KRITÉRIUMOK PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIXOKRA[1]

KÉRI GERZSON
MTA SZTAKI

1 Bevezetés

Többszempontú döntési problémák kezelésének egyik kulcskérdése a páros összehasonlítás mátrixok elemzése, melynek eredményeképpen egy páros összehasonlítás mátrixot vagy elfogadunk, vagy pedig annak korrekcióját kérjük az értékelőtől. Az elemzés során alkalmas kritériumok alapján vizsgálhatjuk a páros összehasonlítás mátrixok következetességének a mértékét. A legelterjedtebb eljárás a Saaty [3] által javasolt módszer a *CR* következetlenségi hányados kiszámításán alapul, s e módszer szerint a páros összehasonlítás mátrixot akkor fogadjuk el jónak, ha *CR* értéke 0.1-nél kisebb. E módszert használja például az *Expert Choice* szoftver.

Gass [1] már évekkel ezelőtt felhívta a figyelmet arra, hogy páros összehasonlításokkal végzett rangsorolás során célszerű törekedni arra, hogy három elemből álló intranzitív ciklusok lehetőleg ne, vagy minél kisebb számban forduljanak elő. E gondolathoz kapcsolódva Gass leszögezi, hogy általánosan elfogadott elv a fellépő intranzitivitások elemzésének és lehetőség szerinti kiküszöbölésének a kívánalma. Ezután az idézett [1] cikk a páros összehasonlítás mátrixokkal, az intranzitivitások vizsgálatával és kezelésével foglalkozik azon megszorító feltétel mellett, hogy minden páros összehasonlítás döntést eredményez valamelyik összehasonlított objektum javára, tehát nem fordulnak elő azonos értékűnek vagy összehasonlíthatatlannak talált objektumok. A páros összehasonlítás mátrixára vonatkozóan ez a feltétel úgy fogalmazható meg, hogy a főátlón kívül a mátrixban nem lehetnek 1 értékű mátrixelemek.

A döntési rendszerek gyakorlati alkalmazásában jártas szakértők általában abban is egyetértenek, hogy a gyakorlatban előforduló döntési problémák esetén a tranzitivitás biztosítása, vagyis az intranzitív hármasok teljes megszüntetése, általában nem követelhető meg. Gass és Standard [2] kifejti és indokolja, hogy többszempontú döntések és kvalitatív szempontok esetén az összehasonlításoknak nem feltétlenül kell tranzitívnak lenniük. A szerzők megvizsgálják és a tranzitivitás szempontjából elemzik több gyakorlati feladat páros összehasonlítás mátrixát.

Véleményem szerint a kirívó mértékű intranzitivitásokat nem okvetlenül kell elfogadni, ezért törekedni kell arra, hogy az értékelők képesek legyenek a durvább intranzitivitásokat észrevenni és korrigálni az értékelés során. Ezért fordult figyelmem az objektumhármasok vizsgálatára. A dolgozatban Gass

[1] Beérkezett: 2005. augusztusztus 21.

[1] cikkéhez hasonlóan a páros összehasonlítás mátrixok gráf reprezentációja segítségével vizsgálom e mátrixokat és definiálom azok különböző típusait a 3x3 méretű részmátrixok tulajdonságai alapján. Az elvégzett elemzések és az azok alapján megfogalmazott eredmények jellegükben teljesen eltérnek az [1] cikk eredményeitől, és az is lényeges eltérés, hogy Gasstól eltérően nem teszem fel, hogy minden páros összehasonlítás döntést eredményez, tehát megengedek 1 értékű elemeket a mátrix főátlóján kívül is. Az AHP módszertant [3] nem elvetve, hanem azt kiegészítve, megfogalmazok néhány —egymástól többé-kevésbé eltérő— kritériumot, vizsgálom azok teljesülésének feltételét, továbbá útmutatási javaslatot adok a kritériumok alapján következetlennek talált páros összehasonlítás mátrixok javítására.

2 Értékelés páros összehasonlítással

Tekintsünk véges számú azonos típusú

$$O_1, O_2, \ldots, O_n$$

objektumot. Ezek lehetnek például egy döntési probléma alternatívái. Az objektumok meghatározott szempont szerinti, páros összehasonlítással végzett értékelése során az értékelő minden lehetséges $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ párra megállapítja, hogy az O_i, O_j objektumok közül a vizsgált szempontból melyik előnyösebb, mint a másik. A teljes körűen végrehajtott páros összehasonlítás eredménye egy

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

mátrix, ahol $a_{ij} = u(> 1)$, ha az O_i objektum u-szor előnyösebb, mint O_j, illetve $a_{ij} = v(< 1)$, ha az O_i objektum v-szer kevésbé előnyös, mint O_j. Ha az értékelő nem tudja megmondani, hogy O_i és O_j közül melyik előnyösebb, akkor $a_{ij} = 1$.

Egy A páros összehasonlítás mátrixra nyilvánvalóan teljesülnie kell az $a_{ij} > 0$ és $a_{ji} = 1/a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ relációknak. Az ilyen tulajdonságú A mátrixokat pozitív reciprok mátrixoknak nevezzük.

Definíció. *Az A mátrix pozitív reciprok mátrix, ha minden eleme pozitív, a főátlóra szimmetrikus elemek pedig egymás reciprokai.*

A fenti definícióból már következik, hogy a főátlóban álló elemek értéke 1. Az is nyilvánvaló, hogy egy pozitív mátrix akkor és csak akkor pozitív reciprok, ha a mátrixelemek logaritmusaiból álló mátrix antiszimmetrikus.

3 Páros összehasonlítás mátrixok gráfja

Definíció. *Egy pozitív reciprok A mátrix gráfjának nevezzük azt az n szögpontú G_A irányított gráfot, melynek i-edik csúcsából a j-edik csúcsába akkor és csak akkor vezet irányított él, ha $a_{ij} > 1$.*

A G_A gráf $A_1, A_2, \dots, A_n$ csúcsai az $O_1, O_2, \dots, O_n$ objektumoknak felelnek meg, abban az értelemben, hogy A_i-ból A_j-be akkor és csak akkor vezet él, ha az O_i objektum előnyösebb, mint az O_j objektum.

Pozitív reciprok A mátrixból kiindulva mindig olyan G_A gráfhoz jutunk, melynek egyik csúcspontjából sem vezet él önmagához, továbbá az i-edik csúcspontból a j-edikbe vezető és a j-edik csúcspontból a i-edikbe vezető lehetséges élek közül legfeljebb egy lehet G_A-nak éle.

Az A mátrix a G_A gráfot egyértelműen meghatározza, ennek megfordítása azonban nem igaz, mert már 2×2-es vagy 3×3-as méretben is könnyű konstruálni olyan különböző pozitív reciprok mátrixokat, melyekhez ugyanaz a gráf tartozik, ilyenek például 2×2-es méretben az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok, 3×3-as méretben pedig az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 5 \\ 1/4 & 1/5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok. A kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést úgy tudjuk biztosítani, ha a G_A gráf éleihez súlyokat rendelünk: a gráf tetszőleges irányított élének a súlya az él i, j végpontjaihoz tartozó a_{ij} és a_{ji} közül az 1-nél nagyobb értékű mennyiség. Most tekintsük át a 2×2-es és 3×3-as méretű páros összehasonlítás mátrixok gráfjának lehetséges eseteit, az élek súlyait egyelőre figyelmen kívül hagyva.

2×2-es méret esetén csak 2 lehetőség van; az egyik esetben a G_A gráf üres ($a_{12} = 1$), a másik esetben egyetlen éle van ($a_{12} \neq 1$).

3×3-as-as méret esetén a G_A gráfra a következő esetek lehetségesek:

a) 3 irányított él – 2 eset: G_1 és G_2 az 1. ábrán;

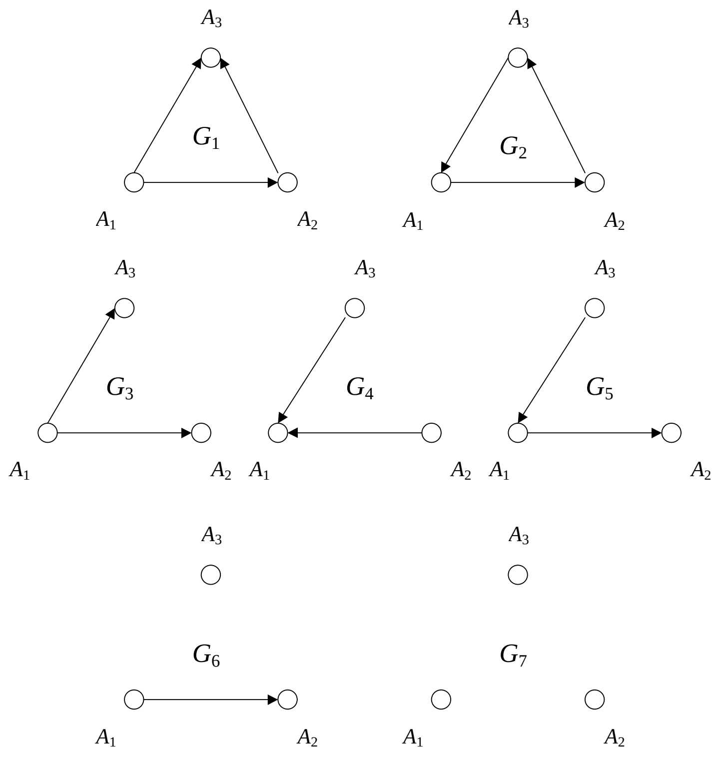
b) 2 irányított él – 3 eset: G_3, G_4 és G_5 az 1. ábrán;

c) 1 irányított él – 1 eset: G_6 az 1. ábrán;

d) 0 irányított él – 1 eset: G_7 az 1. ábrán.

Ennél nagyobb méretekre az esetek száma nagyon gyorsan növekszik, ezért nagyobb méretű döntési problémák esetén a páros összehasonlítási mátrixok gráfjában a 3 csúcsból álló részgráfok vizsgálatát javasoljuk a mátrixok elemzése során.

Itt, és a további tárgyalás során is, részgráf alatt mindig feszített részgráfot értünk, vagyis egy részgráf élei közé tartozónak tekintjük a kiindulásul vett gráf mindazon éleit, melyeknek mindkét csúcsa a részgráfhoz tartozik.



1. ábra.

4 Konzisztens és kvázi-konzisztens páros összehasonlítás mátrixok

Ideális esetben a páros összehasonlítás eredménye konzisztens, ami alatt azt értjük, hogy az eredményül kapott pozitív reciprok mátrix konzisztens a következő definíció értelmében.

Definíció. *Egy pozitív reciprok mátrix konzisztens, ha minden* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *párra – alkalmas pozitív* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *súlyokkal – teljesül* $a_{ij} = p_i/p_j$*.*

A fenti definícióból látszik, hogy konzisztens mátrix esetén az e mátrixot eredményező preferencia reláció aszimmetrikus, tranzitív és ráadásul negatívan is tranzitív: $p_i > p_j$, $p_j > p_k$ esetén mindig $p_i > p_k$, illetve $p_i \leq p_j$, $p_j \leq p_k$ esetén mindig $p_i \leq p_k$.

Kis n esetén ($n = 2, 3$, esetleg 4) még könnyű az n objektumot együttesen, ezek teljes rendszerét áttekintve "mérlegelni", s ennek alapján konzisztens összehasonlítás mátrix előállítását biztosítani, n növelésével azonban ez egyre nehezebbé válik. Az említettnél nagyobb méretek esetén tehát más módszerekre van szükség.

Példák konzisztens mátrixokra $n = 3$ esetén: Az 1. ábrán felsorolt gráfok közül G_2, G_5 és G_6 kivételével mindegyik tartozhat konzisztens mátrixhoz, például az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz rendre a G_1, G_3, G_4, illetve G_7 irányított gráf tartozik.

Könnyű belátni, hogy egy páros összehasonlítás mátrix akkor és csak akkor konzisztens, ha annak minden főátlóra szimmetrikus harmadrendű szubmátrixa konzisztens. Egy harmadrendű pozitív reciprok mátrix pedig – mint láttuk – akkor és csak akkor konzisztens, ha annak gráfja a G_1, G_3, G_4, G_7 gráfok valamelyikével izomorf. Következésképpen tetszőleges konzisztens mátrixhoz tartozó G_A gráf minden három szögpontú részgráfja G_1, G_3, G_4 és G_7 valamelyikével izomorf. Jó lenne ezt fordítva is tudni, vagyis felvetődik a kérdés: Igaz-e, hogy ha egy G irányított gráf minden harmadrendű részgráfja G_1, G_3, G_4, G_7 valamelyikével izomorf, akkor található olyan konzisztens pozitív reciprok mátrix, melynek gráfja az adott G gráf? A kérdésre „igen” a válasz, mert bebizonyítjuk a következő tételt.

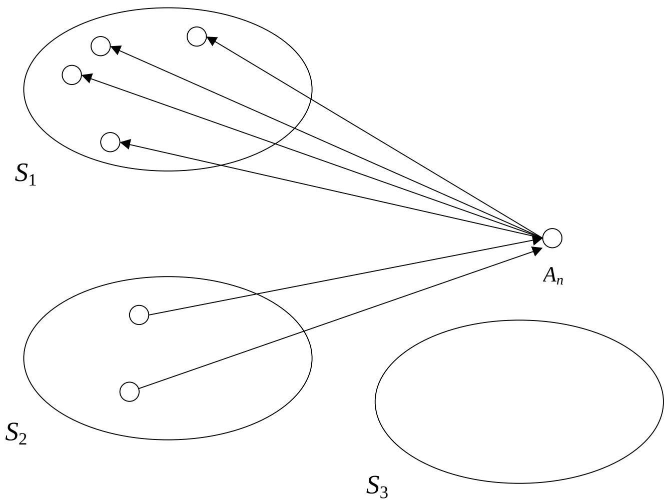
Tétel. *Ha G egy olyan irányított gráf, melynek bármely két csúcspontja között legfeljebb egy irányított él van és G minden harmadrendű részgráfja az 1. ábrán megadott G_1, G_3, G_4, G_7 valamelyikével izomorf, akkor a G gráf $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcsaihoz lehet olyan pozitív $p_1, p_2, \ldots, p_n$ súlyokat rendelni, hogy ezekre $p_i > p_j$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a G gráfban A_i-ből A_j-be vezet irányított él.*

Bizonyítás. A csúcsok számára vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk. Ha a G gráfnak 3 csúcsa van, akkor a tétel állítása nyilvánvaló. Ha a G gráf csúcsainak száma $n > 3$, akkor tekintsük a G-ből egy tetszőleges csúcs és az e csúcsba érkező vagy e csúcsból induló élek elhagyásával keletkező G' részgráfot.

Az indukciós feltevés szerint léteznek olyan $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ pozitív számok, hogy ezekre $p_i > p_j$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a G' gráfban A_i-ből A_j-be vezet irányított él.

A G' gráf $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ csúcsainak a halmazát bontsuk fel három diszjunkt halmaz: S_1, S_2 és S_3 egyesítésére a G-ben A_n-ből vagy A_n -be vezető élek létezése és iránya alapján, és legyen $A_i \in S_1$, ha A_n-ből A_i-be vezet él, $A_i \in S_2$, ha A_i-ből A_n-be vezet él, $A_i \in S_3$, ha sem A_n-ből A_i-be, sem A_i-ből A_n-be nem vezet él (l. 2. ábra).

Az így meghatározott S_1, S_2, S_3 halmazok bármelyike lehet üres halmaz is. A bizonyítást folytatva pontokba szedjük az egyes mozzanatokat.



2. ábra

1. Ha $A_i \in S_3$ és $A_j \in S_3$, akkor $p_i = p_j$. Ellenkező esetben ugyanis a G gráf A_i, A_j, A_n csúcsaihoz tartozó részgráf G_6-tal izomorf lenne.

2. Ha $A_i \in S_1$ és $A_j \in S_2$, akkor $p_j > p_i$. Ellenkező esetben a G gráf A_i, A_j, A_n csúcsaihoz tartozó részgráf G_2-vel vagy G_5-tel izomorf lenne.

3. Ha $A_i \in S_1$ és $A_j \in S_3$, akkor $p_j > p_i$. Ellenkező esetben a G gráf A_i, A_j, A_n csúcsaihoz tartozó részgráf G_5-tel vagy G_6-tal izomorf lenne.

4. Ha $A_i \in S_2$ és $A_j \in S_3$, akkor $p_i > p_j$. Ez az állítás az előbbihez hasonló módon bizonyítható.

5. Az előbbieket összefoglalva:

a) ha S_3 nem üres, akkor valamennyi S_3-beli csúcshoz azonos p_i súly tartozik;

b) bármely S_1-beli csúcs súlya határozottan kisebb bármely S_2-beli és S_3-beli csúcs súlyánál.

c) bármely S_2-beli csúcs súlya határozottan nagyobb bármely S_1-beli és S_3-beli csúcs súlyánál.

6. Ha az S_3 halmaz nem üres, akkor csak abban az esetben kapunk a tétel követelményének megfelelő $p_1, p_2, \ldots, p_n$ súlyrendszert, ha $p_n = p_k$, ahol $A_k \in S_3$.

7. Ha S_3 üres halmaz, de S_1 és S_2 nem üres, akkor A_n-hez olyan p_n súlyra van szükség, melyre

$$p_n > \max\{p_i : A_i \in S_1\}$$

és

$$p_n < \min\{p_i : A_i \in S_2\}.$$

Ilyen p_n érték létezik, mivel 5. szerint $\max\{p_i : A_i \in S_1\} < \min\{p_i : A_i \in S_2\}$.

8. Ha S_3 és S_2 üres halmaz, akkor legyen

$$p_n > \max\{p_i : A_i \in S_1\},$$

egyébként tetszőleges, ha pedig S_3 és S_1 üres halmaz, akkor legyen

$$p_n < \min\{p_i : A_i \in S_2\},$$

egyébként tetszőleges pozitív értékű szám.

A gondolatmenetből látható, hogy az indukciós feltevés alapján meghatározott $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ súlyokat a 6., 7. vagy 8. szerint választott p_n-nel kiegészítve a tétel követelményének megfelelő súlyrendszerhez jutunk. ∎

A bizonyításból az is látszik, hogy a G gráf csúcsainak ezek súlya alapján történő rendezése során az A_n csúcs egyértelműen sorolódik be vagy az S_3-hoz tartozó csúcsok mellé, ezekkel azonos súlyúnak (amennyiben az S_3 halmaz nem üres), vagy pedig az S_2-höz tartozó csúcsok után, de az S_1-hez tartozó csúcsok elé (ha az S_3 halmaz üres).

A következő definícióval bevezetjük a kvázi-konzisztens pozitív reciprok mátrix fogalmát, ami logikailag kapcsolódik az előbb bizonyított tételhez.

Definíció. *Egy pozitív reciprok A mátrix kvázi-konzisztens, ha található ugyanolyan méretű konzisztens $A^\star$ mátrix úgy, hogy tetszőleges i, j indexpárra teljesül, hogy $a_{ij} > 1$ (illetve $a_{ij} = 1, a_{ij} < 1$) esetén $a^\star_{ij} > 1$ (illetve $a^\star_{ij} = 1, a^\star_{ij} < 1$).*

Nyilvánvaló, hogy a 3×3-as méretű pozitív reciprok mátrixok közül azok és csak azok kvázi-konzisztensek, melyek gráfja G_1, G_3, G_4 vagy G_7 típusú. Ezért a fenti tételből következik, hogy ha egy pozitív reciprok mátrixban minden, a főátlóra szimmetrikusan elhelyezkedő, 3×3-as méretű szubmátrix kvázi-konzisztens, akkor a teljes mátrix is kvázi-konzisztens.

5 Tranzitív és erősen tranzitív páros összehasonlítás mátrixok

A következőkben bevezetjük a konzisztencia két lazább változatát. Közülük az elsőt pusztán a G_A irányított gráf alapján értelmezzük, ez tehát csak egy kvalitatív jellemzője az A mátrix következetességi fokának, a másodikhoz viszont figyelembe vesszük a G_A gráf irányított éleihez rendelt súlyokat is.

Ha a páros összehasonlítást végző értékelő azt mondja, hogy az O_i objektum előnyösebb, mint az O_j, ez utóbbi pedig előnyösebb, mint az O_k, akkor a logika szerint elvárhatjuk tőle, hogy az O_i és O_k objektumokat hasonlítva O_i-t is előnyösebbnek ítéli O_k-nál. Az ezen elvárásnak eleget tevő értékelések páros összehasonlítás mátrixát tranzitívnek nevezzük.

Definíció. *Egy pozitív reciprok A mátrix tranzitív, ha tetszőleges i, j, k indexhármasra teljesül, hogy $a_{ij} > 1$ és $a_{jk} > 1$ esetén mindig fennáll $a_{ik} > 1$ is.*

Tranzitív mátrixoknak a definícióból következő további nyilvánvaló tulajdonságai:

$$a_{ij} < 1 \text{ és } a_{jk} < 1 \text{ esetén mindig } a_{ik} < 1;$$
$$a_{ij} = 1 \text{ és } a_{jk} > 1 \text{ esetén mindig } a_{ik} \geq 1;$$
$$a_{ij} = 1 \text{ és } a_{jk} < 1 \text{ esetén mindig } a_{ik} \leq 1;$$
$$a_{ij} > 1 \text{ és } a_{jk} = 1 \text{ esetén mindig } a_{ik} \geq 1;$$
$$a_{ij} < 1 \text{ és } a_{jk} = 1 \text{ esetén mindig } a_{ik} \leq 1.$$

A logika alapján elvárható az is, hogy ha az értékelést végző személy ítélete szerint az O_i objektum előnyösebb, mint O_j, ez pedig u-szor előnyösebb, mint O_k, akkor O_i is legalább u-szor előnyösebb, mint O_k, vagyis $a_{ij} > 1$ -ből következik, hogy $a_{ik} \geq a_{jk}$. Ennek alapján bevezetjük a következő definíciót:

Definíció. *Egy pozitív reciprok A mátrix erősen tranzitív, ha tetszőleges olyan i, j indexek esetén, melyekre $a_{ij} > 1$, minden k-ra fennáll az $a_{ik} \geq a_{jk}$ egyenlőtlenség.*

Az erősen tranzitív mátrix fogalma már nem tisztán kvalitatív tulajdonságot fejez ki, ezért a mátrix gráfjára történő ekvivalens átfogalmazás most önmagában a G_A gráfra nem értelmezhető, hanem csak a —3. szakaszban leírt módon— él-súlyokkal ellátott gráfra.

Definíció. *Egy pozitív reciprok A mátrixból származtatható G_A gráf (illetve él-súlyokkal ellátott G_A gráf) tranzitív (illetve erősen tranzitív), ha maga az A mátrix tranzitív (illetve erősen tranzitív).*

A definició folytán nyilvánvaló, hogy egy pozitív reciprok mátrix akkor és csak akkor tranzitív (erősen tranzitív), ha minden harmadrendű, főátlóra szimmetrikus részmátrixa tranzitív (erősen tranzitív).

Az is nyilvánvaló a három mátrixosztály (konzisztens, tranzitív, illetve erősen tranzitív mátrixok) definíciója alapján, hogy minden konzisztens mátrix erősen tranzitív, és minden erősen tranzitív mátrix tranzitív.

A harmadrendű pozitív reciprok mátrixokhoz tartozó, az 1. ábrán felsorolt gráfokat végignézve látjuk, hogy közülük a G_1, G_3, G_4, G_6 és G_7 gráfok tranzitív, a G_2, és G_5 gráfok nem tranzitív mátrixhoz tartoznak. Kimondható tehát a következő állítás:

Tétel. *Egy G_A irányított gráf akkor és csak akkor tranzitív, ha a gráf három csúcsból álló részgráfjai között nem fordul elő sem G_2-vel, sem G_5-tel topológiai értelemben ekvivalens gráf.*

Eszerint a konzisztens, illetve tranzitív mátrixok gráfjai közötti eltérés úgy is megfogalmazható, hogy az utóbbiak esetén megengedjük a három csúcsból álló részgráfok között G_6 előfordulását is, az előbbiek esetén nem engedjük meg.

Az A mátrixhoz tartozó él-súlyozott G_A gráf erős tranzitivitása is kifejezhető a három csúcsból álló él-súlyozott részgráfok segítségével. Az 1. ábra esetein végigfutva, rövid diszkusszió elvégzésével azt látjuk, hogy a G_2 és G_5 gráf semmilyen súlyozással nem lehet erősen tranzitív, a G_6 és G_7 gráfok viszont eleve erősen tranzitívak, a súlyozástól függetlenül. A G_3, illetve G_4 gráf akkor és csak akkor erősen tranzitív, ha a bennük lévő 2 él súlya azonos. Végül, a G_1 gráf akkor és csak akkor erősen tranzitív, ha az élek súlyaira teljesül $a_{13} \geq \max\{a_{12}, a_{23}\}$. Az fentiekből következik az alábbi állítás helyessége:

Tétel. *Egy pozitív reciprok mátrixhoz tartozó, él-súlyokkal ellátott G_A irányított gráf akkor és csak akkor erősen tranzitív, ha a gráf három csúcsból álló részgráfjai között nem fordul elő sem G_2, sem G_5 típusú gráf, az összes G_3 és G_4 típusú részgráf 2-2 élének súlya azonos ($a_{12} = a_{13}$, illetve $a_{21} = a_{23}$), az összes G_1 típusú részgráf él-súlyaira pedig teljesül $a_{13} \geq \max\{a_{12}, a_{23}\}$.*

Megjegyezzük, hogy konzisztens mátrixok esetén a tranzitivitás nemcsak a “$>$”, hanem a “$\geq$” relációra nézve is fennáll, azaz tetszőleges i, j, k indexhármasra teljesül, hogy $a_{ij} \geq 1$ és $a_{jk} \geq 1$ esetén mindig $a_{ik} \geq 1$. A konzisztens mátrix fogalmában tehát egy erősebb tranzitivitás testesül meg, mint a tranzitív mátrix fogalmában. Mivel azonban az előbbieket a konzisztens jelző már kategorizálja, a tranzitív szó szabad marad az előbbi definíció szerinti gyengébb tranzitivitás jellemzésére.

Az értékelési eljárás során a “$\geq$” relációra vonatkozó tranzitivitás teljesítését nem volna helyes elvárni az értékelőktől, amit a következő gondolatmenettel indokolhatunk:

Mivel az összehasonlítások számszerűsítése általában diszkrét (gyakran csak verbálisan kifejezett) skálán történik, nem zárhatjuk ki az olyan eseteket, amikor objektumok valamely $O_1, O_2, \ldots, O_k$ láncára ennek szomszédos elemei között az értékelő nem lát különbséget a vizsgált szempont alapján, ha történetesen a lánc minden tagja csak picivel előnyösebb az előzőnél, azonban könnyen lehetséges, hogy ugyanakkor a két szélső elem (O_1 és O_k) között már egyértelműen és markánsan észlelhető a különbség. Természetesen sok más (többnyire szubjektív) oka is lehet annak, hogy a tranzitivitás nem mindig teljesül az értékelési folyamat során.

6 Konklúzió

Páros összehasonlítás alapján készített pozitív reciprok mátrixok esetén ezek elemzésére használhatjuk a cikkben bevezetett három másik konzisztencia típust. Az elemzés során azt vizsgálhatjuk, hogy a páros összehasonlítás eredményeként kapott mátrix megfelel-e az enyhébb konzisztencia típusok valamelyikének, ha nem, akkor hol és milyen mértékben tér el azoktól? A bevezetett fogalmak haszna lehet az is, hogy – míg diszkrét pontozási skála esetén a klasszikus konzisztencia elvileg nem biztosítható – a három enyhébb konzisztencia típus esetén viszont általában biztosítható.

Felvetjük megfontolásra a páros összehasonlítás mellett triók (objektumhármasok) összehasonlításának a módszerét (amit lényegében már Gass [1] is felvetett): Bármely X, Y, Z objektum-hármas esetén az értékelő válasszon a következő lehetőségek között: 1. X, Y, Z mindegyike egyformán előnyös; 2. kettő közülük, pl. X és Y egyformán előnyös, Z azonban még előnyösebb mindkettőnél; 3. X és Y egyformán előnyös, Z azonban kevésbé előnyös mindkettőnél; 4. X, Y és Z sorrendbe állítható, pl. X előnyösebb, mint Y és Z, Y pedig előnyösebb, mint Z.

Irodalom

1. S. I. Gass, Tournaments, transitivity and pairwise comparison, *J. Op. Res. Soc.*, 49(1998) 616–624.
2. S. I. Gass and S.M. Standard, Characteristics of positive reciprocal matrices in the analytic hierarchy process, *J. Op. Res. Soc.*, 53(2002) 1385–89.
3. T. L. Saaty, *The analytic hierarchy process. Planning, priority setting, resource allocation.* McGraw-Hill, New York, 1980.

CRITERIA FOR PAIRWISE COMPARISON MATRICES

The aim of the paper is to give a small contribution to the methodology of analyzing pairwise comparison matrices. For this purpose, we define several suitable classes of positive reciprocal matrices based on mainly the qualitative feature of triads of a pairwise comparison matrix. Using a graph representation of a pairwise comparison matrix, graph theoretic approach is applied for the argumentation. This is especially useful for proving the theorem in Section 4.