintünk egy ,,hosszú" időtávot, amely egyrészt a banki hitelek lejáratát, másrészt pedig a biztosítási szolgáltatási kötelezettségek kifizetésének idejét is jelenti. A dolgozatban vizsgált modell ezen kívül kijelöl egy ,,rövid" időtávot is, amelynek végén a bank rövid lejáratú betétei esedékesek lehetnek; a rövid táv ilyen módon azokat az időpontokat reprezentálja, amikor a bankbetétek visszavonhatók lennének. A bank és a biztosító, valamint a pénzügyi konglomerátum működését tehát dinamikus modell keretében vizsgáljuk, ami azt jelenti, hogy a különböző hatásokat nem statikus módon, azaz egyetlen kiválasztott időpillanatban elemezzük, hanem ehelyett kiválasztunk egy kitüntetett jelentőségű időtávot (ez lesz az illikvid hitelek lejárati ideje) és az addig eltelő időszakot több részre bontjuk úgy, hogy a korábbi részperiódusban bekövetkezett események kihatnak a későbbi részperiódus eredményére is.

Eredmények

A tanulmány ezen része a bemutatott modellfeltevések mellett levezetett eredményeket tartalmazza. Az elemzések kiindulópontja az a helyzet, amelyben a bank és a biztosító az előzőekben leírt módon és különálló intézményként működik, a bank a külső tőkepiaci kapcsolatai során pedig nem szembesül a piaci ,,fegyelemmel", azaz a kockázatvállalási döntései nem hatnak a likviditási hitel után fizetendő kamat nagyságára (ennek értéke tehát az elemzés kezdő lépésében konstans). Ebben a helyzetben a bank hosszú távon, a hitelei lejáratakor várható pénztöbblete a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} B(R_H) \quad = \quad & nHR_H(1-p_H(R_H)) + B_0x(R_H)tR_B - B_0(R_B-1)x(R_H) - \\ & - B_0x(R_H)R_B - B_0(x(R_H)t + (1-x(R_H))R_B - tR_B)R_{likv} \end{aligned}$$

ahol:[14]

[13] Magyarországon az 1997. évi CXLIV.törvény 296.§ alapján a 100 százalékos tulajdonban lévő leányvállalat kötelezettségeiért még korlátolt felelősséggel rendelkező társaságok esetében is korlátlanná tehető az anyavállalat felelőssége.

[14] A modellben szereplő kamatok esetében az áttekinthetőbb írásmód érdekében az elemzésekben az egységnyi befektetésnek (illetve például hitelnek) a rá vonatkozó kamattal növelt értékei szerepelnek (tehát például r_H hitelkamat helyett az elemzésekben

n : a bank kihelyezett hiteleinek száma

H : egy kihelyezett hitel összege

R_H : a hitelek lejáratakor a hiteladós által egy egységnyi hitel után fizetendő teljes összeg ($R_H = (1 + r_H)$, ahol r_H a hitel teljes —hosszú távú— futamidejére vonatkozó kamat)

$p_H(R_H)$: a hitelnemfizetési valószínűség

B_0 : kezdeti betétállomány nagysága

$x(R_H)$: a modellben rövid távon a bankban megmaradó betétek aránya

t : a betétállomány kötelező tartalék-rátája

R_B : egységnyi betét elhelyezéséből származó összeg ($R_B = 1 + r_B$, ahol r_B a betétekre rövid távon járó kamat)

R_{likv} : egységnyi felvett likviditási hitel után fizetendő teljes összeg ($R_{likv} = 1 + r_{likv}$, ahol r_{likv} a kamat)

A bank hiteleinek visszafizetésekor befolyó összegek növelik a bank pénztöbbletét. A modell feltevései szerint a bank az aktuális betétállomány után likviditási tartalékot képez (a likviditási tartalék a tartalék képzésének időpontjában meglévő betétállomány t százalékát teszi ki), amelyet a hitelek lejáratakor szintén feloldhat.[15] A modellben a bank pénztöbbletét a bank által bevont idegen források (betétek és likviditási hitelek) után fizetendő pénzösszegek csökkentik.

Az előző részekben leírtak szerint feltételezzük, hogy $dp_H(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2p_H(R_H)/dR_H^2 > 0$, $dx(R_H)/dR_H < 0$ és $d^2x(R_H)/dR_H^2 < 0$.

A modellben a bank számára az a kockázatvállalási szint optimális, amely mellett a hitelek lejáratakor várható pénztöbblete maximális (a bank optimális kockázatvállalása tehát $B(R_H)$ függvény maximumának keresésével számítható ki; a levezetés menetét a Függelék tartalmazza):

$$R_H^{opt} = \frac{1 - p_H(R_H)}{\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} + \frac{dx(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(tR_B - 2R_B + 1 + R_B R_{likv} - tR_{likv})}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} .$$

A külső és belső tőkepiacok vizsgált jellemzőinek hatására a bank optimális kockázatvállalásának szintjében bekövetkező változást a továbbiakban ezen —a külső tőkepiaci fegyelem és a belső tőkepiac nélküli— esetben kiszámított optimális banki kockázatvállalási szinthez viszonyítjuk.

$R_H = 1 + r_H$ érték szerepel). A különböző befektetések (illetve például hitelek) esetében a modellben a számukra releváns periódus alatt az adott kamattal, illetve hozammal számított növekedés mértékének van jelentősége, így a modellben a kamatok, illetve a hozamok az adott befektetés (illetve például hitel) esetében releváns időtartamra vonatkoznak (R_H például azt mutatja meg, hogy az egységnyi felvett hitel törlesztésekor összesen mekkora összeget kell fizetnie a hiteladósnak).

[15] Amennyiben a modellben szereplő bank a későbbi —az elemzésekben nem vizsgált— időpontokban is folytatná tevékenységét, akkor a később bevont betétállomány egy részét ismét likviditási tartalékba helyezné.

A külső tőkepiaci fegyelem hatása

A modell keretei között a finanszírozásban a tőkepiaci fegyelem jelensége ahhoz kapcsolódik, hogy a forrásköltség (azaz a források után fizetendő kamat) mértéke hogyan függ össze a bank kockázatvállalásával. A bank saját tőkén kívüli forrásai a modellben betétek, külső tőkepiacon felvett likviditási hitelek vagy a pénzügyi konglomerátumokban a belső tőkepiacról kapott források lehetnek; ezeknek a forrásoknak a költsége (az utánuk fizetendő kamat mértéke) a modellben különbözően alakulhat. A modell feltételezi, hogy a betéteseknek fizetett kamat mértéke nem függ a bank kockázatvállalásától (amit például a betétbiztosítás rendszerének feltételezett megléte indokolhat). A pénzügyi konglomerátumon belül a biztosítótól kapott forrásokkal a következő részekben foglalkozunk, így a piaci fegyelem jelenségét ebben a részben a külső tőkepiacról felvett likviditási hitel vonatkozásában vizsgáljuk meg. A modellben a likviditási hitelek esetében a ,,piaci fegyelem" azt jelenti, hogy a forrásbevonás kamata függ a bank kockázatvállalásától; e kapcsolatot az $R_{likv}(R_H)$ függvény írja le. E függvény esetében a modell feltevései szerint $dR_{likv}(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2R_{likv}(R_H)/dR_H^2 > 0$, vagyis azt feltételezzük, hogy ha a bank nagyobb kockázatot vállal, akkor ennek következtében a likviditási hitelek után magasabb kamatot kell fizetnie, és ez a hatás a felszámított hitelkamat növekedése esetén erősödik. A külső tőkepiaci fegyelem feltételezése mellett a bank (hitelek lejáratakor esedékes) pénztöbbletének értékét maximalizáló, optimális kockázatvállalásának mértéke (R_H^{opt}) a következőképpen határozható meg (bizonyítás a *Függelékben*):

$$\frac{1-p_H(R_H)}{\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} + \frac{dx(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(tR_B - 2R_B + 1 + R_B R_{likv}(R_H) - tR_{likv}(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} - \\ - \frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(R_B(1-x(R_H)) - tR_B + tx(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} .$$

A modellben a külső tőkepiaci fegyelem hatásának figyelembe vétele nélkül szintén meghatározható volt a bank optimális kockázatvállalásának mértéke. E két optimális kockázatvállalási szint összevetésével a külső tőkepiaci fegyelem hatásáról juthatunk következtetésekre. Amennyiben az optimális kockázatvállalási szinteket leíró képleteket összehasonlítjuk, megállapítható hogy a bank optimális kockázatvállalását a külső tőkepiaci fegyelem esetében leíró képlet egy olyan tagot is tartalmaz, amely a kiinduló képletben nem volt jelen. Megállapítható, hogy ezen különbözet előjele negatív:

$$-\frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(R_B(1-x(R_H)) - tR_B + tx(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} < 0 .$$

A modell konstrukciójából adódóan, valamint $dp_H(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2p_H(R_H)/dR_H^2 > 0$, $dx(R_H)/dR_H < 0$ és $d^2x(R_H)/dR_H^2 < 0$, valamint $dR_{likv}(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2R_{likv}(R_H)/dR_H^2 > 0$ teljesülése következtében megállapítható, hogy a külső tőkepiaci fegyelem megléte, illetve erősödése esetén a bank optimális kockázatvállalása csökken. Ez a jelenség azzal függ össze, hogy a kockázatvállalás a külső tőkepiaci fegyelem miatt „költségesebb”, mint a kiinduló helyzetben: magasabb kockázatvállalás esetén nagyobb forrásköltséggel kell számolni.

A belső tőkepiac hatása

A konglomerátumok létrehozásakor a kockázatot befolyásoló egyik fontos hatás a belső tőkepiac jelenségéhez kapcsolódik. A belső tőkepiac megléte esetén a nem pénzügyi konglomerátum részlegei nemcsak a külső tőkepiacról juthatnak finanszírozási forrásokhoz, hanem felhasználhatják más részlegek rendelkezésre álló pénzeszközeit is. A pénzügyi konglomerátumok esetében a belső tőkepiac szerepe nagymértékben korlátozott; a bank és a biztosító működése során kiemelt szerepet kapnak az ügyfelek követeléseinek védelmével foglalkozó rendelkezések. A modellben a belső tőkepiac úgy jelenik meg, hogy a biztosító a bank számára rövid távon a likviditási igénye felmerülésekor forrásokat biztosíthat; a jogszabályi előírások alapján azonban legfeljebb a biztosító befektetésre szánt eszközeinek egy bizonyos hányada helyezhető el például bankbetétként. Ezen jogszabályi korlátozást olyan módon tartalmazzák a feltevések, hogy a biztosító befektetésre szánt eszközeinek legfeljebb meghatározott részét lehet a bank számára, rövid távú likviditási igényének fedezésére rendelkezésre bocsátani. A pénzügyi konglomerátumon belül létrejövő belső tőkepiacon a biztosítótól a bank a feltevések szerint $R_{bizt}(R_H)$ kamaton kaphat hitelt. A modell feltételezi, hogy $dR_{bizt}(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2R_{bizt}(R_H)/dR_H^2 > 0$, vagyis a belső tőkepiacon a külső tőkepiachoz hasonlóan érvényesül az, hogy a bank magasabb kockázatvállalása esetében nagyobb kamatot számítanak fel a banknak nyújtott forrás után, valamint a forrásköltség emelkedése egy eredetileg is magas kockázatvállalás további növekedése esetében nagyobb. A konglomerátum kockázata szempontjából a belső és a külső tőkepiac egymáshoz viszonyított fegyelmének kérdése az $R_{bizt}(R_H)$ és az $R_{likv}(R_H)$ egymáshoz képesti alakulásához kapcsolódik.

A pénzügyi konglomerátum létrejöttét követően a modellben jelölje $BIZT$ annak az összegnek a nagyságát, amelyet a jogszabályi korlátozások figyelembevétele mellett a biztosító a bank számára a betétek hitelvisszafizetés előtti időpontban történő visszavonása esetén forrásként nyújthat. A belső tőkepiac nagyságát és az intézmények közötti belső tranzakciókra vonatkozó jogszabályi korlátozások hatását is tükröző $BIZT$ értéke befolyásolja a bank hosszú távon várható pénztöbbletét, mivel csökkenti a külső tőkepiacról bevonandó források nagyságát. A bank hiteleinek visszafizetésekor a várható pénztöbbletének nagyságát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}B(R_H) &= nHR_H(1-p_H(R_H)) + B_0x(R_H)tR_B - B_0(R_B-1)x(R_H) - B_0x(R_H)R_B - \\ &- \Big(B_0(x(R_H)t + (1-x(R_H))R_B - tR_B) - BIZT\Big)R_{likv}(R_H) - BIZT R_{bizt}(R_H)\,.\end{aligned}$$

Amennyiben a bank ebben a helyzetben a hiteleinek lejárata időpontjában várható pénztöbbletét maximalizálja, az optimális kockázatvállalási szintje a következőképpen írható fel (levezetése röviden a Függelékben található):

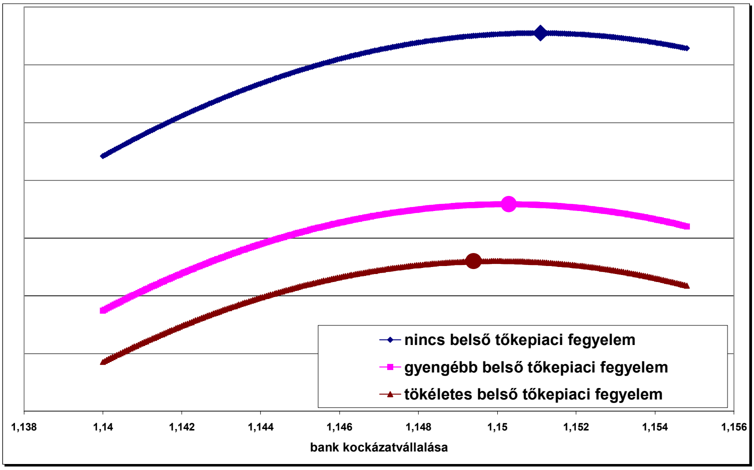
$$\frac{1-p_H(R_H)}{\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} + \frac{dx(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(tR_B - 2R_B + 1 + R_B R_{likv}(R_H) - tR_{likv}(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} -$$

$$- \frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(R_B(1-x(R_H)) - tR_B + tx(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} +$$

$$+ \frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{BIZT}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} - \frac{dR_{bizt}(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{BIZT}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}}.$$

A modell konstrukciójából adódóan, az előzőekben a külső tőkepiaci fegyelem esetében levezetett eredményeknél bemutatott feltevések mellett megállapítható, hogy a belső tőkepiac létrejötte mellett a bank optimális kockázatvállalása növekszik, ha a belső tőkepiac fegyelme alatta marad a külső tőkepiac fegyelmének (ha $dR_{likv}(R_H)/dR_H > dR_{bizt}(R_H)/dR_H$).

A kockázatnövekedés mértéke annál nagyobb, minél gyengébb a belső tőkepiac fegyelme a külső tőkepiac fegyelméhez képest, valamint minél nagyobb az az összeg, amelyhez a bank a belső tőkepiacon keresztül juthat. A kockázatnövekedési hatás mértéke ennek következtében minden egyéb tényező változatlanságát feltételezve emelkedik, ha a biztosító a bankhoz képest „nagyobb”, illetve a befektetési szabályok alapján a biztosító szükség esetén nagyobb összeget tud a bank rendelkezésére bocsátani. Az *1. ábra* a bank hosszú távon várható pénztöbbletét —$B(R_H)$ függvényt— mutatja különböző kockázatvállalási szintek mellett; az optimális kockázatvállalás mértékét e függvények maximumpontja reprezentálja:[16]



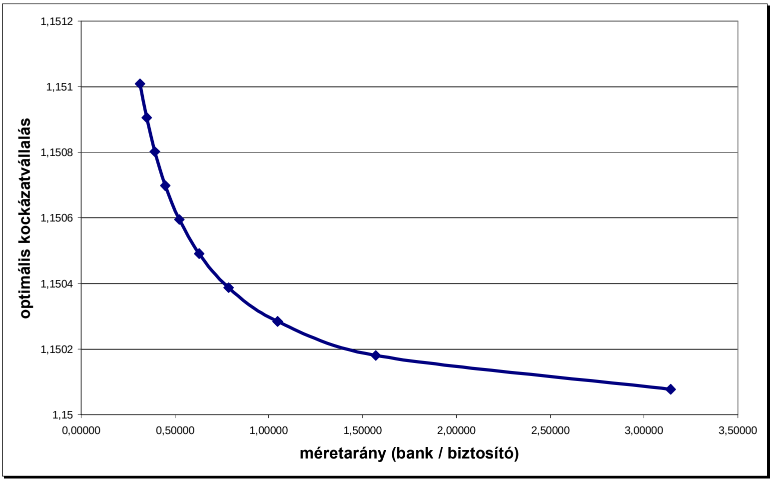
1. ábra. Optimális kockázatvállalási szint változása

[16] Az 1. ábra hipotetikus, az előzőekben bemutatott feltételeknek megfelelő függvényspecifikációk mellett kiszámított értékeket ábrázol.

Megállapítható, hogy a tökéletes belső tőkepiaci fegyelemhez képest (ez az az eset, amikor a belső tőkepiac fegyelme megegyezik a külső tőkepiac fegyelmével) a belső tőkepiac fegyelmének gyengülése a bank optimális kockázatvállalásának növekedését eredményezi.

A pénzügyi konglomerátumban a külső tőkepiacnál gyengébb fegyelemmel rendelkező belső tőkepiac létrejöttekor tehát a kockázatvállalási optimumot növelő hatások keletkeznek. Ezen hatások mértéke —ahogyan az az optimális banki kockázatvállalást leíró képletben is megfigyelhető— a tökéletesnél gyengébb belső tőkepiaci fegyelem esetén annál nagyobb, minél nagyobb a konglomerátumban megjelenő belső tőkepiac mérete. A *2. ábra* azt mutatja, hogy a banknak a biztosítóhoz képesti mérete hogyan befolyásolja a kockázatvállalási optimum mértékét.[17] A bank és a biztosító egymáshoz képesti arányát a grafikonon a bank és a biztosító mérlegfőösszegének hányadosa reprezentálja, ezen arány megváltozását (a grafikon előállítása során) a modellben a biztosító ügyfélállományának növekedése generálta.

Az eredmények azt mutatják, hogy a tökéletesnél gyengébb belső tőkepiaci fegyelem esetén a bank kockázatvállalásának optimális szintje a biztosító bankhoz képesti méretének növekedésével emelkedik; vagyis minél nagyobb az a belső tőkepiac, aminek a fegyelme gyengébb a külső tőkepiacénál, annál inkább növekedhet a bank kockázatvállalási optimuma. Ennek hátterében az áll, hogy ha a biztosító mérete (az ügyfelek számának növekedésén keresztül) növekszik, akkor a változatlan méretű bank a biztosítóhoz képest egyre kisebb lesz, vagyis a bank számára releváns belső tőkepiac hatása egyre jelentősebbé válik. A nagyobb belső tőkepiac jelenlétekor így ebben az esetben a bank kockázatvállalása a modellben levezetett eredmények alapján növekszik.



2. ábra. Optimális kockázatvállalás és méretarány

[17] A 2. ábra olyan függvényspecifikációk és paraméter-beállítások melletti értékeket mutat, amelyek megfelelnek az előzőekben bemutatott modellfeltevéseknek.

A modell eredményeinek helye a szakirodalomban

A tanulmány egy olyan modell keretében vezeti le az eredményeket, amely a bankok, a biztosítók, illetve a pénzügyi konglomerátumok működésével kapcsolatban számos absztrakciót alkalmaz. Ezen absztrakciók a valóságos helyzet jellemzőivel indokolhatók:

- A modell a bankok és a biztosítók esetében is kiválasztott fő tevékenységekre koncentrál (ez a bankoknál a betétgyűjtés és a hitelezés, a biztosítóknál pedig a biztosítási szerződések kötése, valamint a befizetett díjak befektetése).
- A modell figyelembe veszi, hogy a bankok és biztosítók eszközei közötti fontos különbség azok likviditása (a bankok hitelei kevésbé likvidek mint a biztosítók befektetései).
- Az eredmények levezetése során a modell figyelembe veszi, hogy a bankok és biztosítók forrásai között fontos különbség van azok lejárati idejében (a bankok forrásai jóval rövidebb lejáratúak, mint a biztosító forrásai).
- Ebből adódóan a modell figyelembe veszi azt is, hogy a bankok és biztosítók kockázatai szempontjából fontos szerepe van a rövid és a hosszú időtáv megkülönböztetésének (például mert a bankok rövid távon olyan kockázatnak lehetnek kitéve, amelynek a biztosítók nem).
- A pénzügyi konglomerátumban lehetséges belső tranzakciók esetében a modell figyelembe veszi az eszközök elkülönítésére vonatkozó fontos jogi korlátozásokat is.

A modell eredményei a szakirodalomban olyan szempontból egyediek, hogy az eddigi szakmai írások —tudomásom szerint— ilyen feltevésrendszer keretében még nem elemezték a pénzügyi konglomerátumok kockázati hatásait. A „klasszikus" portfólióelmélethez képest a bemutatott modell annyiban tér el, hogy figyelembe veszi azoknak a belső tranzakcióknak a szerepét is, amelyeket a klasszikus portfólióelmélet (például [10]) nem vizsgál. A nem pénzügyi vállalatok konglomerátumainak kockázatával foglalkozó írásoktól (például [5]) a modell olyan szempontból is különbözik, hogy a bank és a biztosító együttműködésénél figyelembe veszi azokat a jogi korlátozásokat, amelyek a bank és a biztosító eszközeinek elkülönítésére vonatkoznak. A bemutatott modell mind a klasszikus portfólióelmélet, mind pedig a nem pénzügyi konglomerátumok kockázatainak elméletével foglalkozó szakirodalom írásaitól eltér olyan szempontból is, hogy a bank és a biztosító *lényeges* jellemzőivel rendelkező keretben vezeti le az eredményeket. A pénzügyi konglomerátumok kockázataival alapvetően leíró szemléletben foglalkozó írásokhoz képest az eredmények eltérése az „optimális" döntések keresésében jelentkezik. A bemutatott modell sajátossága emellett (a modellben az idő kezelésében) a dinamikus szemléletmód is.

A modell keretében a pénzügyi konglomerátumban résztvevő bank esetében azt vizsgáltam, hogy annak kockázatvállalási döntése hogyan módosulhat a pénzügyi konglomerátum létrejöttekor. Az elemzés egyik fontos következtetése az, hogy a modell keretein belül a bank optimális kockázatvállalása a pénzügyi konglomerátumban való részvétel esetén a belső tőkepiac létrejöttekor növekedhet: a kockázatvállalás bank számára optimális szintjét a belső tőkepiac fegyelmének a külső tőkepiac fegyelméhez képesti csökkenése, valamint a tökéletesnél gyengébb belső tőkepiaci fegyelem esetén a belső tőkepiac méretének növekedése emeli.

Az elméleti modell gyakorlat számára megfogalmazható egyik fontos következtetése, hogy a pénzügyi konglomerátumokban létrejövő kockázatvállalási hatásokra a kockázatvállalás elfogadható szinten tartása érdekében érdemes külön figyelmet fordítani. Az elméleti modell megállapításai szerint a banki kockázatvállalásra csökkentőleg hat az, ha a külső tőkepiacon a banki kockázatvállalás növekedése a forrásköltség növekedésével jár. A gyakorlat számára az elméleti modell további következtetése, hogy a pénzügyi konglomerátumokban esetlegesen keletkező belső tőkepiac, illetve az itt létrejövő tranzakciók a banki kockázatvállalás szempontjából szintén figyelmet igényelnek. A bank számára optimális kockázatvállalási szint korlátozására az elméleti modell megállapításai szerint egyfelől a belső tőkepiac kiterjedtségének korlátozásával, másfelől pedig a belső tőkepiac fegyelmének növelésével (illetve a belső tőkepiaci tranzakciók egyes paramétereinek a külső tőkepiaci tranzakciók megfelelő jellemzőihez való közelítésével) nyílik lehetőség.

Függelék

1. A bank optimális kockázatvállalási szintjének levezetése (abban az esetben, ha nincs külső tőkepiaci fegyelem). A bank hosszú távon várható pénztöbbletét (ennek értékét jelölje $B(R_H)$) a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} B(R_H) \;&=\; nHR_H(1-p_H(R_H)) + B_0x(R_H)tR_B - B_0(R_B-1)x(R_H) - \\ &- B_0x(R_H)R_B - B_0(x(R_H)t + (1-x(R_H))R_B - tR_B)R_{likv} \end{aligned}$$

A bank optimális kockázatvállalásának meghatározásához a $B(R_H)$ függvény maximumát keressük. A $\frac{dB(R_H)}{dR_H} = 0$ feltétel felírása után a következő eredményt kapjuk:

$$nH\left(1-p_H(R_H) - R_H\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}\right) +$$

$$\frac{dx(R_H)}{dR_H}B_0(tR_B - 2R_B + 1) + \frac{dx(R_H)}{dR_H}B_0(R_B - t)R_{likv} = 0\ .$$

Ezt az egyenletet tovább alakítjuk:

$$nH\left(1-p_H(R_H) - R_H\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}\right) +$$

$$\frac{dx(R_H)}{dR_H}B_0(tR_B - 2R_B + 1 + R_BR_{likv} - tR_{likv}) = 0$$

Ezt az egyenletet R_H-ra rendezve kapjuk a bank optimális kockázatvállalását jelző értéket:

$$R_H^{opt} = \frac{1-p_H(R_H)}{\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} +$$
$$+ \frac{dx(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(tR_B - 2R_B + 1 + R_B R_{likv}(R_H) - tR_{likv}(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} .$$

Ahhoz, hogy belássuk: a kiszámított optimális hitelkamat csakugyan maximum, be kell látni, hogy $\frac{d^2B(R_H)}{dR_H^2}$ második derivált értéke a kiszámított optimumhelyen negatív. Ez a feltétel $dp_H(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2p_H(R_H)/dR_H^2 > 0$, valamint $dx(R_H)/dR_H < 0$ és $d^2x(R_H)/dR_H^2 < 0$ mellett teljesül.

2. A bank optimális kockázatvállalási szintjének levezetése (abban az esetben, ha van külső tőkepiaci fegyelem). A bank hosszú távon várható pénztöbbletét az előzőekben leírtakhoz hasonlóan $B(R_H)$ jelöli. A számítások során először $\frac{dB(R_H)}{dR_H} = 0$ feltételt írjuk fel, aztán ezt átrendezzük R_H-ra. A szélsőérték-feladat megoldását a $\frac{d^2B(R_H)}{dR_H^2} < 0$ feltétel ellenőrzése zárja. A $\frac{dB(R_H)}{dR_H} = 0$ feltétel felírása után a következő eredményt kapjuk:

$$nH\left(1 - p_H(R_H) - R_H\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}\right) + \frac{dx(R_H)}{dR_H}B_0(tR_B - 2R_B + 1) +$$
$$\frac{dx(R_H)}{dR_H}B_0(R_B - t)R_{likv} = 0 .$$

Ezt az egyenletet R_H-ra rendezve kapjuk a bank optimális kockázatvállalását jelző értéket:

$$\frac{1-p_H(R_H)}{\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} + \frac{dx(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(tR_B - 2R_B + 1 + R_B R_{likv}(R_H) - tR_{likv}(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} -$$
$$- \frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H} \cdot \frac{B_0(R_B(1 - x(R_H)) - tR_B + tx(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}} .$$

A kiszámított optimális hitelkamat esetében akkor van szó maximumról, ha belátható, hogy a $d^2B(R_H)/dR_H^2$ második derivált értéke a kiszámított optimumhelyen negatív. Ez a feltétel $dp_H(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2p_H(R_H)/dR_H^2 > 0$, $dx(R_H)/dR_H < 0$ és $d^2x(R_H)/dR_H^2 < 0$, valamint $dR_{likv}(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2R_{likv}(R_H)/dR_H^2 > 0$ mellett teljesül.

3. A bank optimális kockázatvállalási szintjének levezetése (abban az esetben, ha van belső tőkepiac). A bank hosszú távon várható pénztöbbletének értékét mutató $B(R_H)$ függvényt deriváljuk R_H szerint, a kapott eredményt rendezzük R_H-ra, majd megvizsgáljuk $B(R_H)$ függvény második deriváltjának előjelét, hogy a kapott eredmény csakugyan maximum-e. A bank optimális kockázatvállalását jelző érték:

$$\frac{1-p_H(R_H)}{\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}}+\frac{dx(R_H)}{dR_H}\cdot\frac{B_0(tR_B-2R_B+1+R_BR_{likv}(R_H)-tR_{likv}(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}}-$$

$$-\frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H}\cdot\frac{B_0(R_B(1-x(R_H))-tR_B+tx(R_H))}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}}+$$

$$+\frac{dR_{likv}(R_H)}{dR_H}\cdot\frac{BIZT}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}}-\frac{dR_{bizt}(R_H)}{dR_H}\cdot\frac{BIZT}{nH\frac{dp_H(R_H)}{dR_H}}.$$

A kiszámított optimális hitelkamat maximum, mivel a $dB_R^2(H)/dR_H^2$ második derivált értéke a kiszámított optimumhelyen negatív (ugyanis teljesülnek a következő feltevések: $dp_H(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2p_H(R_H)/dR_H^2 > 0$, $dx(R_H)/dR_H < 0$ és $d^2x(R_H)/dR_H^2 < 0$, valamint $dR_{likv}(R_H)/dR_H > 0$, $d^2R_{likv}(R_H)/dR_H^2 > 0$, $dR_{bizt}(R_H)/dR_H > 0$ és $d^2R_{bizt}(R_H)/dR_H^2 > 0$).

Irodalom

1. Antal, E.–Farkas, R.–Kovács, E. (2003): Európai biztosítási mozaik (1992-2000), *Biztosítási Szemle*, XLIX.évfolyam 10. szám, pp. 3–12.
2. Bain, E. A.–Harper, I. R. (2000): Integration of financial services: evidence from Australia. *North American Actuarial Journal*, Vol. 4. Number 3, pp. 1–19.
3. Bikker, J. A.–van Lelyveld, I. P. P. (2002): *Economic versus regulatory capital for financial conglomerates*, De Nederlandsche Bank, Research Series Supervision no. 45.
4. Blum, J. (1999): Do capital adequacy requirements reduce risks in banking?, *Journal of Banking & Finance* 23, pp. 755–771.
5. Boot, A. W. A.–Schmeits, A. (2000): Market discipline and incentive problems in conglomerate firms with applications to banking, *Journal of Financial Intermediation*, 9 (3)
6. Estrella, A. (2001): Mixing and matching: prospective financial sector mergers and market valuation. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 25. No. 12. pp. 2367–2392.
7. Dr. Ébli Györgyné–Márkus Judit–Dr. Zavodnyik József (1998): *A biztosítás jogi és gazdaságtani alapjai*, Pázmány Péter Katolikus Egyetem Jog- és Államtudományi Kar, Budapest
8. Kariya, T. (2000): *An effectiveness of integrated portfolio in bancassurance*, The Research Center for Financial Engineering, Institute of Economic Research, Kyoto University
9. van Lelyveld, I.–Schilder,A. (2002): *Risk in financial conglomerates: management and supervision.* De Nederlandsche Bank, Research Series Supervision no. 49.
10. Markowitz, H. M. (1991): *Portfolio selection, Efficient diversification of investments*, Basil Blackwell, 1991. (2.kiadás)

11. MNB (2004): *Jelentés a pénzügyi stabilitásról*, Magyar Nemzeti Bank, 2004. június
12. National Bank of Belgium (2002): *Financial conglomerates*, Financial Stability Review pp. 61–78.
13. OWC (2001): *Study on the risk profile and capital adequacy of financial conglomerates*, Oliver, Wyman & Company
14. Panning, W. H. (1999): The strategic uses of Value at Risk: long-term capital management for property/casualty insurers. *North American Actuarial Journal*, Vol. 3. Number 2. pp. 84–105.
15. PSZÁF (2003): *Beszámoló a felügyelt szektorok 2003. I-III. negyedévi működéséről*, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete
16. Stiglitz, J. E.–Weiss, A. (1981): Credit rationing in markets with imperfect information, *American Economic Review*, Vol. 71. pp. 393–410.
17. Szüle, B. (2004a): Biztosítók és pénzügyi konglomerátumok az Európai Unióban, *Biztosítási Szemle*, L. évfolyam, 5. szám, pp. 14–24.
18. Szüle, B. (2004b): Diverzifikáció és kockázat a pénzügyi konglomerátumokban, *Ph.D. disszertáció*, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem
19. Varga, J.–Rappai, G. (2002): Heteroszkedaszticitás és szisztematikus kockázat hatékony becslése GARCH modell alapján – a magyar részvénypiac elemzése, *Szigma*, XXXIII. évf. 3-4. szám
20. Directive 2002/87/EC of the European Parliament and of the Council of 16 December 2002 on the supplementary supervision of credit institutions, insurance undertakings and investment firms in a financial conglomerate amending Council Directives 73/239/EEC, 79/267/EEC, 92/49/EEC, 92/96/EEC, 93/6/EEC and 93/22/EEC, and Directives 98/78/EC and 2000/12/EC of the European Parliament and of the Council
21. 2003. évi LX.törvény a biztosítókról és a biztosítási tevékenységről
22. 1996. évi CXII. törvény a hitelintézetekről és a pénzügyi vállalkozásokról
23. 1997. évi CXLIV. törvény a gazdasági társaságokról
24. 2/2003. (PK. 14.) MNB rendelkezés a kötelező jegybanki tartalékról

CAPITAL MARKETS' RISK EFFECTS IN FINANCIAL CONGLOMERATES

Risk reducing effects are often mentioned in relation to the emergence of financial conglomerates. The risk of financial conglomerates involving a bank and an insurer component is a complex issue and risk increasing effects can also occur. In this paper —based on my Ph.D. thesis— I examine the risk taking decisions of a bank as a part of a financial conglomerate and I conclude that the optimal level of risk taking is related to the discipline and size of the emerging internal capital market in the financial conglomerate. By developing a new framework for analysing risk taking in financial conglomerates, the paper shows that increasing external capital market discipline reduces, decreasing internal capital market discipline and increasing internal capital market size increases the optimal level of risk taking of a bank as part of a financial conglomerate.

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság

ISSN 0039-8128