AZ L-NASH MEGOLDÁS IMPLEMENTÁCIÓJÁRÓL KÉTSZEMÉLYES ALKUPROBLÉMÁK ESETÉN[1]

FORGÓ FERENC
Budapesti Corvinus Egyetem

A ,,Nash program” célkitűzése, hogy minden axiomatikusan meghatározott kooperatív játék megoldását egy megfelelő nemkooperatív alkujáték részjáték tökéletes Nash egyensúlypontjaként is elő tudjuk állítani. Ebben a cikkben az úgynevezett L-Nash megoldást vizsgáljuk ebből a szempontból. A kétszemélyes alkuproblémák egy széles osztálya esetén bebizonyítjuk, hogy az L-Nash megoldás kooperatív alkujáték egyensúlyi kifizetéseként való előállítására minden olyan implementálás alkalmas, amely magát a Nash alkumegoldást is elő tudja állítani. A problémák egy másik osztálya esetében az L-Nash megoldást aszimptotikusan állítja elő Rubinstein váltakozó ajánlattételes alkujátékának megfelelő módosítása.

1 Bevezetés

Több, mint ötven év telt el Nash iránymutató munkáinak (Nash (1950), (1953)) megjelenése óta, de az a kutatási irány, amelyet meghirdetett, és amely *Nash-program* néven vált közismertté, még mindig újabb és újabb eredményeket produkál és mintegy iránytűül szolgál azok számára, akik játékelméleti kutatásaikban egy modellt, vagy megoldáskoncepciót két oldalról is meg szeretnének közelíteni. Ennek a vizsgálati módszernek a legkitűnőbb példáját maga Nash adta, aki a kétszemélyes kooperatív játékok axiomatikus és alkumodellként való elemzését összekapcsolta, ezzel példát mutatva a kooperatív és nemkooperatív játékelmélet együttes alkalmazására.

A Nash által vizsgált modell egyszerű, minden sallangtól megtisztított és csak a lényegre koncentrál: hogyan egyezhet meg két játékos abban, hogy a lehetséges kimenetelek halmazából (a hasznossági térben) mely elemet válasszák ki közös megegyezéssel. Tudván azt, hogy ez a megegyezés valamilyen alkufolyamat eredménye lehet, a problémát *alkumegoldásnak* (bargaining solution) nevezte.

Jelöljük F-fel a lehetséges kimenetelek (kifizetések) halmazát és $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$-vel az *egyet nem értési* (disagreement) kifizetést. Az $(F, \mathbf{d})$ párost, ahol $F \subset I\!R^2_+$, $\mathbf{d} \in I\!R^2$, kétszemélyes *alkuproblémának* nevezzük. Feltesszük, hogy F konvex, kompakt és van olyan $\mathbf{x} \in F$, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{d}$. Ez egy kicsit kevésbé általános megfogalmazás, mint Nashé, de a lényeget nem érinti. A (kooperatív) játék abból áll, hogy a két játékos tárgyal egymással arról,

[1]Beérkezett: 2006. október 22. A kutatás az OTKA T046194 pályázat keretében készült. E-mail: `ferenc.forgo@uni-corvinus.hu`.

hogy F melyik elemét válasszák. Ha sikerül megegyezni, és a választás $\mathbf{x}^* \in F$, akkor az első játékos megkapja az x_1^* kifizetést, a második pedig x_2^*-ot. Ha nem sikerül megállapodniuk, akkor az első játékos a d_1, a második a d_2 „büntető" kifizetést kapja. Ha adott az $(F, \mathbf{d})$ alkuprobléma, akkor mit tekintsünk megoldásnak? Jelöljük A-val az alkuproblémák halmazát. Egy $\psi : A \to I\!R^2$ függvényt *megoldásfüggvénynek* vagy röviden *megoldásnak* nevezünk.

Az axiomatikus megközelítés igyekszik követelményeket megfogalmazni, amelyek intuitíven elfogadhatók, és egyértelműen meghatároznak egy megoldást. Nash axiómái (követelményei) a következőek:

1. *Lehetségesség*: minden $(F, \mathbf{d})$ alkuproblémára $\psi(F, \mathbf{d}) \in F$.

2. *Racionalitás*: minden $(F, \mathbf{d})$-re $\psi(F, \mathbf{d}) \geq \mathbf{d}$.

3. *Pareto-optimalitás*: ha $\mathbf{f} \in F$ és $\mathbf{f} \geq \psi(F, \mathbf{d})$, akkor $\mathbf{f} = \psi(F, \mathbf{d})$.

4. *Skála függetlenség*: ha $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, β_1, β_2 tetszőleges, és

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' &= (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \alpha_2 d_2 + \beta_2) \\ F' &= \{(\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2) : (x_1, x_2) \in F\}, \end{aligned}$$

   akkor $\psi(F', \mathbf{d}') = (\alpha_1 \psi_1(F, \mathbf{d}) + \beta_1, \alpha_2 \psi_2(F, \mathbf{d}) + \beta_2)$.

5. *Kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség*: ha $F' \subset F, (F', \mathbf{d}) \in A$, és $\psi(F, \mathbf{d}) \in F'$, akkor $\psi(F', \mathbf{d}) = \psi(F, \mathbf{d})$.

6. *Szimmetria*: ha $(x_1, x_2) \in F$ akkor és csak akkor, ha $(x_2, x_1) \in F$ és $d_1 = d_2$, akkor $\psi_1(F, \mathbf{d}) = \psi_2(F, \mathbf{d})$.

Tekintsük a következő maximum feladatot, amelynek célfüggvényét *Nash szorzatnak* nevezzük:

$$\begin{gathered} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \to \max \\ (x_1, x_2) \in F \\ x_1 \geq d_1 \\ x_2 \geq d_2 \,. \end{gathered}$$

Ennek a feladatnak pontosan egy megoldása van, melyet *Nash-alkumegoldásnak* (NAM) nevezünk. Legyen φ az a megoldásfüggvény, amely minden alkuproblémához a NAM-ot rendeli.

1. Tétel (Nash 1950). *φ az egyetlen megoldásfüggvény, amely az 1-6. követelményeket kielégíti.*

Ez a megközelítés semmit sem mond a konkrét alkufolyamatról, csak a végeredményt karakterizálja az axiómák segítségével. Nash eredeti gondolata volt, hogy minden alkuproblémához konstruáljunk egy nem-kooperatív, az alkufolyamatot részletesebben modellező játékot úgy, hogy lehetőleg ennek a játéknak egyetlen részjáték tökéletes Nash egyensúlypontja (NEP) legyen és ebben az egyensúlypontban a játékosok kifizetése egyezzék meg az axiómákkal egyértelműen meghatározott NAM-mal. A játékot úgy kell megkonstruálni, hogy a kooperatív megoldás expliciten semmi esetre sem szerepeljen a játék leírásában és lehetőleg magát a megoldást ne használjuk a játék paramétereinek meghatározásához.

Egy ilyen nemkooperatív játékra maga Nash mutatott példát (Nash (1953)), amelyet több más követett (pl. Rubinstein (1982), Howard (1992)). Ezt a vizsgálati módszert, az axiomatizálás és a nem-kooperatív implementáció harmonizálását egyéb megoldások (például a Kalai-Smorodinsky megoldás, Moulin (1984), a Shapley érték, Dasgupta és Chiu (1998) esetére is alkalmazták a Nash program iránymutatását követve. Nem célunk a Nash program teljes áttekintése, Binmore, K. et al. (1992) és Serrano (2005) munkái ezt megteszik.

Ebben a cikkben egy olyan kooperatív megoldás nemkooperatív implementációjával foglalkozunk, amely először Forgó (1983) munkájában jelent meg, majd Forgó és Szidarovszky (2003) az axiómatizálással és a többkritériumú döntésekkel való kapcsolatának kimutatásával egészítette ki. Ebben a dolgozatban használták a szerzők az L-Nash megoldás (LNAM) elnevezést. Az LNAM azt a megoldást jelenti, amelyet a NAM-ok határértékeként kapunk akkor, ha az egyet nem értés büntetésének mértéke egy adott rögzített irányban a végtelenhez tart.

Az LNAM nemkooperatív alkujátékkal való implementációjával foglalkozunk ebben a cikkben. Megmutatjuk, hogy bizonyos esetekben elég nagy, de véges büntetés kilátásba helyezésével is el lehet érni az LNAM-ot és így mindazok a modellek közvetlenül alkalmazhatók, amelyek a NAM-ot implementálják. Amennyiben ilyen véges büntetés nincs, akkor Rubinstein (1982) váltakozó ajánlattételes alkumodelljének megfelelő adaptációjával megmutatjuk, hogy ez a modell ugyanúgy, mint a NAM-ot, az LNAM-ot is aszimptotikusan implementálja.

2 Poliedrikus lehetséges tartomány

Legyen $C(\alpha) = (F, -\alpha\mathbf{r})$ egy kétszemélyes alkuprobléma, ahol $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, $\alpha>0$. Az $F \subset \mathbb{R}^2_+$ a lehetséges kimenetelek konvex, kompakt halmaza, $\mathbf{r}$ az egyet nem értési (disagreement) irány, α az egyet nem értés büntetésének mértéke. Minden α-ra, a $C(\alpha)$ alkuproblémához tartozó *Nash-féle alkumegoldásnak* (NAM) nevezzük a $\mathbf{b}(\alpha) \in \mathbb{R}^2_+$ kimenetelt, ha $\mathbf{b}(\alpha)$ az egyetlen megoldása az alábbi problémának:

$$P(\alpha): \qquad (x_1 + \alpha r_1)(x_2 + \alpha r_2) \to \max$$
$$(x_1, x_2) \in F\ .$$

Legyen

$$M = \max_{(x_1,x_2)\in F} (r_1 x_2 + r_2 x_1)\ .$$

M a feltételek miatt mindig létezik. Tekintsük most a következő problémát (amely nem függ α-tól):

$$\begin{aligned} Q: \qquad r_2^2 x_1^2 + r_1^2 x_2^2 &\to \min \\ (x_1, x_2) &\in F \\ r_1 x_2 + r_2 x_1 &= M \ . \end{aligned}$$

Q-nak egyetlen megoldása van, amelyet *L-Nash alkumegoldásnak* nevezünk. (Az L betű a *limit* szóra utal). Az LNAM fogalom először Forgó (1983)-ban szerepel, részletes elemzése és különböző tulajdonságai pedig Forgó és Szidarovszky (2003)-ban találhatók meg. Ugyanitt szerepel a következő tétel, amely a $P(\alpha)$ és a Q feladat megoldásai között létesít kapcsolatot:

2. Tétel. *Ha* $\mathbf{b}(\alpha)$ *a* $C(\alpha)$ *alkuprobléma NAM-ja, akkor* $\lim_{\alpha\to\infty} \mathbf{b}(\alpha) = \mathbf{z}$, *ahol* $\mathbf{z}$ *az LNAM (a* Q *feladat megoldása).*

Megjegyezzük, hogy Forgó és Szidarovszky (2003)-ban általánosabban szerepel ez a tétel (n-személyes alkuproblémára), de ebben a cikkben csak a kétszemélyes alkuproblémákkal foglalkozunk.

Fontos speciális eset, amikor az F politóp. Ez a helyzet például akkor, amikor F-et egy bimátrix játékból vagy egy többkritériumú döntési problémából származtatjuk (lásd az 1. és 2. példákat később).

Forgó és Szidarovszky (2003)-ban erre vonatkozik a következő tétel:

3. Tétel. *Ha* F *politóp, akkor van olyan* $\alpha_0 \geq 0$, *hogy minden* $\alpha > \alpha_0$ *esetén* $\mathbf{b}(\alpha) = \mathbf{z}$, *vagyis a NAM megegyezik az LNAM-mal.*

Ez a tétel akkor fontos, ha az LNAM-ot olyan nemkooperatív alkujátékokkal akarjuk ezen játékok NEP-jeként előállítani, amelyeket a NAM-ra dolgoztak ki. Ha azonban az LNAM nemkooperatív alkujátékként való realizációjára ezt az utat akarjuk követni, akkor az alkuprobléma primer adataiból előre kell tudnunk becsülni azt az α_0 küszöbértéket, amely fölé emelve az egyet nem értés büntetésének mértékét, a NAM már nem változik.

A 3. Tétel bizonyítása Forgó és Szidarovszky (2003)-ban lényegében egzisztencia bizonyítás és így ebből közvetlenül nem tudunk α_0-ra becslést (felső korlátot) adni. Kétszemélyes alkuprobléma esetében azonban viszonylag egyszerűen, a probléma primer adataiból tudunk ilyen becslést konstruálni. Ezt fogjuk most megtenni.

Tegyük fel, hogy az F politóp csúcspontjai $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ és $\mathbf{z}$ az LNAM (a Q feladat megoldása). A $P(\alpha)$ feladat célfüggvénye így is írható:

$$x_1 x_2 + \alpha(r_1 x_2 + r_2 x_1) + \alpha^2 r_1 r_2 \to \max$$

Legyen $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2)$ az F két Pareto-optimális csúcspontja. Mivel a NAM mindig Pareto-optimális felületen van (ez az egyik axióma!), ezért a $P(\alpha)$ feladat megoldása vagy Pareto-optimális csúcspontban, vagy két ilyen csúcspont által meghatározott szakaszon van, amelyet *Pareto-optimális szakasznak* fogunk nevezni. Legyen

$$T = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q},\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

a $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ pontok által meghatározott szakasz. A Nash-szorzat ($P(\alpha)$ célfüggvénye) a konstans tag elhagyása után a T szakaszon a következő:

$$f(\lambda) = (\lambda p_1 + (1-\lambda)q_1)(\lambda p_2 + (1-\lambda)q_2) + \alpha r_1(\lambda p_2 + (1-\lambda)q_2) + \\ + \alpha r_2(\lambda p_1 + (1-\lambda)q_1)\ .$$

Ha a NAM a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz belsejébe esik, akkor ott

$$f'(\lambda) = 2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)\lambda + (p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1 + \\ + \alpha(r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1)) = 0\ . \tag{1}$$

Ez csak akkor állhat fenn minden elég nagy α-ra, és ezáltal minden $\alpha \geq 0$-ra, ha

$$r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1) = 0\ . \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, amikor az LNAM egy Pareto-optimális szakasz belsejébe esik, akkor $\alpha_0 = 0$. Mivel $r_1, r_2 > 0$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ és $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ Pareto-optimális szakasz, ezért $(p_1 - q_1)(p_2 - q_2) < 0$. Így minden elég nagy α-ra a NAM csak akkor eshet a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz belsejébe, ha a

$$0 < -\frac{(p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1}{2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)} < 1 \tag{3}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha (2) és (3) fennállnak, akkor a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakaszt *elfogadhatónak* nevezzük. Ha a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz elfogadható, akkor a $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}$ pontot, ahol

$$\lambda = -\frac{(p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1}{2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)}$$

a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz *kritikus pontjának* nevezzük. Könnyű látni, hogy ebből legfeljebb egy van. Legyen K a Pareto-optimális csúcspontok és a legfeljebb egy Pareto-optimális elfogadható szakasz kritikus pontjának véges halmaza.

Az előbbiek alapján világos, hogy az LNAM a K halmaz pontjainak egyike és meghatározható az alábbi egyszerű algoritmussal:

Számoljuk ki az $r_1x_2 + r_2x_1$függvény értékét az F csúcspontjaiban. Ha a maximum csak egyetlen pontban vétetik fel, akkor ez az LNAM. Ha kettő pontban (ennél több nem lehet, mivel két dimenzióban vagyunk), akkor ezen két pont által meghatározott szakasznak a kritikus pontja az LNAM, amennyiben ez létezik, vagy pedig a két csúcspont közül az, amelyikben a Q feladat célfüggvényértéke kisebb.

A NAM meghatározására Kaneko (1992) adott egyszerű és hatékony véges algoritmust.

Ezeket az eredményeket is fel fogjuk használni arra, hogy egy felső becslést adjunk arra az α_0 értékre, amelyre fennáll, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ esetén a NAM és az LNAM egybeesik.

A fentiek alapján a K halmazból most már kihagyhatjuk a kritikus pontot (maradnak az F Pareto-optimális csúcspontjai), mivel arra már megvan az egzakt $\alpha_0 = 0$ alsó korlát.

Legyen $\mathbf{b}(\alpha)$ a NAM az α paraméter függvényében, $\mathbf{z}$ az LNAM és tegyük fel, hogy $\mathbf{b}(\alpha) \neq \mathbf{z}$. Ekkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$M = r_1 z_2 + r_2 z_1 \geq r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha)$$

$$z_1 z_2 + \alpha(r_1 z_2 + r_2 z_1) = z_1 z_2 + \alpha M < b_1(\alpha) b_2(\alpha) + \alpha(r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha)) .$$

A második egyenlőtlenség azért szigorú, mert bármely $\alpha > 0$-ra a NAM az egyetlen maximalizálója a Nash szorzatnak. Ezekből az egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

$$\alpha(M - (r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha)) < b_1(\alpha) b_2(\alpha) - z_1 z_2 . \tag{4}$$

$g(\mathbf{b}(\alpha)) := M - (r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha))$ nem lehet 0, mert akkor a jobb oldalnak pozítívnak kellene lenni, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{z}$ a Q feladat egyetlen megoldása.

Ha $\mathbf{b}(\alpha) \in K$, akkor legyen

$$s = \min_{\mathbf{y} \in K, g(\mathbf{y}) > 0} (M - (r_1 y_2 + r_2 y_1)) > 0 ,$$

$$S = \max_{\mathbf{y} \in K} y_1 y_2 .$$

Ekkor (4)-ből az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\alpha < \frac{S - z_1 z_2}{s} \leq \frac{S}{s} , \tag{5}$$

mivel $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$.

Nézzük most azt az esetet, amikor $\mathbf{b}(\alpha) \notin K$. Ez akkor fordulhat elő, ha

$$C := r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1) \neq 0 .$$

(Ha $C = 0$, akkor azt már láttuk, hogy ha (3) nem áll fenn, akkor a NAM a $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ szakasz egyik végpontjába esik, ezek pedig definíció szerint benne vannak a K halmazban.)

Legyen $A = 2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)$, $B = (p_1 - q_1) q_2 + (p_2 - q_2) q_1$. Ekkor az (1) egyenlőség így néz ki:

$$A\lambda + B + C\alpha = 0 .$$

Ebből

$$\alpha = \frac{-A\lambda - B}{C} .$$

Mivel azt már láttuk, hogy $A < 0$ és $0 < \lambda < 1$, ezért

$$\alpha = \frac{-A\lambda - B}{C} < \frac{-A + |B|}{|C|} .$$

Ezt (5)-tel összevetve azt kapjuk, hogy ha a NAM és az LNAM különböznek, akkor abban az esetben, ha $C \neq 0$, és $\mathbf{b}(\alpha) \in [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$, akkor

$$\alpha < \max\left\{ \frac{S}{s}, \frac{-A + |B|}{|C|} \right\} ,$$

ha pedig $C = 0$, akkor

$$\alpha < \frac{S}{s} \, .$$

Ha tehát

$$\frac{-A^* + |B^*|}{|C^*|}$$

a $\frac{-A+|B|}{|C|}$ értékek maximuma az F Pareto-optimális szakaszain ($C \neq 0$), és

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max\left\{\frac{S}{s}, \frac{-A^*+|B^*|}{|C^*|}\right\}, & C \neq 0 \\ \frac{S}{s}, & C = 0 \end{cases}$$

akkor $\alpha > \alpha_0$ esetben a NAM egybeesik az LNAM-mal.

Láthattuk, hogy α_0 kiszámításához csak eredeti adatok, F csúcspontjai, valamint az $\mathbf{r}$ egyet nem értési irány szükségesek. Ha a problémát egy bimátrix játékból származtatjuk, akkor az F csúcspontjai kifizetéspárosokból kerülnek ki és eleve rendelkezésre állnak.

1. Példa. Tekintsük a közismert *Gyáva nyúl* bimátrix játéknak azt a változatát, amelyben a játékosok aszimmetriája abban nyilvánul meg, hogy az egyet nem értés az egyiknek ötször jobban ,,fáj", mint a másiknak. Az A és B játékos kifizetőmátrixa a ,,kitér, nem tér ki" tiszta stratégiapárosokra az alábbi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

A kimenetelek síkján három Pareto-optimális pont van:

$$\mathbf{p} = (1,7), \; \mathbf{q} = (6,6), \; \mathbf{t} = (7,1)$$

és két Pareto-optimális szakasz: $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ és $[\mathbf{q},\mathbf{t}]$. Tegyük fel, hogy az egyet nem értési irány: $\mathbf{r} = (5,1)$. Ekkor a Pareto-optimális csúcspontokban az $r_1x_2 + r_2x_1$ függvény értéke rendre $36, 36$ és 12. Sem a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ sem a $[\mathbf{q},\mathbf{t}]$ szakaszon nincs kritikus pont. A $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz esetében $C = 0$, így csak az S és s értékeket kell kiszámolni. Ezek az értékek rendre: $S = 36$, $s = 24$, amelyből az $\alpha_0 = 1.5$ értéket kapjuk. A $[\mathbf{q},\mathbf{t}]$ szakasz esetében $C = 24$, $A = -10$, $B = 34$, amiből $\frac{-A+|B|}{|C|} = 1.83$. Így az α_0-ra a $\max\{1.5, 1.83\} = 1.83$ értéket kapjuk. Ez elég jó becslés, mert a legkisebb α_0, amely mellett a NAM és LNAM egybeesik, 0.

2. Példa. A többkritériumú döntési problémát (TKDP) el lehet helyezni játékelméleti környezetben is (lásd Forgó (1983), Forgó és Szidarovszky (2003). Ekkor az egyes kritériumokhoz rendeljük a játékosokat, akik választanak egyet az alternatívák közül. Kifizetés csak akkor van, ha mindenki ugyanazt az alternatívát választotta, ellenkező esetben a kifizetés tart a $-\infty$-hez, egy adott egyet nem értési irány mentén. Mint azt Forgó és Szidarovszky (2003) bebizonyította, a többkritériumú döntési probléma, amennyiben az egyes kritériumokat pozitív súlyokkal látjuk el és lineáris súlyozás alapján választjuk ki a legjobb alternatívát, ekvivalens a hozzárendelt játék LNAM-jának meghatározásával, ahol az egyet nem értési irány komponensei az egyes súlyok reciprokai. Ha a lineáris súlyozás alapján több alternatíva között holtverseny alakul ki, akkor közülük a Q feladat megoldásával választjuk ki a TKDP megoldását. Nagyon sok esetben az egyes kritériumokat egyének és/vagy szervezetek testesítik meg, akiknek az alkuja révén alakul ki a kompromisszumos megoldás. Természetes módon adódik, miután a súlyokból kiszámoltuk az egyet nem értési irányt, hogy kiszámítsunk az előbbiek szerint egy felső korlátot arra a küszöbértékre, amelyen felül az így kapott egyet nem értési pontot használva a nem-kooperatív Nash alkumodellek egyensúlypontként állítják elő a TKDP egyszerű súlyozással kiválasztott ,,megoldását”. Mi most is természetesen csak a kétszemélyes (két kritériumú) esettel foglalkozunk.

Nézzünk egy egyszerű esetet, ahol az egyes alternatívákat az alábbi vektorok jellemzik:

$$\mathbf{a} = (2,3),\ \mathbf{b} = (1,6),\ \mathbf{c} = (3,2)$$

A kritériumokhoz a $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ súlyvektort rendeljük, amely azt jelenti, hogy a játékelméleti modellben az egyet nem értési irány $\mathbf{r} = (2,3)$, az F halmaz csúcspontjai pedig $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Ezekből $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ Pareto-optimális pontok, a $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ szakasz pedig az egyetlen Pareto-optimális szakasz. Az LNAM a $\mathbf{z} = b$ pont. Most $C = 2 \neq 0$, $A = -16$, $B = 8$, $S = 6$, $s = 8$ és így $\alpha_0 = \frac{-A+|B|}{|C|} = 12$. A legkisebb α_0, amely mellett a NAM és LNAM egybeesik, 4.

3 Sima Pareto-határ

Ha a lehetséges kimenetelek halmaza nem poliedrikus, akkor nem feltétlenül van olyan α_0 , hogy minden $\alpha > \alpha_0$-ra a NAM és az LNAM egybeesik. Az alábbi alkuprobléma egy példa erre az esetre.

3. Példa. Legyen az $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x^2 + y^2 \leq 1\}$ a lehetséges kimenetelek halmaza, az $\mathbf{r} = (1,3)$ pedig az egyet nem értési irány. Az LNAM a $3x + y$ lineáris függvény maximumpontja, ami a $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ pont. Rögzített $\alpha > 0$ egyet nem értési büntetés mérték mellett a NAM az

$$(x+\alpha)(y+3\alpha) \to \max$$
$$(x,y) \in F$$

feladat megoldása. Mivel a NAM az $x^2 + y^2 = 1$ által meghatározott Paretohatáron van, a fenti feladat ekvivalens az

$$(x+\alpha)(y+3\alpha) \to \max$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Lagrange-feladattal. Könnyű belátni, hogy a $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ pont semmilyen λ Lagrange-multiplikátor érték mellett sem elégíti ki az

$$y + 3\alpha - 2\lambda x = 0$$
$$x + \alpha - 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

elsőrendű feltételeket egyetlen $\alpha \geq 0$ mellett sem.

Mint ebből a példából látszik, az LNAM implementálásához vagy a NAM implementálásait kell módosítani, vagy esetleg teljesen újakat konstruálni abban az esetben, amikor nincs olyan α_0, hogy minden $\alpha > \alpha_0$-ra a NAM és az LNAM egybeesik.

Mi a következőkben Rubinstein *váltakozó ajánlattételes* (VA) modelljét, Rubinstein (1982), használjuk fel kiindulópontnak az LNAM implementálására az alkuproblémák egy speciális osztályának esetében.

Legyen $C(\alpha) = (F, -\alpha\mathbf{r})$ egy kétszemélyes alkuprobléma, ahol $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ az egyet nem értési irány, $\alpha > 0$ az egyet nem értés büntetésének mértéke, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y \leq g(x)\}$ a lehetséges kimenetelek halmaza. Feltesszük, hogy $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő, folytonosan differenciálható, szigorúan konkáv függvény. Az így definiált alkuprobléma osztályt (α minden lehetséges értékére) nevezzük röviden C alkuproblémának.

Az F halmaz így konvex, kompakt, és az $y = g(x)$ által meghatározott Pareto-határa „sima". Legyen $a = g^{-1}(0)$, $b = g(0)$ (g^{-1} létezik g monotonitása miatt). Az F-et így az alábbi egyenlőtlenség rendszer lehetséges megoldásaiként is lehet definiálni:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \\ y \leq g(x)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

$C(\alpha)$-nak minden α-ra létezik NAM-ja, amelyet az $(x + \alpha r_1)(y + \alpha r_2)$ Nash szorzat egyértelmű maximumpontjaként kapunk. Ezeknek a határértéke, ha $\alpha \to \infty$ az LNAM, amelyet viszont az $r_2 x + r_1 y$ lineáris függvény szintén egyértelmű maximumpontjaként nyerhetünk. Az egyértelműséget a g függvény szigorú konkávitása biztosítja. Mivel mind a NAM, mind az LNAM a Pareto határon van, ezért (6)-ban az $y = g(x)$-szel lehet az $y \leq g(x)$ egyenlőtlenséget helyettesíteni, és így mind a NAM, mind az LNAM meghatározásakor a $[0, a]$ zárt intervallumon egy egyváltozós függvényt kell maximalizálni. Adott α-ra a NAM-ot az

$$\begin{aligned} f(x) = (x + \alpha r_1)(g(x) + \alpha r_2) \to \max \\ 0 \leq x \leq a \end{aligned} \tag{7}$$

feladat megoldásával kapjuk. A célfüggvény első deriváltja:

$$f'(x) = g(x) + xg'(x) + \alpha(r_1 g'(x) + r_2)$$

$$f'(0) = g(0) + \alpha(r_1 g'(0) + r_2)\,.$$

Ha $g'(0) < -\frac{r_2}{r_1}$ és $\alpha > \alpha_0 = -\frac{g'(0)}{r_1 g'(0) + r_2}$, akkor $f'(0) < 0$, és így a (7) feladat megoldása $x = 0$, $y = g(0)$, ami egyúttal az LNAM is.

Vegyük most a célfüggvény deriváltját az $x = a$ pontban

$$f'(a) = g(a) + ag'(a) + \alpha(r_1 g'(a) + r_2) = ag'(a) + \alpha(r_1 g'(a) + r_2)\,.$$

Ha $f'(a) > 0$, akkor $x = a$ a (7) feladat optimális megoldása. Ez tetszőlegesen nagy α-ra akkor és csak akkor állhat fenn, ha $r_1 g'(a) + r_2 > 0$. Ekkor, ha

$$\alpha > \alpha_0 = \frac{-a g'(a)}{r_1 g'(a) + r_2} ,$$

akkor a NAM és az LNAM egybeesnek. Ezt az eredményt tétel formájában is megfogalmazzuk.

4. Tétel. *Ha a C alkuprobléma osztályra fennáll, hogy vagy $g'(0) < -\frac{r_2}{r_1}$, vagy pedig $g'(a) > -\frac{r_2}{r_1}$, akkor van olyan véges α_0, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ esetében az LNAM egybeesik a NAM-al.*

Következmény. Ha a 4. Tétel feltételei fennállnak, akkor minden olyan implementáció, amely előállítja a NAM-ot, kellően nagy egyet nem értési ,,büntetés" mellett az LNAM-ot is előállítja.

A továbbiakban tehát csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a C-be tartozó alkuproblémák LNAM-ja a Pareto-felület (relatív) belső pontja. Ekkor az LNAM az

$$r_2 x + r_1 y \to \max$$
$$y = g(x)$$

Lagrange-feladat megoldása. Ha $(x^*,\ y^*)$ az LNAM, akkor az elsőrendű feltételből a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= -\frac{r_2}{r_1} \\ y^* &= g(x^*)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása egyértelmű (mivel g' monoton csökkenő), és az pontosan x^*.

A VA modell diszkrét idővel dolgozik: $t = 1, 2, \ldots$. *Ajánlatnak* nevezzük az F egy pontját. A játékosok felváltva tesznek ajánlatokat, minden páratlan időpontban az első játékos, minden páros időpontban a második. Ha az egyik játékos ajánlatát a másik elfogadja, akkor ez lesz a kifizetés, és a játéknak vége. Ha nem, akkor $\delta > 0$ valószínűséggel az alkufolyamat megszakad, a játéknak vége, a játékosok rendre a $-\alpha r_1$ és $-\alpha r_2$,,büntető" kifizetéseket kapják. Az alkufolyamat $1-\delta$ valószínűséggel folytatódik, és újabb ajánlatot tesz valaki, aki éppen soron van.

Ebben a játékban egy stratégia az a terv (függvény), amely bármely időpontban egy ajánlatot rendel a korábbi ajánlatok alkotta bármely lehetséges történethez. A NEP-et és a részjáték tökéletes NEP-et ebben a játékban a szokásos módon definiáljuk. Azt a speciális stratégiát, amelyben az ajánlattételek nem függnek (konstansok) a korábbi történettől, *stacioner stratégiának* nevezzük.

Rubinstein alapvető tétele a következő, amelyet rögzített egyet nem értési pont (α rögzített) esetére bizonyított.

5. Tétel (Rubinstein (1982), Osborne és Rubinstein (1994)). *A VA játéknak egyetlen részjáték tökéletes NEP-je van, amely stacioner stratégiákból áll.*

Így a játék lefolyása, ha a játékosok az egyetlen (x^*, y^*) stacioner stratégiát játsszák, igen rövid. Az első játékos a $t = 1$ időpontban megteszi az (x^*, y^*) ajánlatát, amit a második játékos elfogad, megtörténnek a kifizetések és a játék véget ér. Jegyezzük meg, hogy (x^*, y^*) függ a δ valószínűségtől.

Számunkra fontos még a következő tétel is.

6. Tétel (Rubinstein (1982), Osborne és Rubinstein (1994)). *Ha $\delta > 0$, akkor a VA játék egyetlen stacioner stratégiájában a kifizetések tartanak a NAM-hoz, ha $\delta \to 0$.*

A VA játék tehát a NAM aszimptotikus implementációja és így ha δ-t elég kicsinek választjuk, akkor tetszőlegesen közel kerülhetünk a NAM-hoz.

Mi a helyzet az LNAM-al? Ha olyan aszimptotikus implementációt szeretnénk, amely a 6. Tételen nyugszik, akkor az α és δ paraméterek értékét egyszerre kellene a végtelenhez illetve a nullához tartatni, és még a két konvergencia egymáshoz való viszonyával is törődni kell. Ezt úgy csináljuk meg, hogy veszünk egy $0 < \beta < 1$ paramétert, és definiálunk egy olyan VA játékot, amelyben a büntetés mértéke $\alpha = \frac{1}{\beta}$, a tárgyalások megszakadásának valószínűsége pedig $\delta = \beta^2$. Az ezekkel a paraméterekkel definiált VA játékot jelöljük VA(β)-val.

7. Tétel. *Bármely $\lambda > 0$ számhoz van olyan β_0, hogy minden $0 < \beta < \beta_0$ esetén a VA(β) játék egyetlen részjáték tökéletes NEP-jének kifizetésvektora λ-nál kisebb távolságra van az LNAM-tól.*

Bizonyítás. Rögzített β esetén az 5. Tétel értelmében a VA(β) játéknak van egyértelműen meghatározott részjáték tökéletes NEP-je. Könnyű belátni (lásd például Forgó et al. (1999), hogy ennek az egyensúlypontnak olyan stacioner stratégiákból kell állni, hogy bármelyik játékos számára közömbös legyen, hogy a másik ajánlatát elfogadja-e vagy visszautasítja-e.

Ha tehát (x^1, y^1) az első játékos ajánlata, akkor a második játékos (x^2, y^2) ajánlatára fenn kell állni az alábbi egyenlőségeknek:

$$\begin{aligned} y^1 &= g(x^1) \\ y^2 &= g(x^2) \\ x^2 &= \delta(-\alpha r_1) + (1-\delta)x^1 \\ y^1 &= \delta(-\alpha r_2) + (1-\delta)y^2 \,. \end{aligned}$$

Egyensúlyban $x^1 = x^2$, $y^1 = y^2$. Az indexeket elhagyva azt kapjuk, hogy $(x, y) \in F$ akkor és csak akkor egyensúlyi ajánlat, ha x kielégíti a

$$g(x) + \delta\alpha r_2 - (1-\delta)g(-\delta\alpha r_1 + (1-\delta)x) = 0$$

egyenletet. Ha rögzítjük az x^* egyensúlyi ajánlatot, és $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\delta = \beta^2$, akkor $\beta > 0$-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$f(\beta) = g(x^*) + \beta r_2 - (1-\beta^2)g(-\beta r_1 + (1-\beta^2)x^*) = 0\,.$$

Mindkét oldal β szerinti deriváltját véve kapjuk a

$$f'(\beta) = r_2 + 2\beta g(-\beta r_1 + (1-\beta^2)x^*) + (1-\beta^2)g'(-\beta r_1 + (1-\beta^2)x^*) = 0$$

egyenletet, ami szintén minden $\beta > 0$ esetén fennáll. Rögzített β-ra a fenti egyenletnek egyetlen $x(\beta)$ megoldása van (lásd Forgó et al. (1999), 310. oldal). Minden $\beta > 0$-ra $x(\beta) \in F$, és mivel F kompakt, g' folytonos, így minden $\{\beta_i\}$ nullsorozatra $\{x(\beta_i)\}$ minden torlódási pontja kielégíti az

$$f'(0) = r_2 + r_1 g'(x) = 0$$

egyenletet. A g' függvény monoton csökkenő, ezért a

$$g'(x) = -\frac{r_2}{r_1}$$

egyenletnek egyetlen megoldása van, ami (8) miatt megegyezik az x^*-gal, ami pontosan az első játékos kifizetése az LNAM-ban.

A 7. Tétel állítását úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a VA játék aszimptotikus implementációja az LNAM-nak, az adott feltételek mellett.

4 Összefoglalás

Megmutattuk, hogy kétszemélyes játékok esetében az LNAM megoldást aszimptotikusan elő lehet állítani a Rubinstein-féle VA játék részjáték tökéletes NEP-jeként mind sima, mind szakaszonként lineáris (a lehetséges kimenetelek halmaza politóp) Pareto-határ esetében. Politóp lehetséges kimenetelek halmaza és bizonyos nem-politóp esetben az alkuprobléma primer adataiból becsülve tudunk olyan α_0 számot megadni, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ esetén az LNAM megoldás egybeesik az α büntetés-mértékű Nash-féle alkuprobléma megoldásával. Ezekben az esetekben minden olyan implementáció, amely előállítja a NAM-ot, egyúttal az LNAM-ot is előállítja, ha az α „büntető" paraméter elég nagy.

Az eredmények kétszemélyes alkuproblémákra vonatkoznak. A kiterjesztés n-személyes alkuproblémákra nem triviális, és további kutatást igényel.

Irodalom

1. Binmore, K., Osborne, M. J. és Rubinstein, A. (1992): Noncooperative models of bargaining, in Aumann, R. J. and Hart, S. (ed): *Handbook of Game Theory*, Vol 1. North-Holland, Amsterdam, 179–225.
2. Dasgupta, A., Chiu, Y. S. (1998), On implementation via demand commitment games, *International Journal of Game Theory*, 27, 161–189.
3. Forgó, F. (1983): A game theoretic approach for multicriteria decision making, in Wierzbicky, J. (ed): *Interactive Decisions* in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 229. Springer Verlag, Berlin, 1–15.
4. Forgó, F., Szép, J., Szidarovszky, F. (1999): *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London
5. Forgó, F., Szidarovszky, F. (2003): On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method, *European Journal of Operations Research*, 147, 108–116.

6. Kaneko, M. (1992): The ordered field property and a finite algorithm for the Nash bargaining solution, *International Journal of Game Theory*, 20, 227–236.
7. Howard, J. V. (1992): A social choice rule and its implementation in perfect equilibrium, *Journal of Economic Theory*, 56, 142–159.
8. Moulin, H. (1984): Implementing the Kalai-Smorodinsky bargaining solution, *Journal of Economic Theory*, 33, 32–45.
9. Nash, J. F. Jr. (1950): The bargaining problem, *Econometrica*, 18, 155–162.
10. Nash, J. F. Jr. (1953): Two-person cooperative games, *Econometrica*, 21, 128–140.
11. Osborne, M. J., Rubinstein, A. (1994): *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts
12. Peleg, B. (1997): A difficulty with Nash's program: A proof of a special case, *Economics Letters*, 55, 305–308.
13. Rubinstein, A. (1982): Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, 50, 97–109.
14. Serrano, R. (2005): Fifty years of the Nash program, 1953-2003, *Investigaciones Económicas*, XXIX (2), 219–258.

ON IMPLEMENTING THE L-NASH SOLUTION IN TWO-PERSON BARGAINING GAMES

According to the „Nash program" every axiomatically determined cooperative solution to a game should also be obtained as a noncooperative Nash outcome of a reasonable noncooperative bargaining game. The L-Nash solution defined by Forgó (1983) can be characterized as the limiting point of the Nash bargaining solution when the disagreement point goes to negative infinity in a fixed direction. In Forgó and Szidarovszky (2003), the L-Nash solution was related to the solution of multiciteria decision making problems and two different axiomatizations of the L-Nash solution were also given in this context. In this paper, finite bounds are established for certain special two-person bargaining problems, making it possible to apply all the implementation models designed for the Nash bargaining problem to obtain the L-Nash solution as well. For another set of problems where this method does not work, a version of Rubinstein's alternative offer game is shown to asymptotically implement the L-Nash solution.

IRÁNYÍTÁSELMÉLET ÉS AZ ASZIMMETRIKUS INFORMÁCIÓS JÁTÉKOK ELMÉLETE[1]

BADICS JUDIT – GÖMÖRI ANDRÁS
Pannon Egyetem (Veszprém) – Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdasági alkalmazásait tekintve az optimális irányítások elmélete, vagy röviden irányításelmélet (optimal control theory) a dinamikus optimalizálás jól ismert eszköze. Sőt, attól tartunk, hogy a közgazdászok fejében és gyakorlatában az irányításelmélet túlságosan is, csaknem elválaszthatatlanul összefonódott az időbeli döntési problémák kezelésével.[2] Ezt az összefonódást kívánjuk oldani, amikor igyekszünk ráirányítani a figyelmet egy olyan alkalmazási területre, amelynek semmi köze az időbeli döntésekhez, annál több a játékelmélethez, pontosabban az aszimmetrikus információs játékok elméletéhez. Így írásunkban —a végén bemutatott illusztratív példától eltekintve— semmi új sincs. Ismertetésünket azoknak az olvasóknak (közgazdászoknak, hallgatóknak) szánjuk, akik többé-kevésbé, vagy akár jól ismerik az irányításelmélet szokásos alkalmazásait, és érdeklődnek egy ettől eltérő alkalmazás iránt. Először a hagyományos alkalmazást idézzük fel röviden a —minden bizonnyal— legismertebb példán, majd az aszimmetrikus információs játékelméleti alkalmazást mutatjuk be, végül ez utóbbit illusztráljuk egy példával.

1 Az irányításelmélet klasszikus alkalmazása

Az optimális irányítások elméletét Pontrjagin dolgozta ki munkatársaival az ötvenes években. 1961-ben, tanítványaival közösen publikálta eredményeit, a könyv a következő évben angol fordításban is megjelent, így a hatvanas években ismertté vált.[3] Amellett, hogy számos tudományterületen (a fizika különböző területei, műszaki tudományok, stb.) alkalmazzák, már az említett évtizedben felkeltette a közgazdászok érdeklődését is. A közgazdasági alkalmazás alapgondolata minden jel szerint Arrow nevéhez fűződik, azonban az egyik első és mindmáig alighanem legtöbbet idézett alkalmazást Dorfman-

[1] Beérkezett: 2006. szeptember 6. Az első szerző munkáját a T17 48680 sz. OTKA pályázat támogatta. E-mail: badicsj@gtk.uni-pannon.hu, andras.gomori@uni-corvinus.hu.

[2] Például egy közgazdászoknak írt matematika kézikönyv irányításelméleti alfejezetének első mondata így szól: ,,Az irányításelméletből megtanulhatjuk, hogyan oldjunk meg folytonos időbeli maximalizálási feladatokat, ha a célfüggvényben integrál, a korlátban pedig differenciálegyenlet szerepel.” Klein [2002], 469. oldal. Egy másik, hasonló könyv irányításelméleti fejezetének pedig ez a címe: ,,Erőforrásallokáció az időben: irányításelmélet.” Silberberg – Suen [2001], 617. oldal.

[3] Legismertebb változata a könyv 1986-os kiadása, lásd: Potrjagin et al. [1986]. Simonovits András szíves közléséből tudjuk, hogy magyarul is olvasható: Potrjagin et al. [1968]. Az irányításelmélet történetéről lásd: McShane [1989].

nak köszönhetjük.[4] A klasszikus közgazdasági alkalmazás illusztrációjaként idézzük fel mi is Dorfman példáját röviden![5]

Egy vállalat a $[0,T]$ folytonos időintervallumban dolgozik és minden $t \in [0,T]$ időpontban megválasztja x döntési változójának $x(t)$ értékét. x lehet a vállalat termékének ára, az output mennyisége, a befektetett tőke mennyisége, vagy bármi, amitől célfüggvényének értéke (mondjuk profitja) függ. Ugyanakkor a vállalatnak minden t időpontban rendelkezésére áll a tőke $k(t)$ mennyisége, amely korábbi tevékenységétől (döntéseitől) függ. Ezt a kapcsolatot a

$$\dot{k}(t) = f(k(t), x(t), t)$$

differenciálegyenlet írja le. A vállalat célfüggvényének értéke (ha tetszik, „pillanatnyi profitja") a t időpontban

$$u(t) = u(k(t), x(t), t)\ .$$

Ugyanakkor a vállalat célfüggvényének a $[0,T]$ időintervallumon vett teljes összegét maximalizálja, így optimumfeladata

$$\max_{x(t)} \int_0^T u(k(\tau), x(\tau), \tau)\, d\tau\ ,$$

feltéve, hogy

$$\dot{k}(t) = f(k(t), x(t), t)\ .$$

Ezzel előttünk áll a legegyszerűbb irányításelméleti feladat, amelyben x-et irányítási változónak (control variable), k-t állapotváltozónak (state variable) szokás nevezni.

Ésszerű feltenni, hogy a folyamat elején a vállalat már rendelkezik a tőke egy adott mennyiségével, legyen ez k_0. Ekkor írhatjuk, hogy $k(0) = k_0$. De —a feladat jellegétől függően— megkövetelhetjük, hogy a vállalat úgy zárja a folyamatot, hogy rendelkezésére álljon a tőke egy adott —mondjuk k_T— mennyisége, azaz legyen $k(T) = k_T$, vagy előírhatjuk, hogy ez a tőkemennyiség ne legyen kisebb (vagy nagyobb) egy adott értéknél, azaz $k(T) \geq k_T$. A feladatot —természetétől függően— még ennél bonyolultabb peremfeltételek mellett is megfogalmazhatjuk.

A megoldáshoz szükség van a Hamilton-függvényre

$$H = u(k(t), x(t), t) + \lambda(t) f(k(t), x(t), t)\ ,$$

[4]Lásd: Arrow [1968], Arrow – Kurz [1970], Dorfman [1969].

[5]Természetesen itt nem kívánunk bevezetést adni az irányításelméletbe, a példát csak annyira részletezzük, amennyire ahhoz szükséges, hogy majd összehasonlítsuk azzal az alkalmazással, amit valóban be kívánunk mutatni. Az irányításelmélet iránt érdeklődő olvasó számos, közgazdászoknak írt matematika könyv közül válogathat, például: Chiang [1992], Dixit [1990], Fuente [2000], Klein [2002], Léonard – Long [1992], Kamien – Schwartz [1991], Seierstad – Sydsaeter [1987], Silberberg – Suen [2000], Sydsaeter – Hammond [2005], Takayama [1994]. Magyar nyelven: Tallos [1998], Simonovits [1998]. Megoldatlan problémákat tárgyal Blondel – Megretski [2004]. Egy érdekesség: az említett típusú könyvek közül talán Allen híres műve (Allen [1962]) az egyik utolsó, amely a variációszámítással véget ér.

ahol $\lambda(t)$ az úgynevezett Pontrjagin-multiplikátor (co-state variable).[6]

A megoldás szükséges feltételei egyrészt az elsőrendű feltételek

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &= -\dot{\lambda}, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{k}, \end{aligned}$$

másrészt a transzverzalitási feltétel

$$\lambda(T) = 0 \ .$$

A modellben $\lambda(t)$ az állapotváltozó marginális növekedésének a célfüggvény optimális értékére tett hatását adja meg (a tőke árnyékára). Ebből rögtön következik, hogy mivel ez a hatás a folyamat végén zérus, így $\lambda(T) = 0$, ami éppen a transzverzalitási feltétel.

A feladat az elsőrendű feltételekből és a transzverzalitási feltételből megoldható.[7]

Dorfman modelljét végeláthatatlan sorban követték a hasonló megfontolásokra épülő közgazdasági alkalmazások. Talán az egyik legnagyobb alkalmazási terület a növekedéselmélet.[8] De alkalmazzák az irányításelméletet a megújítható erőforrások, illetve a korlátozottan rendelkezésre álló és környezetszennyező energiaforrások felhasználásának leírásában, a politikai üzleti ciklusok, vagy a speciális technológiai fejlesztések elemzésében és még számos más területen.[9] Valamennyi alkalmazás közös vonása azonban, hogy folytonos időbeli döntési problémákat kezelnek, azaz dinamikus optimalizálási modellek. A következőkben bemutatandó modell nem ilyen.

2 Az irányításelmélet alkalmazása az aszimmetrikus információs játékok elméletében

Mielőtt a szóban forgó alkalmazást bemutatnánk, helyesnek látszik az alkalmazási területet nagyjából lokalizálni, környezetében elhelyezni.[10] Elkerü-

[6] Az angol nyelvű irodalomban más megnevezése: auxiliary variable. Találkozhatunk még a dinamikus Lagrange-multiplikátor megjelöléssel is.

[7] Minthogy fő célunk egy alkalmazás bemutatása, nem foglalkozunk itt a megoldás létezésének kérdésével, továbbá mindvégig feltesszük, hogy a szükséges feltételek elégségesek és nem foglalkozunk ennek feltételeivel sem. E kérdéseket illetően a korábban hivatkozott irodalomban tájékozódhat az érdeklődő.

[8] A szinte minden tankönyvben idézett példa a Ramsey – Cass – Koopmans modell. Eredeti változata (Ramsey [1928]) nem használt irányításelméleti eszközöket. Cass által konstruált változata (Cass [1965]) már igen, a Koopmans-féle változat (Koopmans [1965]) azonban szintén nem.

[9] Illusztrációként az említettekhez lásd például: Plourde [1970], Forster [1980], Nordhaus [1975], Arrow [1962], Shell [1966].

[10] Az irányításelmélet legkézenfekvőbb és legelső játékelméleti alkalmazása a differenciáljátékok elmélete, e területen maga Pontrjagin is jelentős eredményeket ért el.

lendő, hogy a játékelmélet történetének —itt fölöslegesnek látszó— részleteiben elvesszünk,[11] mintegy a közepébe vágva kezdjük ott, hogy az információ közgazdaságtanában alkalmazott játék-modell legegyszerűbb alakja egy kétszereplős, kétlépéses, szekvenciális játék, amelyben az egyik szereplő teljesen informált[12], a másik nem. Ha a rosszul informált szereplő nem tudja megfigyelni a másik döntési változóját, akkor *morális kockázat*i problémával állunk szemben. Ha azonban nem ismeri a másik fél (vagy a helyzet) valamely tulajdonságát, akkor a jelenség a *kontraszelekció*.[13] Az információhiány mindkét helyzetben hatékonyságveszteséghez vezet (az azonos, teljes információs esethez képest). Azonban ismerünk eszközöket, amelyek kontraszelekció esetén alkalmasak e veszteség csökkentésére. Ha az említett játékban a jól informált fél lép először, akkor ez az eszköz a *szignálozás* (szignál-használat, vagy jelzés).[14] Ha azonban az első döntést a rosszul informált játékos hozza, akkor ez az eszköz a *szűrés*[15]. A szűrésmodell felírásában és megoldásában az irányításelmélet van segítségünkre. Az alkalmazást egy elemi példán mutatjuk be.[16]

Egy szereplő megbíz egy vállalatot egy termék q mennyiségének előállításával és ezért t összeget (transzfert) fizet a termelőnek. Feltesszük, hogy t és q mennyisége megfigyelhető és bizonyítható. A megbízó a q termékmennyiségen $S(q)$ többletet élvez ($S' > 0$, $S'' < 0$, $S(0) = 0$). A termelő állandó mérethozadék mellett dolgozik, költségfüggvénye $C(q) = \theta q$, ahol θ a termelés határköltsége. A megbízó célfüggvénye

$$V = S(q) - t \ ,$$

a termelőé pedig

$$U = t - \theta q \ .$$

Az információs aszimmetria abban áll, hogy a termelő ismeri θ értékét (ő tehát a jól informált fél, ügyvivő, agent), a megbízó (aki a rosszul informált fél, principal) azonban erről csak annyit tud, hogy θ valószínűségi változó

[11] Ismert módon Harsányi nem teljes információs játékra adott első megoldása (Harsanyi [1967-68]) nyitott utat a szóban forgó terület fejlődésének, amelyben elválaszthatatlanul összefonódott az aszimmetrikus információs játékok elmélete és az erre épülő közgazdasági elmélet, amelyet szokás az információ (vagy az információs aszimmetria) közgazdaságtanának, szerződéselméletnek, ösztönzéselméletnek, vagy megbízó-ügyvivő (principal-agent) modellnek nevezni. A területről —az ismert játékelmélet és mikroökonómia könyveken kívül— áttekintést ad például Hillier [1997], Molho [1997], Macho-Stadler – Pérez-Castrillo [2001], Bolton – Dewatripont [2005], Salanié [1997], Laffont – Martimort [2002], Laffont [1993], magyar nyelven Gömöri [2001].

[12] Azaz birtokában van a játék megadásában foglalt összes információnak.

[13] A morális kockázat közgazdasági elemzésének gondolata először Arrow [1963] cikkében jelenik meg, még nem minden etikai konnotáció nélkül. Már ilyen összefüggésektől mentesen tárgyalja Pauly [1968]. A kontraszelekció első leírása Akerlof [1970], a szerző eredményeiért 2001-ben Nobel-díjat kapott. A kettő közötti, itt használt megkülönböztetés kissé felszínes, valójában két különböző struktúráról van szó.

[14] A szignálozás (signaling) ötlete Spence nevéhez fűződik (Spence [1973, 1974]), aki ezért 2001-ben kapott Nobel-díjat.

[15] A szűrés (screening) Stiglitz nevéhez kötődik (Rothschild – Stiglitz [1976], Stiglitz [1977], Wilson [1977]), aki 2001-ben kapott eredményeiért Nobel-díjat.

[16] A korábban hivatkozott irodalom számos változatban tárgyalja.

$F(\theta)$ eloszlás- és $f(\theta) = F'(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel a $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ intervallumon ($f(\theta) > 0$, $\forall\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$). Szokás θ értékét a jól informált fél *típus*ának nevezni. A szereplők szerződést kötnek, amely rögzíti, hogy a megbízó a termelőnek milyen q termékmennyiségért, milyen t összeget fizet. Ha például a szerződés $t = (1+\tau)\theta q$ alakú ($0 < \tau < 1$), ez azt jelenti, hogy a megbízó által kifizetett összeg fedezi a termelő költségeit és tartalmaz egy ,,költségarányos'' nyereséget. Ez azonban a termelőt abban teszi érdekeltté, hogy minél nagyobb költséget ismertessen el a megrendelővel, a megrendelő ezzel szemben nem tud hatékonyan védekezni, mivel nem ismeri θ valódi értékét, ugyanakkor hasonló okból a termelő sem tud bármely θ érték mellett hatékonyan érvelni. Így minden alapot nélkülöző —a gyakorlatból jól ismert— alkudozás kezdődhet. Ezért olyan szerződést keresünk, amely megkerüli ezt a zsákutcát. Rendeljünk minden θ típushoz egy $q(\theta)$ mennyiséget, és egy $t(\theta)$ összeget. Így a szerződés egy $(t(\theta), q(\theta))$ függvénypár, szokás ezt *szerződésmenü*nek is nevezni.

A játék forgatókönyve a következő. A rosszul informált fél lép elsőként, meghatároz egy szerződésmenüt. A jól informált szereplő ezt megfigyeli és vagy elfogadja, vagy elutasítja. Ha elutasítja, a játéknak vége, a szereplők célfüggvényértéke zérus. Ha elfogadja, kiválaszt —a revelációs elv szellemében[17] — egy tetszőleges $\widehat{\theta}$ típust (azaz a szerződésmenü egy ,,menüpontját''), megtermeli a $q(\widehat{\theta})$ mennyiséget és megkapja érte a $t(\widehat{\theta})$ összeget. A feladat a $(t(\theta), q(\theta))$ szerződésmenü megkonstruálása.

Vizsgáljuk meg milyen feltételeknek kell eleget tennie a keresett szerződésmenünek! Ha a termelő θ típusú és $\widehat{\theta}$ típust választ ki, vagy jelent be, akkor célfüggvény-értéke

$$U(\widehat{\theta}, \theta) = t(\widehat{\theta}) - \theta q(\widehat{\theta}) \; .$$

A szerződésmenünek azonban olyannak kell lennie, hogy egy θ típusú termelő akkor járjon a legjobban, ha a szerződésmenüből választott $\widehat{\theta}$ típus megegyezik valódi típusával, azaz $\widehat{\theta} = \theta$. Ez teljesül, ha

$$\frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \widehat{\theta}} = t'(\theta) - \theta q'(\theta) = 0 \; . \tag{1}$$

Ez az összefüggés a termelő *ösztönzési korlát*ja. Ha a szerződés eleget tesz a mondott feltételnek, akkor ösztönzéskompatibilis, vagy igazmondásra ösztönző. (Szokás *szeparáló szerződésmenü*nek is mondani.) Ekkor a termelő optimális célfüggvény-értéke

$$U^*(\theta) = U(\theta, \theta) = t(\theta) - \theta q(\theta) \; ,$$

innen

$$t(\theta) = \theta q(\theta) + U^*(\theta) \; . \tag{2}$$

[17] A revelációs elvről lásd például: Myerson [1979], Dasgupta – Hammond – Maskin [1979], Myerson [1991], 258-263., 294-299.

Állítsuk most elő a termelő optimális célfüggvényértékének θ szerinti totális deriváltját

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \widehat{\theta}} + \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \theta} = [t'(\theta) - \theta q'(\theta)] - q(\theta) \; .$$

A jobb oldalon a szögletes zárójelben lévő kifejezés azonban az ösztönzési korlát teljesülése esetén zérus, így

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = -q(\theta) \; . \tag{3}$$

Mielőtt megvizsgálnánk, hogy a szerződésnek milyen további feltételnek kell eleget tennie, írjuk fel a megbízó célfüggvényét! A megbízó a $V(\theta) = S(q(\theta)) - t(\theta)$ függvény θ szerinti várható értékét maximalizálja, így célfüggvénye

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [S(q(\theta)) - t(\theta)] \, f(\theta) \, d\theta \; ,$$

ebben (2)-t felhasználva

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U^*(\theta)] \, f(\theta) \, d\theta \; .$$

A szerződésnek olyannak kell lennie, hogy minden típusú vállalat elfogadja, azaz teljesüljön a termelő

$$U^*(\theta) \geq 0$$

*részvételi korlát*ja. De (3)-ból

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} \leq 0 \; ,$$

így, ha a részvételi korlát a legmagasabb (legkevésbé hatékony) $\overline{\theta}$ típusra teljesül, akkor minden típusra teljesül, ezért elég megkövetelni, hogy

$$U^*(\overline{\theta}) \geq 0$$

legyen. Ugyanakkor a megbízó célfüggvénye $U^*(\theta)$-ban csökkenő, ezért csak ott lehet maximális, ahol az utóbbi minimális, ezért a fenti korlátnak effektívnek kell lennie:

$$U^*(\overline{\theta}) = 0 \; .$$

Most már felírhatjuk az irányítási feladatot!

$$\max_{q(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U^*(\theta)] \, f(\theta) \, d\theta \; ,$$

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = -q(\theta) \; ,$$

$$U^*(\overline{\theta}) = 0 \ .$$

A feladat irányítási változója q, állapotváltozója U^*. Az első feltétel írja le az állapotváltozó változását az irányítási változó függvényében, az utolsó összefüggés a részvételi korlátot megfogalmazó peremfeltétel.

A feladat Hamilton-függvénye

$$H = [S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U^*(\theta)]\, f(\theta) - \lambda(\theta) q(\theta) \ .$$

Az elsőrendű szükséges feltételek

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial q} &= [S'(q(\theta)) - \theta] f(\theta) - \lambda(\theta) = 0, \\
\frac{\partial H}{\partial U} &= -f(\theta) = -\lambda'(\theta), \\
\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} &= -q(\theta).
\end{aligned}$$

Továbbá szükséges a transzverzalitási feltétel

$$\lambda(\underline{\theta}) = 0 \ ,$$

amelynek magyarázata az, hogy a Pontrjagin-multiplikátor ellentettje, tehát $-\lambda(\theta)$, az állapotváltozó marginális csökkenésének a célfüggvény optimális értékére tett hatását adja meg, és ez a hatás a $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ intervallum alsó határán nulla.

Az $S(q)$ függvény általános alakja mellett is tehetünk néhány megállapítást. Az első szükséges feltételből

$$S'(q(\theta)) = \theta + \frac{\lambda(\theta)}{f(\theta)} \ .$$

A második feltételből integrálással

$$\lambda(\theta) = F(\theta) + C \ .$$

Az utolsó, transzverzalitási feltétellel egybevetve

$$\lambda(\underline{\theta}) = F(\underline{\theta}) + C = 0 \ .$$

Mivel $F(\underline{\theta}) = 0$, így $C = 0$ és $\lambda(\theta) = F(\theta)$. Ezt felhasználva

$$S'(q(\theta)) = \theta + \frac{F(\theta)}{f(\theta)} \ ,$$

ahonnan $q(\theta)$ meghatározható. A jobb oldal második tagja a kockázati hányad. Ha a kockázati hányad monoton[18], azaz $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{F(\theta)}{f(\theta)}\right) \geq 0$, akkor $q(\theta)$

[18]Ez a feltétel a leggyakrabban használt eloszlás-típusokra teljesül.

nyilván csökkenő. Ekkor azonban, ha létezik a feladat megoldásaként adódó $(t(\theta), q(\theta))$ pár, akkor létezik olyan $T(q)$ függvény is, amely ugyanezt a feladatot ellátja. A $(t(\theta), q(\theta))$ mechanizmus esetén a jól informált fél egy θ típust választ, döntése kijelöl számára egy $q(\theta)$ termelt mennyiséget és egy ezért kapott $t(\theta)$ összeget. Míg a $T(q)$ függvény esetén egy q mennyiséget választ és ehhez kap egy T összeget.

Ha $q(\theta)$ csökkenő, akkor létezik inverze $\theta(q)$, ekkor legyen

$$T(q) = t(\theta(q)) \ .$$

Belátható, hogy a jól informált döntéshozó a $(t(\theta), q(\theta))$ mechanizmussal szemben ugyanúgy viselkedik, mint az említett függvény esetén. Az előbbi esetben, mint láttuk az igazmondó döntés elsőrendű feltétele

$$t'(\theta) - \theta q'(\theta) = 0 \ ,$$

míg a második esetben az elsőrendű feltétel

$$\frac{d}{dq}(T(q) - \theta q) = T'(q) - \theta = t'(\theta)\theta'(q) - \theta = 0 \ .$$

Ezt $q'(\theta)$-val szorozva

$$t'(\theta)\theta'(q)q'(\theta) - \theta q'(\theta) = 0 \ .$$

Mivel $\theta(q)$ a $q(\theta)$ inverze, ezért a két feltétel ugyanaz.

Érdemes egybevetni a bemutatott klasszikus irányításelméleti alkalmazást az iménti szűrésmodellel. Formálisan nyilván ugyanarról a feladatról van szó, egy integrált maximalizáló függvényt keresünk egy differenciálegyenlet, mint korlátozó feltétel mellett. A dinamikus optimalizálás esetén a döntéshozó ,,pillanatnyi" döntésével meghatározza célfüggvényének ,,pillanatnyi" értékét, azonban ezen értékek egy időintervallum feletti összegét maximalizálja, innen a célfüggvényben az integrál. Ugyanakkor pillanatnyi döntései nem függetlenek egymástól, ezt a kapcsolatot az állapotváltozó teremti meg. A korlátozó feltétel éppen azt írja le, hogy hogyan függ az állapotváltozó változása az irányítási változótól. Továbbá az irányítási változó értékét keressük minden időpontban, azaz olyan függvényt keresünk, amely időbeli ,,pályáját" írja le.

A szűrési feladatban a rosszul informált fél célfüggvény-értéke függ a jól informált fél típusától, amelynek értékét az előbbi szereplő nem ismeri. Így a célfüggvényben szereplő integrál a típus szerinti várható érték. A feladatban azt keressük, hogy a szerződés —legalábbis egyik— értéke hogyan függjön a típustól, vagyis az irányítási változó egy típus-függvény. Ugyanakkor a korlátozó feltétel differenciálegyenlete azt írja le, hogy hogyan változzon a jól informált fél optimális célfüggvény-értéke a típus szerint (ha tetszik, ,,típusróltípusra") ahhoz, hogy egyik típusnak se érje meg a másik típusnak szóló menüpontot választani, vagyis valódi típusától eltérő típust színlelni. Így a korlátozó feltétel a jól informált fél ösztönzési korlátja (vagy tartalmazza azt). Nem hiányozhat a feladatból egy peremfeltétel, ami abból adódik, hogy a jól informált fél visszautasíthatja a szerződést. Ha tehát azt akarjuk, hogy elfogadja, akkor teljesülnie kell, hogy a szerződéssel legalább olyan jól járjon, mint annak elutasításával. Ez a korlát a jól informált fél részvételi korlátja (amelyet célfüggvényének monotonitása miatt elég az egyik szélső típusra felírni).[19]

A szűrési eljárás közgazdasági alkalmazása igen széles körű. Legismertebb talán a nemlineáris árképzés.[20] De használják a közbeszerzésben, a vállalati szabályozás elméletében,[21] sőt, szűrési eljárás a jól ismert aukció is.[22] Az alkalmazási lehetőségek sokszínűségét[23] illusztrálandó a következőkben igyekszünk egy eléggé speciális alkalmazást bemutatni.

3 Egy példa: a válságmenedzser díjazása

Ha egy vállalat rossz állapotban van, több más megoldás mellett az egyik lehetőség, hogy tulajdonosa szakértőt (vagy szakértő céget) kér fel a probléma megoldására. A szakértő átvilágítja a vállalatot, javaslatokat tesz működésének megváltoztatására. A tulajdonos kifizeti a szakértő járandóságát, megteszi a szükségesnek vélt lépéseket, a vállalat pedig vagy sikeres lesz, vagy nem. Feltételezve, hogy a szakértő —főként munkája elvégzése után— jobban ismeri a vállalatot, mint a tulajdonos, továbbá a munkában tanúsított igyekezetéről elsősorban magának vannak információi, az említett díjazási feladat pontos megfogalmazása valószínűleg morális kockázati problémához vezetne. Mi azonban megoldásként egy szűrési eljárást mutatunk be.[24]

Egy vállalat a $t = 0$ időpontban profitot nem termel, tőkepiaci értéke zérus. Ezért tulajdonosa megbíz egy szakértőt, akivel szerződést köt a következők szerint. A $t = 0$ időpontban a szakértő V összeget fizet a tulajdonosnak és átveszi a vállalat működtetését (de az nem válik tulajdonává). Egy a szerződésben meghatározott, későbbi $T > 0$ időpontban megfigyelik a vállalat értékét. Ha a vállalat értéke nagyobb, mint egy —szintén a szerződésben előre rögzített— X összeg, akkor a szakértő kap X összeget (és munkája véget ért). Ha kisebb, megkapja a vállalatot.

---

[19]A bemutatott szűrési eljárás másfelől egy speciális mechanizmus. A mechanizmustervezés nyelvén szólva, egy adott döntési szabályt, szeparáló, tökéletes Bayes-i egyensúlyban implementáló mechanizmust tárgyaltunk. A mechanizmus-tervezésről lásd például: Fudenberg – Tirole [1991], 7. fejezet.

[20]Lásd Wilson [1993].

[21]Az alapmű Baron – Myerson [1982], egy igen érdekes modell Laffont – Tirole [1986], amely alapjául szolgál egy sok alkalmazást bemutató könyvnek: Laffont – Tirole [1993].

[22]Lásd például Wilson [1992]. Egy speciális alkalmazás a hazai irodalomban Eső – Simonovits [2003].

[23]E sokszínűség természetes, ha meggondoljuk, hogy az általunk bemutatott modell speciális esete egy általánosabb modellnek. Általánosan ugyanis két szereplő cseréli ki két jószág t, ill. q mennyiségeit, miközben egyikük rosszul informált. Az ármérce-jószág megválasztásával jelölhetjük ki a vevőt és eladót, így különböző vételi és eladási eljárásokhoz jutunk (lásd az említett példákat). A szereplők döntési sorrendjének megválasztása pedig a szignál-játékhoz, illetve a szűréshez vezet. A modell általános leírását lásd például Gömöri [2001], 126-135. oldal.

[24]Az eljárás alapötlete Hongbin Li [2003] cikkéből származik, a modell felírása és megoldása azonban —véleményünk szerint— súlyosan hibás, ezért jelentősen átalakítottuk.

Tegyük fel, hogy a szakértő tevékenysége vagy sikeres, ekkor a vállalat értéke a T időpontban $S > 0$, vagy sikertelen, ekkor ez az érték zérus. A sikeresség a szakértő erőfeszítésétől függ, legyen ez utóbbi a szakértő döntési változója a, értékét a tulajdonos nem tudja megfigyelni. Az erőfeszítésnek a szakértő számára költségei vannak, legyen az erőfeszítés haszonáldozat-függvénye $C(a,\theta)$ ($C_a > 0$, $C_\theta < 0$), ahol θ a vállalat azon jellemzőit foglalja össze, amelyeket a szakértő pontosan ismer, de a tulajdonos nem. A tulajdonos csak annyit tud, hogy θ egy valószínűségi változó a $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ intervallumon, ismert $F(\theta)$ eloszlás-, ill. $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel. θ a vállalat, vagy a szakértő típusa.

A játék forgatókönyve a következő. A tulajdonos meghatároz egy

$$(V(\theta), X(\theta))$$

szerződésmenüt, ezt a szakértő vagy elfogadja, vagy elutasítja. Utóbbi esetben mindkét szereplő kifizetése zérus. Ha elfogadja, kiválaszt egy $\widehat{\theta}$ típust és kifizet egy ehhez tartozó $V(\widehat{\theta})$ összeget, de ezzel kiválaszt egy ehhez tartozó $X(\widehat{\theta})$ összeget is. Ezután megválasztja az erőfeszítés a értékét, majd megfigyelik a vállalat értékét és megkapják a szerződésnek megfelelő kifizetéseket. Feladatunk a $(V(\theta), X(\theta))$ szerződésmenü meghatározása.

Azért, hogy konkrét eredményeket kaphassunk, adjunk néhány összefüggésnek konkrét alakot. Tudjuk, hogy a sikeresség valószínűsége az erőfeszítés növekvő függvénye. Legyen az egyszerűség kedvéért a sikeresség valószínűsége maga az erőfeszítés, így $a \in [0,1]$ és a vállalat értéke a valószínűséggel S, $(1-a)$ valószínűséggel zérus lesz. Legyen a szakértő erőfeszítésének haszonáldozat-függvénye $C(a,\theta) = \frac{a^2}{2\theta}$ alakú. Legyen továbbá θ egyenletes eloszlású a $[\underline{\theta},\overline{\theta}]$ intervallumon, úgy, hogy $\underline{\theta} > 0$ és —később tisztázandó okból— $\overline{\theta} \le \frac{1}{S}$.

A megoldás során a visszagöngyölítés szellemének megfelelően haladhatunk. A szakértő célfüggvénye

$$U(a,\widehat{\theta},\theta) = -V(\widehat{\theta}) + aX(\widehat{\theta}) - \frac{a^2}{2\theta} \, .$$

Ha bármely θ-hoz célfüggvényét maximalizáló a értéket választja, akkor teljesül, hogy

$$\frac{\partial U(a,\widehat{\theta},\theta)}{\partial a} = X(\widehat{\theta}) - \frac{a}{\theta} = 0 \, ,$$

innen

$$a(\widehat{\theta},\theta) = \theta X(\widehat{\theta}) \, .$$

Ha bejelentett típusa megegyezik valódi típusával, azaz $\widehat{\theta} = \theta$, akkor $a(\theta,\theta) = \theta X(\theta)$, ezt célfüggvényébe helyettesítve, célfüggvényének optimális értéke

$$U^*(\theta) = U(a(\theta,\theta),\theta,\theta) = -V(\theta) + \frac{\theta X(\theta)^2}{2} \, ,$$

innen

$$V(\theta) = \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta) \, .$$

A tulajdonos bevételi függvénye

$$R(\theta) = V(\theta) + a(\theta)(S - X(\theta)) \, ,$$

aki ennek θ szerinti várható értékét maximalizálja, így célfüggvénye

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [V(\theta) + a(\theta)(S - X(\theta))] \, f(\theta) \, d\theta \, .$$

A korábban kapott $a(\theta, \theta)$ és $V(\theta)$ értékét felhasználva

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta X(\theta) S - \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta)\right] f(\theta) \, d\theta \, .$$

A szakértő optimális célfüggvény-értékének θ szerinti totális deriváltja

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \widehat{\theta}} + \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \theta} \, .$$

A jobb oldal első tagja az ösztönzési korlát miatt nulla, így

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \theta} = X(\theta)^2 - \frac{X(\theta)^2}{2} = \frac{X(\theta)^2}{2} \, .$$

Számításba kell még vennünk a szakértő részvételi korlátját, azaz minden θ esetén fenn kell álljon, hogy

$$U^*(\theta) \geq 0 \, .$$

De —mint láttuk— $\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{X(\theta)^2}{2} \geq 0$, azaz $U^*(\theta)$ nemcsökkenő, így, ha a „legrosszabb" típusra, azaz a legalacsonyabb $\underline{\theta}$ értékre teljesül, akkor minden θ-ra teljesül, így elég megkövetelni, hogy

$$U^*(\underline{\theta}) \geq 0$$

legyen. Azonban azt is láttuk, hogy a tulajdonos célfüggvénye $U^*(\theta)$-ban csökkenő, ezért ott lehet maximális, ahol ez utóbbi minimális, vagyis a fenti korlát effektív:

$$U^*(\underline{\theta}) = 0 \, .$$

Az előzőeket felhasználva felírhatjuk az irányítási feladatot:

$$\max_{X(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta X(\theta) S - \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta)\right] f(\theta) \, d\theta \, ,$$

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{X(\theta)^2}{2} \, ,$$

$$U^*(\underline{\theta}) = 0 \ .$$

A feladat irányítási változója X, állapotváltozója U^*. Az első feltétel tartalmazza a szakértő ösztönzési korlátját, a második pedig a részvételi korlátja.

A feladat Hamilton-függvénye

$$H = \left[\theta X(\theta) S - \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta)\right] f(\theta) + \lambda(\theta)\frac{X(\theta)^2}{2} \ .$$

Az elsőrendű feltételek

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \theta S f(\theta) - \theta X(\theta) f(\theta) + \lambda(\theta) X(\theta) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial U^*} = -f(\theta) = -\lambda'(\theta) \ ,$$

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{X(\theta)^2}{2} \ ,$$

továbbá felhasználjuk az

$$U^*(\underline{\theta}) = 0 \ ,$$

$$\lambda(\overline{\theta}) = 0$$

feltételeket. Az utolsó összefüggés abból adódik, hogy $\lambda(\theta)$ jelöli azt a hatást, amelyet a szakértő optimális célfüggvényértékének θ szerinti marginális növekedése jelent a tulajdonos optimális célfüggvény-értékére. A θ értéke azonban $\overline{\theta}$-nál már nem nőhet, így itt ez a hatás zérus.

Az első feltételből

$$X(\theta) = \frac{S\theta f(\theta)}{\theta f(\theta) - \lambda(\theta)} \ .$$

A második feltételből integrálással

$$\lambda(\theta) = F(\theta) + C \ .$$

Ezt egybevetve az utolsó feltétellel $\lambda(\overline{\theta}) = F(\overline{\theta}) + C = 1 + C = 0$, innen $C = -1$, azaz

$$\lambda(\theta) = F(\theta) - 1 \ .$$

Ezt felhasználva

$$X(\theta) = \frac{S\theta f(\theta)}{\theta f(\theta) + 1 - F(\theta)} \ .$$

Most felhasználva, hogy θ egyenletes eloszlású, azaz $F(\theta) = \frac{\theta - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}$ és $f(\theta) = \frac{1}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}$

$$X(\theta) = \frac{S\frac{\theta}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}}{\frac{\theta}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} - \frac{\theta - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} + 1} = S\frac{\theta}{\overline{\theta}} \ .$$

Ugyanakkor

$$a(\theta,\theta) = \theta X(\theta) = S\frac{\theta^2}{\overline{\theta}} \ .$$

Az $X(\theta)$-ra kapott eredményt felhasználva a harmadik feltételben

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{S^2}{2\overline{\theta}^2}\theta^2 \ .$$

Innen integrálással

$$U^*(\theta) = \frac{S^2}{6\overline{\theta}^2}\theta^3 + C_1 \ .$$

A részvételi korlátot felhasználva

$$U^*(\underline{\theta}) = \frac{S^2}{6\overline{\theta}^2}\underline{\theta}^3 + C_1 = 0 \ ,$$

így

$$C_1 = -\frac{S^2\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2} \ ,$$

tehát a szakértő optimális célfüggvényértéke

$$U^*(\theta) = \frac{S^2}{6\overline{\theta}^2}\theta^3 - \frac{S^2\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2} \ .$$

Az eddigi eredményeket felhasználva kapjuk $V(\theta)$ értékét:

$$V(\theta) = \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta) = \frac{S^2\theta^3}{2\overline{\theta}^2} - \frac{S^2\theta^3}{6\overline{\theta}^2} + \frac{S^2\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2} = \left(\frac{\theta^3}{3\overline{\theta}^2} + \frac{\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2}\right) S^2 \ .$$

Nyilvánvaló, hogy mind $V(\theta)$, mind $X(\theta)$, mind pedig $a(\theta)$ növekvő. Ez azt jelenti, hogy minél magasabb típusú a szakértő, vagy a vállalat (azaz minél ,,tehetségesebb" a szakértő, vagy minél jobbak a vállalat csak általa ismert lehetőségei), annál magasabb értékű (V, X) párt választ a szerződésmenüből, továbbá annál magasabb erőfeszítést tanúsít a vállalat sikeressé tétele érdekében, így annál nagyobb valószínűséggel lesz a vállalat magas értékű. Tekintsük például a legmagasabb, $\overline{\theta}$ típust. Erőfeszítése $a(\overline{\theta}) = S\overline{\theta}$. (Mindenekelőtt azonnal világossá válik, hogy a $\overline{\theta} \leq \frac{1}{S}$ megszorításra azért volt szükség, hogy $a \leq 1$ legyen.[25]) Ugyanakkor a legmagasabb típus esetén $S = X$. Ha speciálisan $\overline{\theta} = \frac{1}{S}$, akkor ez azt jelenti, hogy a legmagasabb típusú szakértő egy $V(\overline{\theta})$ összeg ellenében, valamint erőfeszítésének haszonáldozata révén hozzájutott egy $S = X$ értékű vagyonhoz, a tulajdonos pedig a $V(\overline{\theta})$ összeghez.

Az eljárás talán úgy interpretálható, hogy a szakértő a szerződésmenüből való választással mintegy ,,vállalást tesz" a vállalat elérhető értékére (ezt a

[25]Ha e megszorítással nem élünk, akkor minden $\theta > \frac{1}{S}$ esetén $a = 1$ és így a szűrési eljárás bonyolultabbá válna.

vállalást képviseli $X(\theta)$ értéke), ugyanakkor a vállalást ,,hitelesíti" a $V(\theta)$ összeg kifizetésével. Túlzott vállalást nem érdemes tenni, mert ekkor a kifizetendő $V(\theta)$ összeg is magas és a vállalat értéke nagyobb valószínűséggel lesz kisebb, mint $X(\theta)$ és a szakértő a kisebb értékű vállalatot kapja. De alulvállalni sem érdemes, mert ekkor a vállalat értéke nagyobb valószínűséggel lesz nagyobb, mint a túl alacsony $X(\theta)$ és a szakértő az utóbbi összeget kapja. Az eljárás lényege azonban az, hogy a jól informált szereplőt nemcsak arra ösztönzi, hogy típusának megfelelő optimális erőfeszítést tanúsítsa, hanem arra is, hogy a szerződésmenüből való választással a csak maga által ismert valódi típusát kinyilvánítsa.

Irodalom

1. Akerlof, G. A. [1970]: The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism, *Quarterly Journal of Economics*, 84(3): 488–500.
2. Allen, R. D. G. [1962]: *Mathematical Analysis for Economists,* Macmillan and Co. LTD, London.
3. Arrow, K. [1962]: The Economic Implications of Learning by Doing, *Review of Economic Studies,* 3:155–173.
4. Arrow, K. [1963]: Uncertainty and the Welfare Economics in Medical Care, *American Economic Review,* 53:91–96.
5. Arrow, K. [1968]: Applications of Control Theory to Economic Growth, In: *Mathematics of Decision Sciences,* Part 2, 85–119. Providence, RI: American Mathematical Society.
6. Arrow, K. – Kurz, M. [1970]: Methods of Optimization over Time, In: *Public Investment, The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.
7. Arrow, K. [1985]: The Economics of Agency, In: Pratt, J. – Zeckhauser, R. (editors): *Principals and Agents: The Structure of Business*, Harvard Business School Press, Cambridge, 37–51.
8. Baron, D. – Myerson, R. [1982]: Regulating a Monopolist with Unknown Costs, *Econometrica,* 50:911–930.
9. Blondel, V. D. – Megretski, A. (ed.) [2004]: *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, Princeton University Press.
10. Bolton, P. – Dewatripont, M. [2005]: *Contract Theory*, The MIT Press, Cambridge (MA).
11. Cass, D. [1965]: Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies,* 32:223–240.
12. Chiang, A. C. [1992]: *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Inc., New York.
13. Dixit, A. [1990]: *Optimization in Economic Theory*, (2nd edition) Oxford University Press.
14. Dorfman, R. [1969]: An Economic Interpretation of Optimal Control Theory, *American Economic Review*, 59:817–831.
15. Eső Péter – Simonovits András [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre, *Közgazdasági Szemle*, 50:99–111.

16. Forster, B. A. [1980]: Optimal Energy Use in a Polluted Environment, *Journal of Environmental Economics and Management*, 4:321–333.
17. Fudenberg, D. – Tirole, J. [1991]: *Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA).
18. Fuente, A. de la [2000]: *Mathematical Methods and Models for Economists,* Cambridge University Press.
19. Gömöri András [2001]: *Információ és interakció*, Typotex, Budapest.
20. Harsanyi, J. [1967-1968]: Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I-III., *Management Science*, 14(3,5,7): 159–182., 320–334., 486–502.
21. Hillier, B. [1997]: *The Economics of Asymmetric Information*, Macmillan Press, London.
22. Hongbin Li [2003]: Reversing Privatization as a Screening Mechanism, *Economics Letters*, 78:267–271.
23. Kamien, M. I. – Schwartz, N. L. [1991]: *Dynamic Optimization: the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, London.
24. Klein, M. [2002]: *Mathematical Methods for Economics,* Addison-Wesley.
25. Koopmans, T. [1965]: On the Concept of Optimal Economic Growth, In: *The Econometric Approach to Development Planning,* Rand McNally, Chicago.
26. Laffont, J.-J. [1993]: *The Economics of Uncertainty and Information*, (4th printing) The MIT Press, Cambridge (MA).
27. Laffont, J.-J. – Martimort, D. [2002]: *The Theory of Incentives*, Princeton University press.
28. Laffont, J.-J. – Tirole, J. [1986]: Using Cost Observation to Regulate Firms, *Journal of Political Economy*, 94:614–641.
29. Laffont, J.-J. – Tirole, J. [1993]: *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation*, The MIT Press, Cambridge (MA).
30. Léonard, D. – Long, N. van [1992]: *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics,* Cambridge University Press.
31. Macho-Stadler, I. – Pérez-Castrillo, J. D. [2001]: *An Introduction to the Economics of Information*, (2nd edition), Oxford University Press.
32. McShane, E. J. [1989]: The Calculus of Variations from the beginning through Optimal Control Theory, *SIAM Journal on Control and Optimization,* 27 (5):916–939.
33. Molho, I. [1997]: *The Economics of Information,* Blackwell Pub.
34. Myerson, R. [1979]: Incentive Compatibility and the Bargaining Problem, *Econometrica*, 47:61–73.
35. Myerson, R. [1991]: *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge.
36. Nordhaus, W. D. [1975]: The Political Business Cycle, *Review of Economic Studies,* 2:169–190.
37. Pauly, M. V. [1968]: The Economics of Moral Hazard, *Quarterly Journal of Economics*, 88:44–62.
38. Plourde, C. G. [1970]: A Simple model of Replenishable Natural Resource Exploitation, *American Economic Review,* 60:520–522.

39. Pontrjagin et al. [1968]: Optimális folyamatok elmélete, Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó.
40. Pontryagin, L. S. – Boltyanskii, V. G. – Gamkrelidze, R. V. – Mishchenko, E. F. [1986]: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Classics of Soviet Mathematics, Gordon & Breach Science Publishers, New York (transl. by K. N. Trirogoff).
41. Ramsey, F. [1928]: A Mathematical Theory of Savings, *Economic Journal,* 38:543–559.
42. Rothschild, M. – Stiglitz, J. [1976]: Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics*, 90:629–650.
43. Salanié, B. [1997]: *The Economics of Contracts*, The MIT Press, Cambridge (MA).
44. Seierstad, A. – Sydsaeter, K. [1987]: *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, London.
45. Shell, K. [1966]: Towards a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation, *American Economic Review,* 1-2:62–68.
46. Silberberg, E. – Suen, W. [2001]: *The Structure of Economics,* McGraw-Hill.
47. Simonovits András [1998]: *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, KJK. Budapest.
48. Spence, A. M. [1973]: Job Market Signaling, *Quarterly Journal of Economics*, 80:335–374.
49. Spence, A. M. [1974]: *Market Signaling*, Harvard University Press, Cambridge.
50. Stiglitz, J. [1977]: Monopoly, Nonlinear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market, *Review of Economic Studies*, 44: 407–430.
51. Sydsaeter, K. – Hammond, P. [2005]: *Further Mathematics for Economic Analysis,* Prentice Hall.
52. Takayama, A. [1994]: *Analytical Methods in Economics*, University of Michigan Press.
53. Tallos Péter [1998] : *Dinamikai rendszerek alapjai*, Aula, Budapest.
54. Wilson, C. [1977]: A Model of Insurance Markets with Incomplete Information, *Journal of Economic Theory*, 16:167–207.
55. Wilson, R. B. [1992]: Strategic Analysis of Auctions, In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications,* (R. J. Aumann – S. Hart editors), Vol. 1., 227–279., North-Holland, Amsterdam,
56. Wilson, R. B. [1993]: *Nonlinear Pricing*, Oxford University Press.

OPTIMAL CONTROL THEORY AND THE THEORY OF GAMES WITH ASYMMETRIC INFORMATION

Optimal control theory is a well-known tool for dynamic optimization. The paper presents one of it's lesser-known non-dynamic applications in asymmetric information economics, especially in screening. It gives an example of this type of application.

OSZTOZKODÁSI JÁTÉKOK[1]

TASNÁDI ATTILA
Budapesti Corvinus Egyetem

Egy osztozkodási játékban a szereplők egy jószágból már rendelkezésre álló mennyiséget osztanak el egymás között, meghatározott szabályok szerint. Érdekes feladat olyan osztozkodási játékok konstruálása, amelyek egy a szereplők számára bizonyos igazságossági kritériumoknak eleget tevő elosztást biztosítanak.

Kétszereplős osztozkodási problémára egy megoldás a közismert ,,az egyik felez, a másik választ" eljárás, amely szerint az egyik szereplő saját értékítélete szerint két egyenlő részre osztja az elosztandó mennyiséget, majd a másik szereplő választhat egyet a két rész közül. Már Hésiodos (kb. i.e. VII. évszázad) ,,Theogonia" eposzában Prométheusz és Zeusz az egyik felez másik választ eljárással osztozkodtak a közösen elfogyasztandó húson. Steinhaus [16] általánosította az eljárást három szereplőre és tanítványai, Banach és Knaster, pedig tetszőleges n-re. Az általuk adott eljárások egy úgynevezett arányos eredményt garantálnak, ami alatt az értendő, hogy bármely szereplő a többi szereplő cselekedeteitől függetlenül képes az arányos részesedését biztosítania. Egy osztozkodási játék megoldásával szembeni erősebb igazságossági elvárás az irigységmentesség, amely követelmény szerint saját értékítélete alapján mindenki úgy érzi, hogy ő járt a legjobban. Ebben a dolgozatban áttekintjük az arányos és az irigységmentes osztozkodási eljárásokat, továbbá ismertetünk néhány érdekes nyitott kérdést.

1 Osztozkodási játék

Kezdjük az általunk vizsgálandó *osztozkodási problémával.* Jelölje a továbbiakban N az osztozkodásban résztvevő szereplők véges halmazát, - az egész elosztandó tárgyat (a továbbiakban *tortát*), $\mathcal{A}$ a lehetséges tortaszeletek halmazát (egy - fölötti algebra), $\mu_i : \mathcal{A} \to [0,1]$ az $i \in N$ személy tortaszelet értékelő függvényét (egy $\mathcal{A}$ fölötti normált végesen additív mérték). A továbbiakban csak folytonos osztozkodási problémákkal foglalkozunk: minden $i \in N$ szereplő esetén minden $A \in \mathcal{A}$ szeletnek van bármely $\lambda \in [0,1]$ arányú $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$ és $\mu_i(B) = \lambda\mu_i(A)$ részszelete. Feltesszük még, hogy a szereplők csak saját értékelő függvényeiket ismerik.

Egy *osztozkodási eljárás* a szereplőket meghatározott szabályok szerint felszólíthatja vágások végrehajtására és tortaszeletek kiértékelésére. Az előbbi

[1]Beérkezett: 2006. október 10. A szerző kifejezi köszönetét egy anonim bíráló hasznos megjegyzéseiért. A kutatás a Bolyai János Kutatási ösztöndíj támogatásával készült. E-mail: `attila.tasnadi@uni-corvinus.hu`. URL: `www.uni-corvinus.hu/~tasnadi`.

egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz megadását jelenti, míg az utóbbi a megkérdezett i szereplő $\mu_i(A)$ értékelésének megismerésére irányul. Az elvégzett vágások, illetve válaszok függvényében az eljárás újabb vágások és értékelések elvégzésére szólítja fel a szereplőket, amíg még van elosztandó tortaszelet. Egy eljárás véges, ha az említett lépések véges sokszor történő végrehajtása után felosztja a tortát tetszőleges osztozkodási probléma esetén. Egy osztozkodási eljárás segítségével meghatározható a torta egy $(A_i)_{i \in N}$ (ahol $A_i \in \mathcal{A}$) *felosztása*, amely az - torta egy partíciója. Adott osztozkodási probléma mellett egy adott osztozkodási eljárás egy olyan játékot határoz meg, amelyben a szereplők (játékosok) akciói a vágások és az értékelések, és amelynek kimenetele a torta egy partíciója a vele járó értékelésekkel.

Az osztozkodási eljárásokat számos kritérium segítségével jellemezhetjük. Mivel egy alkalmazott eljárás számára ismeretlenek az egyes szereplők tortaszelet értékelő függvényei, ezért elvárjuk, hogy az eljárások *igazmondásra ösztönözzenek*, azaz egy tortaszelet kiértékelése esetén a szereplők valódi értékítéleteiket adják meg, továbbá egy adott $\alpha \in (0,1)$ méretű vágás megkövetelése esetén a felszólított szereplő saját értékítélete szerint valóban egy α méretű szeletet vágjon le. Az igazmondásra ösztönzést azzal érheti el egy eljárás, hogy minden egyes szereplő ,,hazudozásával" csak önmagának árthat. Egy nagyon egyszerű igazmondásra ösztönző eljárás a ,,diktatórikus", azaz amelyik az egész tortát egy előre kiszemelt személynek adja. Mi a ,,diktatórikus" eljárással szemben valamilyen igazságossági kritériumnak is eleget tevő eljárásokat keresünk. A legegyszerűbb igazságossági kritérium az *arányosság* kritériuma, amely megköveteli, hogy minden egyes szereplő megfelelő döntések esetén garantálni tudja önmaga számára (a többi szereplő cselekedeteitől függetlenül) saját értékítélete szerint a torta arányos részét (n szereplő esetén egy $1/n$-ed értékű részt). Ennél erősebb igazságossági kritérium az *irigységmentesség* kritériuma, amely azt követeli meg, hogy minden egyes szereplő saját értékítélete szerint a torta egyik legértékesebb részét kapja ($\forall i, j \in N : \mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$, ahol $(A_i)_{i \in N}$ a torta egy felosztása).

2 Arányos osztozkodási eljárások

Ebben a szakaszban három arányos és véges osztozkodási eljárást; továbbá egy arányos, de nem véges eljárást ismertetünk.

2.1 Fink eljárása

Talán Fink eljárása [11] áll szellemében a legközelebb ,,az egyik felez, a másik választ" kétszemélyes eljáráshoz. Két személy esetén ,,az egyik felez, a másik választ" eljárás alkalmazandó. Három személy esetén kérjük meg az A személyt a torta felezésére, majd B-t a két szelet közül a nagyobbik kiválasztására. Ezek után kérjük meg külön-külön A-t és B-t a saját szeletük felharmadolására. Végül C mindkét részből választhat egy-egy harmadot. Ekkor C mint utolsó választó garantálhatja magának (saját értékítélete szerint)[2] a torta 1/3-át. Ha A és B a saját felét valóban harmadolta, akkor a torta felének kétharmada garantált számukra, ehhez persze az is kell, hogy az elején A valóban felezzen, majd B a nem kisebbik felet válassza. Tehát az eljárás igazmondásra ösztönöz, arányos és véges.

Az eljárást az n szereplős esetre rekurzívan definiáljuk. Tegyük fel, hogy $n-1$ szereplő már arányosan elosztotta a tortát az $n-1$ személyes Fink-eljárással. Kérjük most az $n-1$ személyt arra, hogy az általuk legalább $1/(n-1)$-re értékelt részüket n egyenlő részre osszák. Ezek után válasszon az n-edik személy minden egyes személy részéből egy szeletet. Mint utolsó választó számára garantált az arányos része; továbbá, ha az első $n-1$ személy valóban n egyenlő részre vágta az addigi saját részét, akkor garantált számára a torta $\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$ része.

Fink eljárásának előnye, mint ez a rekurzív definícióból látható, hogy egy az osztozkodáshoz később csatlakozó személy nem okoz problémát az eljárás számára. Megjegyzendő még, hogy Fink eljárása $n!-1$ vágást igényel, ha a már jelenlevő személyek minden egyes szeletüket i egyenlő részre osztják az i-edik személy ($i=2,\dots n$) ,,érkezésekor”. Egy hasonló nagyságrendű vágást igénylő egyszerű arányos eljárást illetően lásd [17]. Fink eljárásának vágásigénye csökkenthető azzal, hogy az i-edik személy megjelenésekor a már jelenlevő $i-1$ személy (külön-külön) az addigi részesedését osztja i egyenlő részre. Ekkor $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ vágás szükséges.

2.2 Banach és Knaster eljárása

Az első n személyes arányos osztozkodási eljárást Banach és Knaster (lásd Steinhaus [16]) adta. Az $n=2$ esetre az eljárás az egyik felez és a másik választ eljárást használja. Ha $n>2$, akkor első lépésként 1 levág egy szeletet a tortából, majd tovább adja a levágott szeletet 2-nek. 2 megnézi a szeletet, és ha úgy gondolja, a szeletet egy vágással kiigazíthatja. Döntésétől függően az eredeti kiigazítatlan vagy a kiigazított szeletet adja tovább 3-nak. Az eljárás így ismétlődik, amíg egy szelet n-hez nem ér. Ekkor n eldöntheti, hogy elfogadja-e a szeletet vagy elutasítja. Ha n elfogadja, akkor n távozik a szelettel és $1,\dots,n-1$ osztozkodnak az összes megmaradt részen. Ha n elutasítja a szeletet, akkor a szeletet annak kell elvinnie, aki legutoljára vágott. A legutolsó vágó távozik, míg a többi $n-1$ személy osztozkodik a megmaradt összes tortaszeleten.

Még azt kell meggondolnunk, hogy Banach és Knaster eljárása valóban mindenkinek garantálja az arányos részét. Az $n=2$ esetben ez nyilván igaz. Tegyük fel, hogy Banach és Knaster eljárása $n-1$ személy esetén mindenki számára biztosítja a tortából az arányos részesedést. Az n személyes esetet vizsgálva kezdőlépésként 1-nek saját értékítélete alapján legalább a torta n-ed részét kell levágnia, mivel ha $1/n$-nél kisebb részt vág, megkockáztatja, hogy az $1/n$-nél kisebb szeletet neki kelljen elvinnie, hiszen az utolsó vágó szerepébe kerülhet. Ha pedig 1 egy $1/n$-nél nagyobb részt vág le, akkor előfordulhat,

[2] A továbbiakban nem írjuk ki, hogy egy adott hányadot mindig az adott személy értékítélete szerint értjük.

hogy az utolsó vágó vagy n egy, az 1 értékítélete szerint $1/n$-nél nagyobb szeletet visz el. Ekkor viszont 1 egy olyan $n-1$ személyes osztozkodásban fog részt venni, amelyben számára már csak a torta $\frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ részénél kisebb hányada biztosított. Az 1-re vonatkozó érvelést ismételve a többi szereplőnek is le kell vágnia a hozzá kerülő darabból a saját értékítélete szerinti $1/n$ értékű szeletet, ha az szerinte $1/n$-nél többet ér. Az első kör után egy személy eltávozik legalább $1/n$-nel, és visszamarad egy, a többiek által külön-külön legalább $(n-1)/n$-re értékelt rész, amelyet már egy $n-1$ személyes eljárással osztanak el egymás között.

Banach és Knaster eljárása első körében legfeljebb $n-1$-en vágnak. Ezek után a második körben már csak $n-1$-en osztozkodnak a megmaradt részen, ami a legrosszabb esetben $n-2$ vágáshoz vezethet. Most már csak $n-2$-en vesznek részt a megmaradt részek elosztásában. Ezt a gondolatmenetet folytatva adódik, hogy legfeljebb $(n-1)n/2$ vágás szükséges, ami nyilván kedvezőbb Fink módszerénél.

2.3 Even és Paz eljárása

Az ismert véges osztozkodási eljárások közül a nagyságrendileg legkevesebb vágást igénylő eljárást Even és Paz [10] adta meg, amely az oszd meg és uralkodj elven alapul. Az $n = 2$ esetben ,,az egyik felez és a másik választ" eljárást alkalmazza, míg az $n = 3$ esetre Banach és Knaster eljárását.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a tortát csak párhuzamos vágásokkal oszthatjuk föl. Képzeljünk mondjuk egy téglalap alakú tortát és térjünk rá a négyszemélyes esetre. Kérjünk fel három személyt arra, hogy párhuzamos vágásokkal külön-külön osszák fel két egyenlő részre. Nevezzük a medián vágónak[3] azt a személyt, aki a középső vágást végezte el. Kérjük meg a negyedik, mondjuk i, személyt arra, hogy jelölje meg a középső vágástól balra és jobbra lévő részek közül a számára értékesebbet. Ha i a bal oldali részt választja, akkor a bal oldali részen a medián vágótól balra vágó személlyel osztozkodik, míg a jobb oldali részen a fennmaradó két személy osztozkodik. Mindkét részen a két-két személy ,,az egyik felez és a másik választ" eljárással osztozkodik. Hasonlóan járhatunk el, ha i a jobboldali részt választja.

Ha mindenki igazmondó, akkor könnyen látható, hogy mind a négy személy számára biztosított a torta egynegyede. A negyedik személy nyilván igazmondó, azaz kijelöli a számára értékesebb oldalt. A három felező személy hamis felezőpont megadásával úgy kerülhet a medián vágó szerepébe, hogy ezek után egy a számára csak a torta felénél kevesebbet érő tortarészen kelljen majd osztozkodnia. Tehát egy ,,hazudozó" személy megkockáztatja az arányos részesedésének elvesztését.

Az ötszemélyes eset a négyszemélyes eljárás kisebb módosítását igényli. Most négy személyt arra kérünk fel, hogy balról jobbra nézve osszák fel a tortát párhuzamos vágásokkal $2:3$ arányban. Nevezzük most medián vágónak azt a személyt, aki balról jobbra nézve a második vágást végezte el. Az ötödik, mondjuk i, személytől megkérdezzük, hogy a medián vágástól

[3] Ha a medián vágó személye nem egyértelmű, akkor válasszuk valamelyiküket.

balra lévő rész ér-e számára 2/5-öt. Ha igen, akkor a medián vágótól balra vágó személlyel osztozkodjanak a medián vágástól bal oldali részen; különben pedig a medián vágótól jobbra lévő részen osztozkodjon a medián vágótól jobbra vágó két személlyel. A fennmaradó részen a maradék három, illetve két személy osztozkodjon. A négyszemélyes esethez hasonlóan ellenőrizhető, hogy az eljárás igazmondásra ösztönöz és arányos.

A páros szereplős eset a négyszemélyes esethez hasonlóan megadható. Nevezetesen, egy szereplő kivételével mindenki felez, majd a nem felező szereplő kijelöli a medián vágás által elválasztott két rész közül az értékesebbiket. Ezek után két fele annyi szereplős osztozkodás végzendő el. A páratlan szereplős eset az ötszereplős esettel analóg. Ha $n = 2k + 1$, akkor $2k$ személy párhuzamos vágásokkal felosztja a tortát balról jobbra nézve $k : k + 1$ arányban. A $2k + 1$-edik személy pedig eldönti, hogy a medián vágó által meghatározott két rész melyikének osztozkodásában kíván részt venni $k - 1$, illetve k személlyel.

Bizonyítható, hogy Even és Paz eljárásának a vágásigénye $n \log_2 n$ nagyságrendben növekszik. Sgall és Woeginger [14] igazolta, hogy az olyan arányos osztozkodási eljárások körében, amelyek az egyes szereplőknek egymás melletti intervallumokat juttatnak, nem található nagyságrendileg $n \log_2 n$-nél kevesebb vágást igénylő eljárás. *Nyitott kérdés* azonban, hogy ha a szereplők nem szomszédos szeleteket is kaphatnak, akkor konstruálható-e olyan véges arányos eljárás, amely nagyságrendileg kevesebb vágással is beéri.

2.4 Dubins és Spanier mozgó késes eljárása

Dubins és Spanier eljárása [9] az eddig ismertetett eljárásokkal ellentétben egy nem véges arányos elosztási eljárás, ugyanis a szereplőknek egy a torta fölött balról jobbra mozgó kés elhelyezkedésének bármely pillanatában ki kell értékelniük a késtől balra elhelyezkedő tortaszeletet.

Kezdetben helyezzünk el egy kést a torta bal szélén, amelyet elindítunk a torta jobb széle felé. A kést az osztozkodásban résztvevő n személy bármelyike megállíthatja, és ekkor a kés levágja a torta bal szélétől a pillanatnyi elhelyezkedéséig terjedő szeletet, amelyet a kést megállító személy köteles elvinni. A visszamaradó szeleten már csak $n - 1$ személy osztozkodik az eljárást ismételve, elindítva a kést a megmaradt szelet bal szélétől. Az eljárás addig ismétlődik, amíg már csak egy személy marad hátra.

Dubins és Spanier eljárása arra ösztönöz egy személyt, hogy pontosan akkor állítsa meg a kést, amikor eléri az arányos részesedését. Nyilván nem érdemes a kést az arányos részesedés előtt megállítani, hiszen ekkor az arányos részesedésnél kevesebb jut a kést leállító személynek. Ha az arányos részesedésénél tovább engedi egy személy a kést, akkor pedig megkockáztatja, hogy valaki más előtte megállítja a kést, és így egy $(n - 1)/n$-nél kisebb szeleten kénytelen osztozkodni $n - 1$ személlyel. Ezek után már könnyen látható, hogy az eljárás általában is arányos.

Dubins és Spanier eljárása nyilván csak $n - 1$ vágást igényel, ami kedvezőbb az Even és Paz eljárásánál említett $n \log_2 n$ nagyságrendnél. Ez a javulás azonban csak úgy érhető el, hogy a szereplők kontinuum sok kiértékelést végeznek.

3 Irigységmentes osztozkodási eljárások

Ebben a szakaszban egy véges három személyes irigységmentes eljárást és egy nem véges irigységmentes eljárást ismertetünk.

3.1 Selfridge és Conway eljárása

Selfridge és Conway [4] eljárása háromszemélyes osztozkodási problémákra szolgáltat egy irigységmentes felosztást.

Kérjük föl A-t arra, hogy harmadolja el a tortát. Jelöljük a három adódó I, J és K szeletet úgy, hogy $\mu_B(I) \geq \mu_B(J) \geq \mu_B(K)$, azaz B számára I a legértékesebb, J a második legértékesebb és K a harmadik legértékesebb szelet. Kérjük fel B-t arra, hogy igazítsa le I-t J-vel azonos értékűre. Jelölje L a leigazított szeletet és $M = I \setminus L$ a levágott darabot.[4] Válasszon most a három személy a J, K és L szeletek közül a C, B, A sorrendben, ahol ha C nem L-et választja, akkor B köteles L-et elvinnie.[5] Két esetet különböztetünk meg.

(a) Ha B vitte el L-et, akkor C-t megkérjük arra, hogy ossza fel M-et három egyenlő részre. Ezek után válasszon a három személy a három szelet közül a B, A, C sorrendben.

(b) Ha C vitte el L-et, akkor B-t kérjük meg arra, hogy harmadolja el M-et. Majd C, A és B válasszanak egymás után a három szelet közül.

Belátjuk, hogy a Selfridge–Conway-eljárás egy irigységmentes elosztást szolgáltat. Nézzük az (a) esetet. Az A a B-t nem irigyelheti, hiszen B az I-nek csak egy részét kapta. Az A a C-t sem irigyelheti, mivel az első körben C-vel azonos értékű szelethez jutott és a második körben C előtt választhat. B senkit sem irigyelhet, mivel az első körben az egyik legnagyobb szeletet vitte el és a második körben pedig elsőnek választhatott. C sem irigyelhet senkit, mert az első körben először választhat és a második kör három egyenlő szeleteinek egyikét kapta. A (b) eset hasonlóan igazolható. Továbbá nem nehéz belátni, hogy az eljárás igazmondásra ösztönöz.

Selfridge és Conway eljárása egy véges irigységmentes eljárás, amely nem terjeszthető ki több személyre. Ismertek ugyan többszemélyes irigységmentes véges eljárások is, ezek azonban *nem korlátosak* (lásd [4] és [13]), ami alatt az értendő, hogy rögzített számú szereplő esetén is konstruálhatók tetszőlegesen sok vágást igénylő osztozkodási problémák.

---

[4] $M = \emptyset$, ha B számára I és J azonos értékű.

[5] Az $M = \emptyset$ esetben már itt véget ér az eljárás.

3.2 Brams, Taylor és Zwicker eljárása

Brams, Taylor és Zwicker [5] eljárása egy négyszemélyes irigységmentes korlátos mozgó-késes eljárás, amely Austin [1] kétszemélyes mindkét fél számára pontosan 50%-ot juttató eljárására, valamint a Selfridge és Conway eljárásában rejlő gondolatokra épít.

Austin eljárásánál az egyik szereplő, mondjuk A, két párhuzamos kést mozgat folyamatosan balról jobbra úgy, hogy a két kés közötti terület számára mindig a torta felét érje. Induláskor a bal oldali kés a torta bal szélénél helyezkedik el, míg a jobb oldali kés A felezőpontja fölött.[6] Abban a pillanatban, amikor B megállítja a két kést, A elvégzi a kések által kijelölt helyeken a két vágást. Ezek után sorsolással (mondjuk érmedobással) eldöntendő, hogy melyik szereplő kapja a középső szeletet. Ekkor a másik szereplőnek megmarad a két szélső szelet. Ha B nem állítaná meg a késeket még mielőtt a jobb oldali kés elérné a torta jobb szélét, akkor A a bal oldali késsel elfelezi a tortát, majd érmedobással eldöntik a szeletek sorsát. Nyilván A-nak végig ügyelnie kell arra, hogy a két kés közötti szelet a torta felét érje számára. B-nek, akkor kell megállítania a késeket, amikor A-val egyezik az értékítélete. Kérdéses még, hogy van-e ilyen pillanat. Ha B értékítélete, a két fél tortát illetően, induláskor megegyezik A értékítéletével, akkor már is találtunk egy ilyen pillanatot. Különben B számára a két kés közötti szelet (i) értékesebb vagy (ii) értéktelenebb a másik szeletnél. Ha B elengedné a jobb oldali kést a torta jobb oldali végpontjáig, akkor a két kés közötti szelet (i) értéktelenebb vagy (ii) értékesebb lesz a másik szeletnél. Folytonossági megfontolásból létezik egy olyan közbülső pillanat, amikor B számára a két kés közötti szelet azonos értékű a két szélső szelettel.

Térjünk most rá Brams, Taylor és Zwicker eljárására. Először Austin eljárásának kétszeri alkalmazásával A és B elnegyedeli a tortát. A kapott X_1, X_2, X_3 és X_4 részekre ekkor $\mu_A(X_i) = \mu_B(X_j)$ minden $i, j = 1, 2, 3, 4$-re. Tegyük fel, hogy $\mu_C(X_1) \geq \mu_C(X_2) \geq \mu_C(X_3) \geq \mu_C(X_4)$. Ossza fel C az X_1 részt Y_1 és Y_2 részekre úgy, hogy $\mu_C(Y_1) = \mu_C(X_2)$. Válasszanak az Y_1, az X_2, az X_3 és az X_4 részek közül a D, C, B, A sorrendben, azzal a kikötéssel, hogy ha D nem Y_1-et választotta, akkor C köteles Y_1-et elvinni. Az első (választási) kör után senki sem irigyel senkit, mivel D az első választó, C általa ítélt két legnagyobb rész egyikét vitte el, és A, B számára maradt két $1/4$ értékű rész.

Nézzük azt az esetet, amikor D viszi el Y_1-et. Ossza ekkor B és C az Y_2 részt az Austin-féle eljárással négy egyenlő részre. A kapott Z_1, Z_2, Z_3 és Z_4 részekre tehát $Y_2 = \cup_{i=1}^4 Z_i$, $\mu_B(Z_i) = \mu_B(Y_2)/4$ és $\mu_C(Z_i) = \mu_C(Y_2)/4$ minden $i = 1, 2, 3, 4$-re. Ezek után a szereplők a D, A, C, B sorrendben választanak a Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 részek közül. Bármelyikük csak az előttük választót irigyelhetné, továbbá B és C senkit sem irigyel, mivel Y_2-t négy azonos értékű részre osztották. Végül A nem irigyli D-t, mert D egy legfeljebb X_1 értékű részhez juthat.

[6] Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nincsenek A és B számára nulla értékű tortaszeletek.

A másik eset, amikor C viszi el Y_1-et, hasonló. Ossza ekkor B és D az Y_2-t az Austin-féle eljárással négy egyenlő részre. A szereplők most a C, A, D, B sorrendben választanak. Bármelyikük csak az előttük választót irigyelhetné, továbbá B és D senkit sem irigyel, mivel Y_2-t négy azonos értékű részre osztották. Végül A nem irigyli C-t, mert C X_1-nek egy részszeletét kapja.

Megjegyzendő, hogy négynél több személyre csak $\varepsilon > 0$ közelítő vagy nem korlátos irigységmentes eljárások ismertek (lásd [4]-ben és [13]-ban).

4 Összefoglalás

Megismerkedtünk néhány arányos és irigységmentes osztozkodási eljárással. A tárgyalt eljárásokon kívül további eljárások találhatók [4]-ben és [13]-ban.

A dolgozatban három nyitott kérdést említettünk:

1. Található-e Even és Paz eljárásánál hatékonyabb véges osztozkodási eljárás?

2. Található-e négyszemélyes véges és korlátos irigységmentes eljárás?

3. Található-e ötszemélyes korlátos mozgó-késes irigységmentes eljárás?

A mozgó-késes eljárásokra vonatkozó frissebb eredményeket illetően lásd [3]. Az osztozkodási problémák esetén enyhíthető például a folytonos oszthatóság feltétele vagy az azonos mértékű követelések feltétele (lásd [4]-ben és [13]-ban). A tortaszelet értékelő függvények véges additivitásának gyengítésével (telítődés) foglalkozik [8] és [12]. Más igazságossági kritériumokat (pl. a legrosszabbul járó járjon a lehető legjobban) vizsgál [6], [7] és [15]. [18] igazolja, hogy nem található egyszerre Pareto hatékony és irigységmentes kétszemélyes eljárás. Hatékony, illetve irigységmentes elosztások létezésével foglalkozik [2].

Irodalom

1. Austin A. K., Sharing a Cake, *Mathematical Gazette*, 66 (1982) 212–215.
2. Barbanel J. B., Taylor A. D. *The Geometry of Efficient Fair Division* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 2005).
3. Barbanel J. B., Brams S. J., Cake division with minimal cuts: envy-free procedures for three persons, four persons, and beyond, *Mathematical Social Sciences*, 48 (2004) 251–269.
4. Brams S. J., Taylor A. D., *Fair Division: From Cake Cutting to Dispute Resolution* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1996).
5. Brams S. J., Taylor A. D., Zwicker W. S., A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 (1997) 547–554.
6. Dall'Aglio, M., The Dubins-Spanier optimization problem in fair division theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 130 (2001) 17–40.

7. Dall'Aglio, M., Hill, T. P., Maximin share and minimax envy in fair-division problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 281 (2003) 346–361.
8. Dall'Aglio, M., Maccheroni, F., Fair division without additivity. *American Mathematical Monthly*, 112 (2005) 363–365.
9. Dubins L. E., Spanier E. H., How to Cut a Cake Fairly, *American Mathematical Monthly*, 68 (1961) 1–17.
10. Even S., Paz A., A Note on Cake Cutting, *Discrete Applied Mathematics*, 7 (1984) 285–296.
11. Fink A. M., A Note on the Fair Division Problem, *Mathematics Magazine*, 37 (1964) 341–342.
12. Maccheroni, F., Marinacci, M., How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations, *Social Choice and Welfare* 20 (2003) 457–465.
13. Robertson J., Webb W., *Cake-cutting algorithms: be fair if you can* (A K Peters, Ltd., Natick, 1998).
14. Sgall J., Woeginger G. J., A Lower Bound for Cake Cutting, *Lecture Notes in Computer Science*, 2832 (2003) 459–469.
15. Shishido H., Zeng D., Mark-Choose-Cut Algorithms For Fair And Strongly Fair Division, *Group Decision and Negotiation*, 8 (1999) 125–137.
16. Steinhaus H., The Problem of Fair Division, *Econometrica*, 16 (1948) 101-104.
17. Tasnádi A., A new proportional procedure for the n-person cake-cutting problem, *Economics Bulletin*, 4/33 (2003) 1–3.
18. Taylor A. D., A paradoxical Pareto frontier in the cake-cutting context, *Mathematical Social Sciences*, 50 (2005) 227–233.

GAMES OF FAIR DIVISION

In this survey we presented several proportional and envy-free cake-cutting algorithms. We also mentioned some interesting open problems.

STABIL PÁROSÍTÁSI MODELLEK ÉS EZEKEN ALAPULÓ KÖZPONTI PÁROSÍTÓ PROGRAMOK[1]

BIRÓ PÉTER
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Áttekintő jellegű dolgozatom célja bemutatni a legfontosabb stabil párosítási modelleket, és ezek fő alkalmazási területeként a —bizonyos gazdasági, társadalmi helyzetekben minden szereplőnek elfogadható megoldást kínáló— központi párosító programokat. Emellett ismertetek néhány friss kutatási eredményt a párosítás-piacok dinamikájára, illetve a stabil párosítási problémák bonyolultságára vonatkozóan. Végül megmutatom, hogy ez a modellcsalád miként helyezhető el a kooperatív játékelmélet tárgykörében.

Bevezetés

Stabilnak nevezünk egy olyan egyensúlyi helyzetet, ahol nincsenek olyan szereplők, akiknek lehetőségük van egy új együttműködés létrehozására, amelyben mindannyian jobban járnának (felbontva eközben esetleg más jelenlegi kapcsolataikat). Gale és Shapley 1962-es, klasszikussá vált cikkében [20] a házassági kapcsolatok alapmodelljén szemléltette és elemezte a problémát. Egy természetes algoritmus segítségével megmutatták, hogy miként található tetszőlegesen megadott preferenciákra egy stabil párosítás fiúk és lányok között. A stabilitás itt azt jelenti, hogy nincs olyan blokkoló pár, melyben mindkét félnek megérné az új házasságot megkötnie (elhagyva esetleg jelenlegi házastársát).

A stabil párosítás probléma, és az ennek különféle általánosításaiból kapott modellcsalád a játékelmélet és a kombinatorikus optimalizálás egyik fontos kutatási területévé vált az elmúlt évtizedekben. Ennek talán legfőbb magyarázata, hogy a modellek igen hasznosnak bizonyultak gazdasági és társadalmi problémák leírására, sőt, az ezekre épülő algoritmusokat egyre szélesebb körben kezdték el alkalmazni központi párosító programokban. Dolgozatom célja az alapmodellek és a legismertebb alkalmazások bemutatása.

A stabil párosítás problémát páros gráfok esetén napjainkban is gyakran tárgyalják a házassági kapcsolatok kontextusában. A példa használatához azonban hallgatólagosan három dolgot biztosan felteszünk: minden szereplőnek legfeljebb egy házastársa lehet, házasság csak fiú és lány között létesülhet, továbbá nincs kifizetés (hozomány) a szereplők között. A stabil párosítási modellek legfontosabb általánosításai pontosan ezen feltételek feloldásával kaphatók meg, a dolgozat eszerint tagolódik fejezetekre.

[1] Beérkezett: 2006. október 12. E-mail: `pbiro@cs.bme.hu`.

Az első fejezetben Gale és Shapley klasszikus eredményeit mutatom be az eredeti formájában. A stabil házasság megtalálására —valamint a legfontosabb alkalmazások alapvető eljárásául— szolgáló „leánykérő algoritmus" elemzését ismertetem és működését egy példán szemléltetem.

A második fejezetben egy szereplő több kapcsolatot is létesíthet egyszerre egy adott kvóta erejéig. A *stabil b-párosítás* probléma szintén megoldható a Gale-Shapley algorimussal, a gyakorlatban is ezt a módszer alkalmazzák széles körben kétoldali piacokon. A központi párosító programok közül bemutatom a legismertebbeket: az egyetemi felvételi rendszert —melyet hazánkban is lényegében ebben a formában működtetnek— illetve a gyakornok elhelyezését.

A harmadik fejezetben a kétoldali piacok helyett egyoldaliakat vizsgálunk. A stabil párosítás problémát itt páros gráfok helyett tetszőleges gráfokon értelmezzük és *szobatárs problémának* nevezzük. Megmutatom, hogy ekkor csak a stabil *fél-párosítások* létezését lehet garantálni. Ismertetek néhány új eredményt a piac dinamikáját, illetve a problémák bonyolultságát illetően. Alkalmazásra példaként az oszthatatlan javak páronkénti cseréjét hozom, melynek egyik fontos megvalósulásaként lehet említeni a páronkénti vesecsere-programokat.

Az utolsó, negyedik fejezetben megengedjük a kifizetést a szereplők között. A két modellcsalád közti különbséget a hozzájuk szorosan kapcsolódó játékelméleti problémák bemutatásával igyekszem megvilágítani. Megmutatom, hogy a kifizetéses esetben a stabil megoldás létezése páros gráfon —amely ekvivalens a hozzárendelési játékok magjának nemürességével— egyszerű következménye Egerváry 1931-es tételének.

Az itt közölt írás nagy része, bővebb terjedelemben, megtalálható közgazdász diplomamunkámban [7].

1 Stabil házasság probléma

Gale és Shapley [20] méltán híressé vált cikkében a stabil párosítások kétoldali alapmodelljét házasságkötésekkel szemléltette. A cikk egyik különlegessége, hogy semmilyen matematikai formulát nem használnak benne, állításaikat józan ésszel könnyen megérthető köznyelvi érveléssel bizonyítják. Ennek szellemében szeretném én is belátni két legfontosabb tételüket, és csak ezután ismertetem a probléma formális leírását.

Legyen adva fiúknak és lányoknak egy-egy halmaza. Egy fiú és egy lány között lehetséges a házasságkötés, ha kölcsönösen elfogadhatónak találják egymást. Feltesszük, hogy mindenki szigorú rangsort tud felállítani lehetséges partnerei között. Célunk egy *stabil házasítás* létrehozása, vagyis úgy rendezni párokba a lányokat a fiúkkal, hogy ne legyen blokkoló pár: egy olyan fiú és lány, akik nem egymás házastársai, de mindketten boldogabbak lennének egymással. Másképpen fogalmazva, ha egy fiú és egy lány nem házas, akkor legalább az egyiküknek jobban kell szeretnie a jelenlegi házastársát, ezért nem lesz elcsábítható. Egy stabil párosítás előállítható a *leánykérő algoritmussal*, melynek menete a következő.

Minden fiú az első körben tegyen ajánlatot a számára legjobban tetsző lánynak. Ha egy lány több ajánlatot is kapott, akkor tartsa meg a legjobb udvarlót, a többit utasítsa vissza. A visszautasított fiúk tegyenek ajánlatot a következő lánynak preferenciájuk szerint. Minden körben a lányok, akik több ajánlatot is kapnak, csak a legjobbat tartsák meg feltételesen, a többi kérőt utasítsák vissza véglegesen.

Észre kell vennünk, hogy így a visszautasított fiúk nekik egyre kevésbé tetsző lányoknak kénytelenek ajánlatot tenni, míg a lányok helyzete mindig csak javulhat a folyamat során. Emiatt egy fiú ugyanannak a lánynak biztosan nem tehet ajánlatot kétszer az algoritmus során, a folyamat tehát legfeljebb annyi körben biztosan véget ér, ahány lehetséges pár volt. Amikor már senki nem akar, vagy nem tud új ajánlatot tenni, akkor az udvarló fiúkból férjek lesznek, a maradék fiúkat viszont már minden lehetséges partnerük visszautasította, így ők agglegények maradnak.

Belátjuk, hogy az eredmény egy stabil párosítás. Párosítás, hiszen minden fiú egyszerre legfeljebb csak egy lánynak udvarolt, és minden lány legfeljebb egy kérőt tartott meg minden körben. A stabilitás igazolásához vegyünk egy fiú-lány párt akik nem egymás házastársai az algoritmus végén. Ennek két oka lehet, vagy udvarolt a fiú a lánynak, de az visszautasította, vagy nem is udvarolt neki. Ha a fiút a lány visszautasította valamikor az algoritmus során, akkor abban a pillanatban volt egy jobb kérője a lánynak, de mivel a lány csak egyre jobb és jobb ajánlatot kapott, ezért a legvégén is kedvezőbb udvarlója (férje) lesz a fiúnál. Ha viszont a fiú nem is tett ajánlatot a lánynak, akkor az csak azért lehetett, mert mindvégig neki jobban tetsző lányoknak udvarolt, így a folyamat végén is olyan feleséget kap, akit jobban kedvel a lánynál. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel (Gale-Shapley, 1962). *A stabil házasság problémának mindig létezik megoldása.*

A leánykérő algoritmus által adott eredményről azonban több is elmondható. Minden fiú olyan feleséget kap, akinél jobbat semmilyen más stabil párosításban nem kaphatott volna. Másképpen fogalmazva: minden fiú a legjobb *stabil párját* kapja, vagyis a párosítás *fiú-optimális.*

Tétel (Gale-Shapley, 1962). *A leánykérő algoritmussal kapott megoldás optimális minden fiúnak.*

Ennek igazolásához vezessünk be egy definíciót: mondjuk azt, hogy egy lány *elérhető* egy fiú számára, ha van olyan stabil párosítás, amelyben ők egymás házastársai. Indirekt módon tegyük fel, hogy András volt az első olyan fiú az algoritmus során, akit egy számára elérhető lány, Kati visszautasított. Ez csak úgy történhetett meg, hogy abban a pillanatban Katinak volt egy jobb kérője, mondjuk Balázs. Balázsnak biztosan nincs Katinál jobb elérhető partnere, hiszen akkor nem András lett volna az első olyan fiú, akit egy elérhető partner visszautasított. Emiatt Balázs abban a stabil párosításban sem kaphat jobb feleséget Katinál, amikor András és Kati egymással házas. Ez ellentmondás, hiszen Kati és Balázs ekkor egy blokkoló párt alkotna.

A stabil házasítás probléma leírása természetes módon adható meg gráfelméleti nyelvezettel. A szereplőket egy gráf csúcsainak feleltetjük meg, ha két szereplő egymásnak kölcsönösen elfogadható, akkor közöttük egy él fut a gráfban. Amennyiben a csúcsok halmaza kettéosztható oly módon (például fiúkra és lányokra), hogy élek csak a két halmaz között futnak, akkor a gráfot *párosnak* nevezzük. *Párosításnak* nevezünk egy élhalmazt, ha abban semelyik két élnek nincs közös pontja, vagyis az élhalmaz *független*. A lehetséges partnereken vett preferenciák szerint minden csúcsnak szigorú rendezése van a rá illeszkedő éleken. Ha például egy v csúcsra illeszkedik f és e él, és f jobb mint e, akkor azt $f >_v e$-vel jelöljük. Ezt az ábrákon egy irányított szöggel jelezhetjük, ami e élből f élre mutat. A kapcsolatok és egyéni rangsorok megadására gyakran preferencia-listákat használunk. Itt az egyes szereplők listájában a számára elfogadható partnerek vannak felsorolva a preferencia szerint csökkenő sorrendben.

Tömör leírást adhatunk a stabil párosításokra a *karakterisztikus függvény* segítségével. Egy adott $G = (V, E)$ gráfban egy $M \subseteq E$ párosítás leírására definiáljunk egy $x_M : E \longrightarrow \{0,1\}$ karakterisztikus függvényt, ahol minden $e \in E$ élre teljesül, hogy

$$x_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$$

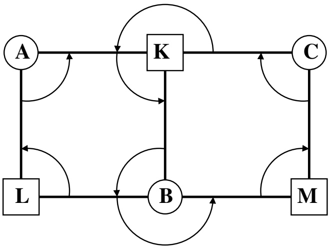
Ekkor az adott gráfra, és az egy csúcsra illeszkedő élek rendezésére $(G, \mathcal{O})$ egy M stabil párosítás definiálható a karakterisztikus függvényére megadott egyenlőtlenségekkel:

(P) Párosítás:
$\sum_{v\in e} x_M(e) \leq 1$ minden $v \in V$-re

(S) Stabilitás:
minden $e \notin M$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum_{v\in f, f\geq_v e} x_M(f) = 1$

Vagyis egy élhalmaz párosítás, ha minden csúcsot legfeljebb egy párosításbeli él fed. A párosítás pedig stabil, ha minden párosításban nem szereplő e élhez található olyan v csúcs, amelyre e illeszkedik és amely fedve van a csúcs által preferált f párosításbeli éllel.

1. Példa Végül lássunk egy példát a stabil párosítás problémára és a Gale-Shapley algoritmusra:



Fiúk	Preferencia	Lányok	Preferencia
A :	$[K, L]$	K :	$[B, A, C]$
B :	$[M, L, K]$	L :	$[A, B]$
C :	$[K, M]$	M :	$[C, B]$

Esetünkben Andrásnak például legjobban Kati tetszik, másodsorban Laura, Mónival pedig nem lehet kapcsolata (nem ismerik egymást, vagy valamelyikük inkább egyedül marad, mintsem ebben a házasságban részt venne). A leánykérő algoritmus során András Katinak, Balázs Móninak, Csaba pedig szintén Katinak tesz ajánlatot. Kati a két ajánlatból a számára kedvezőbbet, Andrásét tartja meg. A visszautasított Csaba a második körben Móninak kezd el udvarolni, melynek hatására Móni kikosarazza addigi kérőjét, Balázst. Végül, a harmadik körben Balázs ajánlatot tesz Laurának, amit ő elfogad. Nincs több visszautasítás, az algoritmus megáll, András Katival, Balázs Laurával, Csaba pedig Mónival köt házasságot. Meggondolhatjuk, hogy ha a lányok tennék az ajánlatokat (fiúkérő algoritmus), akkor az András-Laura, Balázs-Kati, Móni-Csaba párok jönnének létre, és így két lány is jobban járna.[2]

A stabil párosítás problémájának tanulmányozásához remek kiindulópont Roth és Sotomayor [35], valamint Gusfield és Irving [22] könyve. Az előbbi közgazdasági, játékelméleti nézőpontból, míg az utóbbi algoritmuselméleti, kombinatorikus aspektusból ad átfogó leírást a témakörről. Ajánlom továbbá Fleiner [17] munkáját, a stabil párosításokkal kapcsolatos mélyebb matematikai, hálóelméleti, gráfelméleti összefüggések megértéséhez.

2 Kapacitásos modellek, b-párosítás probléma

Magyarországon, úgy gondolom, hogy mindenki számára egy természetes elvárás az egyetemi felvételi rendszerrel szemben, hogy ha egy diákot nem vesznek fel egy szakra, akkor az csak két okból következhet be: vagy egy számára kedvezőbb helyre vették fel a diákot, vagy a szak kvótája lett feltöltve jobb jelentkezőkkel. A világ sok más helyén, például az Egyesült Államokban mégsem működtetnek ilyen rendszert, és nem csak a stabilitás természetes feltétele sérül, hanem a felvettek létszáma is hektikusan változhat egyes egyetemeken, mert a sikeres jelentkezők egy része csak az utolsó pillanatban dönt arról, hogy hová iratkozik be. Másrészről viszont hazánkban az iskolai felvételeken kívül tudtommal sehol máshol nem alkalmaznak központi párosító programot, míg a világ sok más helyén, például az Egyesült Államokban széles körben használnak ilyen centralizált eljárásokat a munkaerőpiacon, főként gyakornokok elhelyezésére már 1952 óta.

Mi ennek az oka? Véleményem szerint, legfőképpen az, hogy a fenti piacok szereplői nincsenek kellőképpen tudatában ezen központi párosító rendszerek társadalmi és gazdasági hasznának, és esetleg tartanak a szabad döntési

[2] A kutatások egy fontos irányvonala a szereplők stratégiájának elemzése. A kérdés leegyszerűsítve úgy fogalmazható meg, hogy egy eljárás során a szereplőnek érdemes-e mindig igazat mondani, a valós preferenciáját megadni a központi programnak, avagy el tud-e érni jobb végeredményt, ha néha hazudik. Megmutatható, hogy a leánykérő algoritmus esetén minden fiúnak optimális stratégia az igazmondás. A lányok közül viszont néhánynak érdemes hazudnia abban az esetben, ha nem csak egy stabil megoldása van a feladatnak. A fenti példában mondjuk ha Kati eltitkolná, hogy Andrást is hajlandó elfogadni férjnek, akkor végül Balázst kapná a leánykérő algoritmus eredményeként. A kérdéskör részletes elemzése megtalálható Roth és Sotomayor [35] könyvének 4. fejezetében.

joguk csorbulásától. Alvin Roth a terület talán legismertebb közgazdásza egy tanulmányában [33] a következőket írta a párosító-programokról: „Vegyük észre, hogy az itt vizsgált központosított piacok nem jelentenek központi tervezést, ahogyan a legtöbben ezt értelmezik, mivel ezek a piacok úgy lettek megalkotva, hogy érzékenyek legyenek a szereplők kinyilvánított preferenciáira, ahelyett, hogy egy tervező ezektől független céljainak elérését szolgálnák. Ami itt központosítva van, az nem az elérendő cél, hanem a piaci mechanizmus maga." Vagyis a központosított párosító-programok olyan szabályozási keretet teremtenek, amelyben a szereplők szabad választása hatékonyan juthat érvényre egy világos, mindenki által elfogadott automatizmus révén.

A motiváció ismeretében lássuk mi a stabil b-párosítás probléma formális megadása. Gráfelméletben, ha minden v pontra adva van egy egészértékű $b(v)$ kvóta, amelynél több éllel a v csúcs nem lehet fedve, akkor a feltételt teljesítő élhalmazt *b-párosításnak* nevezzük. A b-párosítás illetve a stabilitás kritériuma hasonlóképpen leírható tömör formulákkal a karakterisztikus függvények segítségével. Ez esetben egy $M^b \subseteq E(G)$ b-párosítás x_{M^b} karakterisztikus függvénye ugyanúgy az

$$x_{M^b}(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M^b \\ 0 & \text{ha } e \notin M^b \end{cases}$$

módon definiálható. A b-párosítás és a stabilitás feltétele pedig a következőképpen módosul:

b-Párosítás:
$\sum\limits_{v \in e} x_{M^b}(e) \leq b(v)$ minden $v \in V$-re

Stabilitás:
minden $e \notin M^b$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum\limits_{v \in f, f \geq_v e} x_{M^b}(f) = b(v)$

Gale és Shapley leánykérő algoritmusa a diákok elhelyezésére is hasonlóképpen használható, (munkájuk célja pontosan egy ilyen eljárás kidolgozása volt). A különbség csupán annyi, hogy a kvótákkal rendelkező egyetemi szakok a diákok jelentkezéséből nem csak a legjobb ajánlatát fogadják el, hanem annyi darabot tartanak meg a legjobb jelentkezések közül, amennyi a kvótájuk volt. A visszautasított diákok ugyanúgy a listájuk szerint tesznek újabb ajánlatokat minden egyes körben. A megoldásról hasonló indoklással belátható, hogy a jelentkezők számára ad optimális megoldást.

Érdemes megjegyezni, hogy a stabil b-párosítás probléma gráfelméleti konstrukciókkal visszavezethető stabil párosítás problémára (részletes leírás található erről Cechlárová és Fleiner [14] munkájában).

Egyetemi felvételi eljárás

A hazai egyetemi felvételi eljárás lényegében a Gale és Shapley által kidolgozott algoritmust követi. Fontos különbség, hogy az egyetemi szakok — felvételi pontszámok alapján kialakított— rangsora nem szigorúan rendezi a jelentkezőket.[3] A másik nem elhanyagolható eltérés, hogy a magyar „vonalhúzásos módszer" lényegében az egyetemi szakok felől futtatja az algoritmust, így a kapott eredmény a diákok számára mindig a lehető legrosszabb megoldást adja. Habár az eredmények közti különbség nem biztos, hogy jelentős, —véleményem szerint, és a nemzetközi tapasztalatok alapján— a hazai eljáráson már csak elvi okokból is érdemes lenne változtatni.

Végül megjegyzem, hogy Bolognai-folyamatként aposztrofált közösségi kezdeményezés, melynek célja az Európai Felsőoktatási Térség kialakítása, maga után vonhatja egy egységes európai felvételi rendszer bevezetésének szükségességét. Hiszen, ha a többszintű képzés egyik céljaként megvalósul a diákok nagymértékű mobilitása, vagyis egyre több jelentkező adja be felvételi kérelmét különböző országokban, akkor a nemzeti felvételi-rendszerek működésében zavar keletkezhet, amennyiben az eljárások nincsenek összehangolva.

Gyakornokok elhelyezése

Roth 1984-ben publikált cikkében [32] bemutatta az amerikai orvosi rezidensek elhelyezésére szolgáló párosító-program létrejöttének történetét. Sokak meglepetésére kiderült, hogy az 1952-ben bevezetett eljárás tulajdonképpen Gale és Shapley —mintegy 10 évvel később kitalált és elemzett— algoritmusát használja. A stabil eredményt adó programot a piac szereplői érdekeiket felismerve gyorsan elfogadták, és a program gyakorlatilag változatlan formában működik ma is. Az egyik, a sokasodó elemzések hatására bekövetkezett változtatás, hogy a 90-es évek végétől a kórházak helyett a jelentkezők felől futtatják az algoritmust, hogy így az utóbbiak számára optimális megoldás lehessen a végeredmény. Habár meg kell jegyezzem, hogy ez utóbbi változtatás Roth és Peranson [34] elemzése szerint csak elhanyagolható különbséget hozott a gyakorlatban, mindössze minden ezredik jelentkező kapott másik, jobb gyakornoki helyet.

A sikerek hatására több más szakmában (így például ügyvéd-jelöltek részére is) hasonló programokat indítottak be, és a világ számos helyén igyekeztek központi párosító-rendszereket bevezetni több-kevesebb sikerrel. Tanulságosnak tartom Roth [33] cikkét, amelyben 10 különböző párosító-programot hasonlít össze. Ezek közül négy algoritmus adott végeredményként stabil megoldást, és hatban előfordulhatott az instabilitás. A cikkben közölt legfontosabb megfigyelés szerint mind a négy stabil program változatlan formában használatban maradt, míg a másik hat közül, kettő kis volumenű program kivételével, mindegyik megszüntetésre került. A kétoldali párosítás-piacok részletesebb megismeréséhez elsősorban Roth és Sotomayor [35] könyvét ajánlom. Továbbá Alvin Roth honlapját, ahol a rengeteg tanulmány mellett számos alkalmazás elérhetősége is megtalálható.

---

[3] Ebből adódó problémák közül az egyik, hogy a kvóták betöltése nem lesz egyenletes. Emiatt, tudomásom szerint, nemrégiben egy új módosítás bevezetéséről kezdeményeztek vitát, melynek célja, hogy a százalékokban kiértékelt dolgozatok eredményeit nem kerekítik, hanem egy-az-egyben pontszámmá alakítják. Így sokkal kevesebb jelentkezőnek lesz azonos pontszáma, ez lényegesen javíthat az algoritmus hatékonyságán.

Végül szeretném kiemelni, hogy a felgyülemlett nemzetközi tapasztalatok alapján valószínűsíthető, hogy még rengeteg új piacon lehet számítani hasonló párosító-programok beindítására. Az Egyesült Államokban például az elmúlt években a bostoni általános iskoláknál [1] és a new yorki gimnáziumoknál [2] vezettek be központi felvételi eljárást. Hasonlóképpen nem tartanám rossz ötletnek, ha hazánkban is egy központi program segítené a gyakornokok elhelyezését.

3 Egyoldali modellek, szobatárs probléma

A stabil párosítás probléma általános esetét *stabil szobatárs problémának* nevezzük, mert itt bármely két szereplő között létrejöhet a párkapcsolat. Ekkor a feladatot leíró gráf tetszőleges lehet, de ettől eltekintve a karakterisztikus függvénnyel történő megadás ugyanazon (S) és (P) egyenlőtlenségekkel írható le. A problémát már Gale és Shapley is felvetette alapcikkében, sőt példát is adtak arra nézve, hogy nem mindig létezik megoldása egy ilyen feladatnak:

2. Példa Legyen a négy szereplő preferenciája a következő

Szereplő	Preferencia
A	$[B, C, D]$
B	$[C, A, D]$
C	$[A, B, D]$
D	tetszőleges

Itt az első három szereplő ,,körbe szereti egymást”. Könnyen látható, hogy egyik párosítás sem lehet stabil, hiszen ha hármójuk közül bármely kettő párt alkotna, akkor a harmadik el tudná csábítani a pár egyik tagját. Gondoljuk például azt, hogy négy teniszjátékos keres partnert magának, mindenki heti egy óra játékra. András Balázzsal játszana legszívesebben, majd Csabával, legkevésbé pedig Dénessel. (Dénest tulajdonképpen mindenki szeretné elkerülni, mert mindig késik és gyengén is játszik.) Erre a problémára nincs stabil megoldás. Ha például András Balázzsal alkotna párt, akkor Csaba Dénessel lenne kénytelen játszani, de ekkor Csaba és Balázs blokkoló párt alkotna, mindketten szívesebben játszanának egymással, mint jelenlegi partnerükkel.

Több mint két évtized elteltével Irving [23] konstruált először egy olyan algoritmust, amely tetszőleges gráf esetén megtalál egy stabil párosítást, amennyiben ilyen létezik az adott feladatra. A megoldások struktúrájának részletes leírása megtalálható Gusfield és Irving könyvében [22].

Tan [42] ismerte fel, hogy a stabilitást elrontó páratlan hosszú körökben szereplő párkapcsolatokat fél-intenzitással véve, egy olyan fél-párosítást kaphatunk, amely teljesít bizonyos stabilitási feltételeket.

A teniszjátékos példára gondolva András, Balázs és Csaba megegyezhet abban, hogy heti egyszer összejönnek, és egy-egy félórát játszanak egymással. Így mindhárman egy-egy órát játszanak és csak Dénesnek nem lesz párja. A megoldás stabilitása itt azt jelenti, hogy mindegyik párosban van egy olyan szereplő, aki nem szeretne több időt játszani abban a párban. Ha például András és Dénes kapcsolatát nézzük, akkor világos, hogy András miatt nem fognak ők semennyit se egymással játszani, mert András kitölti a teniszre fordított egy óráját két jobb partnerrel vívott fél-fél óra játékkal. Ha András és Balázs kapcsolatát nézzük, akkor a jelenlegi félóra játékot Balázs nem szeretné tovább növelni, hiszen ő a maradék félórájában Csabával játszik, akivel jobban szeret teniszezni.

Egy *stabil fél-párosításban* a szereplők párokat és *fél-párokat* alkothatnak. Minden szereplő legfeljebb egy párban vagy két fél-párban lehet benne. A stabilitás feltétele, hogy ha két szereplő nincs párosítva, akkor legalább az egyiküknek vagy van egy jobb párja, vagy van két jobb fél-párja. Továbbá, ha két szereplő fél-párban van, akkor legalább az egyiküknek van egy másik, ennél jobb fél-párja. Összefoglalóan, egy fél-párosítás stabil, ha nincs olyan blokkoló pár, amely szereplőinek lehetősége és egyben kölcsönös érdeke a kapcsolatuk intenzitásának növelése (csökkentve esetleg ezáltal más kapcsolataik kihasználtságát). Másképpen fogalmazva, ha egy párkapcsolat nincs teljesen kihasználva, akkor az intenzitás növelése legalább az egyik félnek nem érdeke, mert a maradék kapacitása le van kötve egy vagy több kedvezőbb kapcsolattal.

Egy fél-párosítást általában hM-el jelölünk, a benne szereplő párok halmazát M-el, a fél-párok halmazát pedig H-val. Vagyis $hM = H \cup M$.

A *stabil fél-párosítás* pontos definiálásához, nem kell mást tennünk, mint hogy a párosítást leíró függvény értékkészletét $\{0, 1\}$-ről $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-re módosítjuk úgy, hogy ha $hM = H \cup M$ egy fél-párosítás, akkor

$$x_{hM}(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ \frac{1}{2} & \text{ha } e \in H \\ 0 & \text{ha } e \notin hM \end{cases}$$

Ekkor az eredeti (P) és (S) egyenlőtlenségek változatlan formában írják le a fél-párosítás illetve a stabilitás feltételét.

A fél-párosítás tehát azt jelenti, hogy minden csúcs legfeljebb 1 összértékkel van fedve. A stabilitási kritérium pedig azt mondja, hogy ha egy e él nem szerepel a fél-párosításban ($e \notin hM$), akkor e egyik v pontjában vagy egy e-nél jobb M-beli éllel, vagy két e-nél jobb H-beli éllel van fedve. Egy fél-értékű (H-beli) e él egyik végpontjának maradék fél-kapacitása pedig egy e-nél jobb H-beli f éllel kell hogy fedve legyen.

Az a megfigyelés, hogy minden fél-párhoz kapcsolódnia kell az egyik szereplőjénél egy másik, nálánál jobb fél-párnak, rögtön azt eredményezi, hogy a fél-párok köröket alkotnak, amely mentén a szereplők „körben kedvelik egymást”. Az ilyen preferencia-köröket *ciklusoknak* nevezzük. Tan [42] a következő tételt látta be a stabil fél-párosításokról:[4]

Tétel (Tan, 1990). *Minden stabil szobatárs feladatra létezik stabil fél-párosítás,*

[4] Aharoni és Fleiner [4] megmutatta, hogy a tétel közvetlenül belátható Scarf [39] híres Lemmájából is.

amely párokból és fél-párokból álló páratlan hosszú ciklusokból áll. A szereplők halmaza tehát felosztható

a) párosítatlan,

b) ciklusbeli és

c) párosított szereplőkre.

Továbbá minden stabil fél-párosításban ugyanazok a páratlan ciklusok jönnek létre és ugyanazok a szereplők maradnak párosítatlanok.

Kérdés, hogy miért hasznos a stabil fél-párosítás megkonstruálása? Egyrészt, ha nem tartalmaz páratlan ciklust, akkor egy stabil párosítást találtunk a gráfban, ha pedig tartalmaz páratlan ciklust, akkor tudjuk, hogy nem létezhet stabil párosítás. Másrészt lehetnek olyan természetes feladatok (mint például a fent említett teniszjátékosok esete), ahol a fél-megoldásnak is van értelme. Végül, ha egy stabil fél-párosítás minden páratlan köréből elhagyunk egy szereplőt, és a ciklusok maradék szereplőit a körök mentén párokba rendezzük, akkor egy olyan párosítást kapunk, amely stabil a redukált halmazon. Másképpen fogalmazva —erre a párosításra nézve az eredeti feladatban— minden blokkoló párban az egyik szereplő a mellőzött személyek közül való, így a stabilitás megmaradhat, ha sikerül őket valahogy kompenzálnunk.

A stabil párosítás modell alkalmas lehet társadalmi és gazdasági együttműködések leírására. Jackson és Watts [25] a kapcsolati hálók alakulását elemezte ebben a kontextusban, míg Angelov [5] a cégek összeolvadásának vizsgálatára használta a stabil szobatárs problémát. Mindkét esetben indokolt a dinamikus szemléletű megközelítés.

A párosítás-piac dinamikája

Ebben a részben Biró, Cechlárová és Fleiner [9] munkájából ismertetem a legfontosabb eredményeket. A piac dinamikájának vizsgálatakor azt a kérdést elemezzük, hogy miként változik meg a stabil egyensúlyi helyzet új szereplők belépését követően. Kétoldali piacok esetében a folyamatot modellező algoritmust —egy más kérdés kapcsán— Roth és Vande Vate alkotta meg [36] a következőképpen:

Érkezzen egy új szereplő, v a piacra, ahol jelenleg egy M_v stabil párosítás áll fenn. Mi történik? Tegyük fel, hogy az új játékos egyenként ajánlatot tesz a piac szereplőinek a preferenciája szerint. Amennyiben senki sem fogadja el v ajánlatát, az azt jelenti, hogy a lehetséges partnerei mind egy-egy jobb partnerrel vannak kapcsolatban, vagyis az új szereplő senkivel sem alkot blokkoló párt, így az M_v párosítás stabil marad. Amennyiben az új szereplő, v egy fiú, és ajánlatát egy u lány fogadja el először, akkor két eset lehetséges: Amennyiben u-nak nem volt párja az M_v párosításban, akkor az $M = M_v \cup \{u, v\}$ egy stabil párosítás lesz az új piacon. Ha viszont u egy w fiúval volt párban, akkor u és w kapcsolata felbomlik, u és v összejön egymással, és most w-nek kell új párt keresnie magának úgy, mintha ő érkezett volna be a piacra.

Vagyis $M_w = M \setminus \{u, w\} \cup \{u, v\}$ stabil párosítás lesz, a w fiú nélküli piacon. A mechanizmus folytatódik.

Észrevehetjük, hogy ha a fiúk tesznek ajánlatot, akkor a lányok helyzete egyre csak javul a folyamat során, míg a fiúk helyzete egyre rosszabbodik. Emiatt ugyanaz az ajánlattétel kétszer nem jöhet létre, az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus biztosan véget ér.

Egyoldali piacok esetén Tan és Hsueh [43] alkotott egy hasonló inkrementáló elven működő algoritmust. Az egyetlen különbség, hogy ezen általánosabb esetben ciklusok tűnhetnek el illetve újak formálódhatnak. Amennyiben az utolsó szereplő, aki elfogad egy ajánlatot egy ciklusbeli szereplő, akkor a ciklus maradék része stabil párokra bomlik. Végül, itt előfordulhat, hogy egy szereplő, aki korábban ajánlatot tett, később ajánlatot kaphat. Ebben az esetben az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus vég nélkül folytatódna, de Tan és Hsueh megmutatta, hogy ekkor az ismétlődésben részt vevő szereplőkből egy új ciklust formálva kaphatunk egy stabil fél-párosítást az új piacon.

Blum, Roth és Rothblum [11] a szenior-pozíciók megüresedésének-betöltésének kontextusában vizsgálta a kétoldali piacok dinamikáját. Az ajánlattevő-elfogadó mechanizmus által kapott sorozat az „álláslehetőségek láncolataként" jelenik meg a munkaerő-piacon. Megmutatták, hogy ez a folyamat lényegében megegyezik a leánykérő algoritmus azon változatával, amelyben az ajánlattételt a fiúk mindig egyenként teszik. Ebből a megfigyelésből egyszerűen adódik a következő fontos tétel:

Tétel (Blum-Roth-Rothblum, 1997). *Tegyük fel, hogy egy kétoldali párosítás-piacon egy M_0 stabil párosítás áll fenn és néhány új fiú érkezik a piacra. Ekkor az ajánlattevő-visszautasító mechanizmussal kapott új, M stabil párosításban minden fiú vagy megmarad az M_0-beli párjával, vagy egy rosszabb párt kap, aki viszont a legjobb stabil pár számára az új piacon.*

Az utolsó piacra érkező játékos tehát mindig a lehető legjobb párt kapja meg. Blum és Rothblum [12] állítása szerint általában is érdemes minél később érkezni a piacra:

Tétel (Blum-Rothblum, 2002). *Egy kétoldali párosítás-piac stabil egyensúlya alakuljon ki úgy, hogy a szereplők egymás után lépnek be a piacra, majd az egyensúly az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus által jöjjön létre. Amennyiben két belépési sorrend csak annyiban különbözik, hogy két játékos helye a sorrendben felcserélődik: az elsőben u megy be előbb, a másodikban v, akkor u játékos az első sorrend alapján kialakult stabil párosításban nem kaphat jobb párt, mint a második sorrend alapján kialakult stabil párosításban.*

Végül, nem szabad elfelejteni, hogy az ajánlatot elfogadó lányok —habár végül a lehető legrosszabb párt kapják— helyzete javul, sőt néhányuknak biztosan jobb párjuk lesz az új fiú belépése után, mint előtte volt.

Tétel (Roth-Sotomayor, 1990). *Tegyük fel, hogy egy kétoldali párosítás-piacon a lány-optimális stabil párosítás áll fenn, amikor belép néhány új fiú, és a lányok egy L halmaza új párt kap. Ebben az esetben minden L-beli lány* *határozottan jobb párt kap bármelyik stabil párosításban az új piacon, mint kapott akármelyik stabil párosításban a régi piacon; továbbá az L-beli lányok eredeti párjai határozottan rosszabb párt kapnak bármely stabil párosításban az új piacon, mint kaptak akármelyik stabil párosításban a régi piacon.*

A fenti kétoldali piacokra vonatkozó tételek megfelelőit sikerült igazolnunk egyoldali piacokra, a bizonyításához a következő Lemmát használtuk:

3.1 Lemma (Kulcs-lemma). *Tegyük fel, hogy egy új szereplő, v lép be az egyoldali párosítás-piacra, ahol egy hM_v stabil fél-párosítás áll fenn. Amennyiben v nem alkot blokkoló párt egy u szereplővel hM_v-re nézve, akkor v nem alkothat stabil párt u-val az új piacon.*

Stabil párosítási problémák bonyolultsága

A stabil párosítási problémákat is alapvetően két csoportba tudjuk osztani a bonyolultságuk szerint: vannak olyanok, amelyek megoldhatók polinom időben, illetve olyanok, melyek NP-nehezek.[5] A következőkben négy szempont szerint osztályozva ismertetem őket.

A feladatot kitűzhetjük páros gráfokra, illetve tetszőlegesekre. A preferenciák lehetnek szigorúak, illetve megengedhetünk preferencia-egyezéseket (ez utóbbi esetben is akkor lesz egy él blokkoló, ha mindkét végpontja szigorúan preferálja azt). A kérdésfeltevés szerint a feladat lehet egy stabil párosítás megtalálása, avagy egy olyan párosítás megkeresése, amelyre nézve a blokkoló élek száma minimális. Végül a párosítások halmazát megszoríthatjuk a maximális méretűekre.

Adjunk egy M párosítást, ahol	ahol M	páros gráf		tetszőleges gráf	
		szigorú pref	nem szigorú	szigorú pref	nem szigorú
M stabil	tetsz	Polinomiális	Polinomiális	Polinomiális	NP-nehéz(1)
	max	Polinomiális	NP-nehéz(2)	Polinomiális	(NP-nehéz)
a blokkoló élek száma M-re min	tetsz	Polinomiális	Polinomiális	NP-nehéz(3)	(NP-nehéz)
	max	NP-nehéz(4)	(NP-nehéz)	(NP-nehéz)	(NP-nehéz)

Azt, hogy NP-teljes azon kérdés eldöntése, hogy létezik-e stabil párosítás nem-szigorú preferenciák esetén (1) először Ronn [30] mutatta meg, majd később Irving és Manlove [24] adott rá alternatív bizonyítást. Annak a problémának az NP-teljes voltát, hogy a maximális méretű párosítások között létezik-e stabil, páros gráfok esetén, nem-szigorú preferenciákra (2) Manlove és társai [29] látták be.

A blokkoló élek minimális számának meghatározásának (3) nehézségét tetszőleges gráfok esetén Abraham, Biró és Manlove [3] látták be. Azt pedig,

[5]Ha ez utóbbiak közül bármelyikről kiderülne, hogy megoldható polinom időben, akkor az összes NP-teljes probléma is megoldható volna. Ezt az esetet a számítástudomány szakértői nem tartják valószínűnek. A pontos definíció megtalálható Rónyai, Ivanyos és Szabó [31] könyvében.

hogy ez a feladat páros gráfokra is nehéz, ha megköveteljük, hogy a párosítás maximális méretű legyen (4) Manlove bizonyította a közelmúltban. Sőt, mindkét esetben az is bebizonyították, hogy az említett értékeknek még a közelítésére sincs remény.[6]

Egyoldali párosító-programok

A legtöbbször alkalmazott egyoldali párosító-program valószínűleg a sakkversenyeken használt párosító-szoftver, amely a verseny minden fordulójában eldönti, hogy ki kivel játsszon. Mivel a verseny végső célja a győztes kihirdetése, ezért talán érthető, hogy a sorsolást irányító procedúra először mindig a versenyben vezető játékosnak keres megfelelő ellenfelet, majd így folytatja tovább, külön figyelmet fordítva arra, hogy a végén lehetőleg mindenki kapjon párt. Bár történt egy kísérlet [27] annak elemzésére, hogy a hivatalos algoritmus helyett inkább stabil párosítást keressen a program, de véleményem szerint ennek csak akkor lenne értelme, ha a versenyzők célja nem a győzelem, hanem a számukra kedvező partnerekkel történő játék volna.

Egy másik alkalmazási terület lehet az *oszthatatlan javak páronkénti cseréje*. Ebben az esetben minden szereplőnek pontosan egy dolog van a birtokában, amit kicserélhetnek egymás között egy lépésben. Egy releváns alkalmazási lehetőségként vizsgálta Yuan [44] az állami bérlakások cseréjét, amely a régi szovjet-típusú rendszerekben, és a mai Kínában sem képezheti piaci adás-vétel tárgyát. Hasonló jellegű, de a világon mindenütt előforduló probléma kezelésére szolgálnak a páronkénti vesecserék koordinálására létrehozott egyoldali párosító-programok. Erről a problémakörről írok most bővebben a fejezet zárásaként.

Ha egy beteg és a potenciális donorja (tipikusan egy házaspár) között immunológiai okokból nem lehetséges az átültetés, de van egy hasonló problémákkal küzdő másik pár, és keresztben nincs immunológiai probléma, akkor elképzelhetővé válhat a párok közti vesecsere. Néhány elszigetelt eset után az elmúlt években több fejlett országban hivatalos programokat indítottak a vesecserék koordinálására.

A programok deklarált céljai és az alkalmazott modellek között azonban jelentős különbségek lehetnek. A legtöbb ma működő programban, a veséhez jutó betegek számát maximalizálják. Ez egy maximális méretű párosítás feladathoz vezet azon a gráfon, melynek csúcsai a beteg-donor párok, és él akkor fut közöttük, ha lehetséges a kereszt-donáció (lásd a [37] és a [38] cikkeket). Ennél kifinomultabb módszer, ha nem csak elfogadható és nem elfogadható veséket különböztetünk meg, hanem azt is vizsgáljuk, hogy egy vese „mennyire jó” az adott betegnek. Ennek mérőszáma lehet a beültetett szerv várható élettartama. A probléma matematikailag egy súlyozott párosítás feladatra

[6] Az NP-nehéz problémák egy része közelíthető additív vagy multiplikatív hibával. Az élkromatikus szám például minden gráf esetén vagy egyenlő a maximális fokszámmal, vagy ennél eggyel nagyobb. A lefogó pontok számának minimuma pedig felülről becsülhető a maximális párosítás méretének kétszeresével, amely már polinom időben kiszámítható. A kérdéskörről bővebb leírást találhat az Olvasó Jordán, Recski és Szeszlér [26] könyvében.

vezet (ezt a módszert alkalmazzák Ohio államban, az elméleti háttért lásd a [40] cikkben.) Végül nem elhanyagolható etikai érvek szólnak a stabil megoldás alkalmazása mellett is, ahol nincs két olyan pár, akik kölcsönösen jobb esélyeket kapnának, ha egymással cserélnének a programon kívül.[7]

4 Kifizetéses modellek, NTU/TU-játékok

Kifizetéses modellekről akkor beszélünk, ha megengedjük, hogy a létrejött párok illetve társulások tagjai valamilyen formában kompenzálják egymást. Két dolgot követelünk meg: egyrészt mindenki pontosan meg tudja határozni mekkora hasznosságot jelent neki egy lehetséges partnerkapcsolatban való részvétel, másrészt feltesszük, hogy létezik egy olyan átváltható hasznosságú áru, amely átadható a kapcsolatban lévő szereplők között, és a transzfer révén ugyanannyival csökken az azt átadó fél hasznossága, mint amennyivel a fogadó fél hasznossága nő.

A stabil párosítási modellek kifizetéses változatának megoldása ezért mindig két elemű: megadjuk, hogy mely párok alakulnak meg és mennyi hasznosságot adtak át egymásnak a szereplők. A stabilitás feltétele, hogy ne legyen olyan megvalósulatlan (blokkoló) pár, melynek tagjai mind jobban járnának, ha a partnerkapcsolatuk létrejönne és megfelelő kifizetésekkel kompenzálnák egymást.

Az i szereplő hasznosságát egy $\{i,j\}$ kapcsolatban jelöljük $u_i(\{i,j\})$-vel. Egy M párosítás esetén az átadott kifizetéseket gyűjtsük egy $p(M)$ vektorba, melynek i-edik koordinátája, $p_i(M)$ jelentse azt a (pozitív vagy negatív) transzfert, amelyet az i-edik játékos kapott. Transzfert csak M-beli párok adhatnak egymásnak, és egy $\{i,j\}$ páron belül a transzferek összértéke természetesen nulla, vagyis $p_i(M)+p_j(M)=0$. Ha egy szereplő nem eleme egy párnak, akkor értelemszerűen nem lehet kifizetése, vagyis $p_i(M)=0$ minden M-ben nem szereplő i-re. Egy i játékos *összhasznát* h_i-vel jelölve tehát $h_i=0$, ha i nincs párosítva, és $h_i=u_i(\{i,j\})+p_i(M)$, ha i szereplő a j-vel alkot párt és $p_i(M)$ transzfert kap tőle.

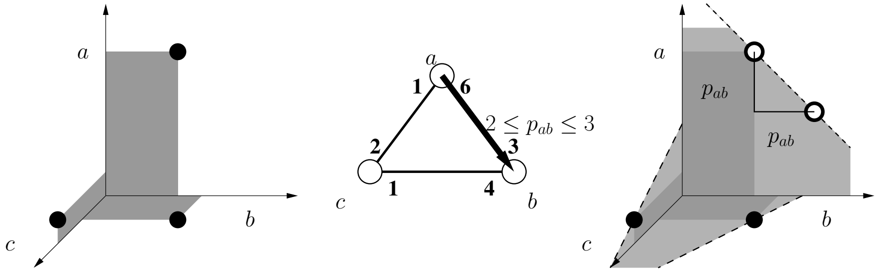
Egy $[M,p(M)]$ párt *stabil megoldásnak* nevezünk, ha nem létezik olyan megvalósulatlan $\{a,b\}$ blokkoló pár, hogy $u_a(\{a,b\})+u_b(\{a,b\})>h_a+h_b$. Ekkor ugyanis a-nak és b-nek érdekében állna kilépni az M-beli kapcsolataiból és új párt alkotni, majd az a-tól b-nek juttatott $u_a(\{a,b\})-h_a$ és $h_b-u_b(\{a,b\})$ közötti hasznosság átadásával mindketten jobban járnának.

Bevezetésképpen lássunk két példát egy-egy háromszemélyes stabil párosítási problémára kifizetéssel és kifizetés nélkül. (Az elérhető hasznosságok ábrázolásának megértéséhez segítséget nyújthat a 3. ábra és annak magyarázata.)

[7] Fontos még megemlíteni, hogy a cserék nem csak páronként kivitelezhetők, hanem elvileg hosszabb körökben is. Azonban érthető okokból az összes műtétet egy időben kell végrehajtani, így ha három pár cserél egy körben, akkor már 6 műtőre és orvoscsoportra van szükség egyszerre. Ennek ellenére például az amerikai NEPKE programban a hármas-cserék is megengedettek. Ekkor a megfelelő matematikai problémák sok esetben bizonyítottan nehézzé válhatnak (lásd [10] és [8]).

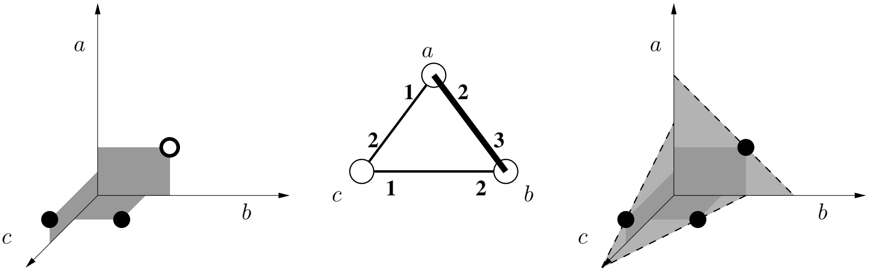
3. Példa. A három szereplő hasznossága a párkapcsolatokban legyen a következő: $u_a(\{a,b\}) = 6$, $u_b(\{a,b\}) = 3$, $u_b(\{b,c\}) = 4$, $u_c(\{b,c\}) = 1$, $u_c(\{c,a\}) = 2$, $u_a(\{c,a\}) = 1$.

Az *1. ábrán* látható, hogy a kifizetés nélküli esetben nem létezik stabil párosítás, illetve, hogy a kifizetéses esetben az $\{a,b\}$ egy stabil párt alkot ha a 2 és 3 közötti hasznosságot átad b-nek.



1. ábra. A párok hasznosságai és a stabil megoldás a kifizetéses esetben

4. Példa. A három szereplő hasznossága a párkapcsolatokban legyen a következő: $u_a(\{a,b\}) = 2$, $u_b(\{a,b\}) = 3$, $u_b(\{b,c\}) = 2$, $u_c(\{b,c\}) = 1$, $u_c(\{c,a\}) = 2$, $u_a(\{c,a\}) = 1$.



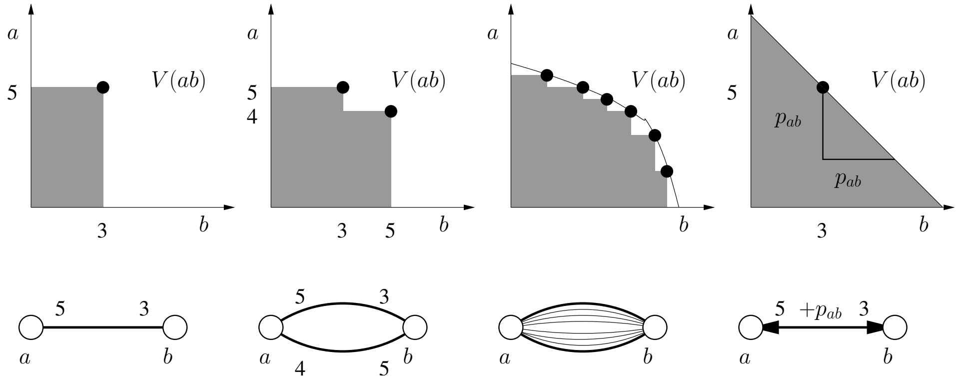
2. ábra. A párok hasznosságai és a stabil megoldás a kifizetés nélküli esetben

A fenti ábrán látható, hogy a kifizetés nélküli esetben az $\{a,b\}$ egy stabil pár, illetve, hogy a kifizetéses esetben nem létezik stabil megoldás. Ennek okát a későbbiekben részletezem.

Természetes feltevés, hogy a szereplők egy csoportja ne csak egyféleképpen tudjon együttműködni. Életszerű Cechlárová és Ferková példája [13] a repülőgép-pilóták párosításáról. Itt ugyanis egy pár beosztásakor igen eltérő lehet a kapcsolat megítélése a pilóták részéről, attól függően, hogy melyiküket tették meg első- illetve másodpilótának. Hasonlóképpen két lehetséges kapcsolat lehet két sakkjátékos között egy sakkverseny egy fordulójában, attól függően, hogy ki játszik világossal. Szintén két lehetséges kapcsolat jöhet létre hazánkban egy diák és az egyetem egy szakja között, hiszen költségtérítéses és államilag finanszírozott formában is igénybe lehet venni az oktatást. A játékelmélet egy klasszikus példája a házaspár esete, ahol a férj inkább a focimeccsre, a feleség pedig balettre menne, de persze leginkább egymás társaságában.

Meggondolható, hogy többféle együttműködés jöhet létre pusztán aszerint is, hogy az egyes szereplők mekkora erőfeszítést fordítanak a kapcsolatra. Illetve ennek egyszerűsített változataként a szereplők átváltható hasznosságú jószág átadásával, transzferrel szintén tetszőleges mértékben módosíthatják egymás hasznosságát egy kapcsolatban. Megjegyezzük, hogy a folytonosan változó elérhető hasznosságok halmaza jól közelíthető diszkrét kimenetekkel.

A következő, *3. ábrán* egy pár lehetséges együttműködéseinek négy esetét mutatjuk be, a kapcsolódó személyes hasznosságok megjelenítésével. Az első esetben csak egyfajta együttműködés lehet a két fél között. A másodikban kétféle. A harmadikban sokféle lehet, az elérhető hasznosságok akár folytonosan is változhatnak, ezt közelíthetjük véges sok lehetséges kimenettel. Végül a negyedik példa az átváltható hasznosságú esetet mutatja, ahol a két fél együttműködésének van egy maximális összhaszna, amelyet egymás között tetszőlegesen eloszthatnak. Párkapcsolatok esetén a többféle együttműködést párhuzamos élek behúzásával tudjuk modellezni, ha gráffal reprezentáljuk a kapcsolati rendszereket.



3. ábra. Hasznosságfüggvények egy párkapcsolatban

Átváltható hasznosság nélküli játékok

Egy *átváltható hasznosság nélküli játék*, röviden *NTU-játék*, megadható egy (N, V) párral, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza és V a kifizetésfüggvény, amely minden $S \subseteq N$ társuláshoz hozzárendel egy $\mathbb{R}^S$-beli $V(S)$ halmazt, úgy hogy $V(\emptyset) = \emptyset$ és minden $S \subseteq N, S \neq \emptyset$-re:

a) $V(S)$ egy nemüres és zárt halmaza $\mathbb{R}^S$-nek

b) ha $x \in V(S)$ és $y \leq x$, akkor $y \in V(S)$

c) $V(S) \cap \mathbb{R}^S_+$ korlátos.

Minden játékos részt vesz a játékban, ezért a játék kimenete egy $V(N)$-beli vektor, melynek koordinátái az egyes játékosok elért hasznosságát jelentik. Természetesen két kimenet közül minden játékos azt preferálja, amelyikben a hasznossága nagyobb. A játék egy $x \in V(N)$ kimenete benne van a játék *magjában*, ha nem létezik olyan (blokkoló) S társulás és a tagjai által elérhető $y \in V(S)$ kimenet, melyre $y_i > x_i$ minden $i \in S$-re. Tehát a játékosok egyik csoportjának sem éri meg kilépni a nagykoalícióból, mert önmagukban nem tudnának olyan kimenetet elérni, amelyben minden szereplőjük nagyobb haszonra tehet szert.

Természetes feltételként jelentkezhet a *szuperadditivitás*, amely egy NTU-játékra megköveteli, hogy tetszőleges két $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$ társulásra $V(S) \cup V(T) \subseteq V(S \cup T)$ teljesüljön.

További specializálás után definiálhatjuk a *partícionálási játékot*. Itt feltesszük, hogy adva van a lehetséges *alaptársulásoknak* egy $\mathcal{B} \subseteq 2^N$ halmaza, melynek része minden $\{i\}$, $i \in N$ egyszereplős társulás (mindenkinek meghagyjuk a jogot, hogy egyedül maradjon). Egy tetszőleges S társulás által legyen elérhető egy $x \in I\!R^S$ kifizetés, akkor és csak akkor ha létezik az S halmaznak egy olyan $B_i \in \mathcal{B}$ alaptársulásokból álló $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$ partíciója, hogy minden ebben résztvevő B_i társulásra az x kimenetből B_i szereplőinek jutó kifizetés $V(B_i)$-ben legyen. Ha $S \subseteq N$-re $\Pi_{\mathcal{B}}(S)$-el jelöljük a $\mathcal{B}$ alaptársulásokból előállítható partíciók halmazát az S szereplőin, akkor tömörebb kifejezéssel:

$$V(S) = \{x \in I\!R^S : \exists \pi \in \Pi_{\mathcal{B}}, B_i \in \pi, x \in V(B_1) \times V(B_2) \times \ldots \times V(B_k)\}$$

A partícionálási játék nagy előnye, hogy egy kimenet magbeli voltának vizsgálatakor elég csak az alaptársulásokra ellenőrizni a stabilitási feltételt. Igaz ugyanis a következő tétel:

Tétel. *Egy partícionálási játékban az x kimenet akkor és csakis akkor magbeli, ha nem létezik blokkoló B alaptársulás (vagyis egy $B \in \mathcal{B}$ és egy $y \in V(B)$, hogy $y_i > x_i$ minden $i \in B$-re).*

A bizonyításhoz azt kell csak megmutatni, hogy ha az adott x kimenetre van egy tetszőleges S blokkoló társulás, akkor van egy B blokkoló alaptársulás is. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen az S társulás által elért $y \in V(S)$ egy alapkoalíciókból álló partícióval valósítható meg, tehát az ebben szereplő bármelyik B alaptársulás is blokkoló lesz.

Az alaptársulások által elérhető kifizetésekre tett erős megkötéssel kaphatjuk meg a partícionálási játékok speciális eseteként a *társulási játékot*. Feltesszük, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ társulásra létezik egy $\underline{v}(B) \in I\!R^B$ kifizetés, hogy a B által elérhető más kifizetésekben egyik B-beli játékos sem kaphat többet. Vagyis

$$V(B) = \{x \in I\!R^B : x \leq \underline{v}(B)\}$$

A társulási játékokban tehát nem kérdés, hogy egy társulás, ha megalakul, akkor mekkora kifizetést kapnak belőle a tagok. (Ezt értelmezhetjük úgy is, hogy csak egy lehetséges formája van minden koalíciós együttműködésnek.)

Így a játék kimenetén elég már csak azt értenünk, hogy mely alaptársulások jöttek létre, a tényleges kifizetések ebből egyértelműen meghatározódnak. A társulási játék kimenetelét ezért hívhatjuk egyszerűen partíciónak.

Ebből kifolyólag viszont az egyes szereplők természetes módon tudnak egy rangsort felállítani az alaptársulások között, amelyben tagok lehetnek: mindenki azt a társulást preferálja, ahol a társulás megvalósulása esetén nagyobb lesz a kifizetése. Formálisan: ha $i \in B_k$ és $i \in B_l$, akkor $B_k \leq_i B_l \iff \underline{v}_i(B_k) \leq \underline{v}_i(B_l)$.

A társulási játék kimenete, egy π partíció pontosan akkor lesz benne a játék magjában, ha nincs blokkoló alaptársulás, vagyis egy olyan létre nem jött társulás, melynek tagjai egyértelműen jobban járnának a társulás megvalósulásával, mint a jelenlegi partícióban. Precízebben fogalmazva, jelöljük $B_\pi[i]$-vel azt a társulást, amelynek az i játékos tagja a π partícióban. Definíció szerint akkor és csakis akkor blokkolja egy $B \in \mathcal{B}$ társulás a kimenetet, ha minden $i \in B$-re $\underline{v}_i(B_\pi[i]) < \underline{v}_i(B)$, ami a fentiek szerint ekvivalens azzal, hogy $B_\pi[i] <_i B$.

A társulási játékokat a fentiek miatt definiálhatjuk úgy is, hogy minden szereplőnek csupán a preferenciáit adjuk meg azon alaptársulások felett, amelyeknek tagja lehet. A játék mag-beli kimenetét pedig egyszerűen nevezhetjük *stabil partíciónak.* Amennyiben minden alapkoalíció csak kételemű lehet, akkor speciális esetként megkapjuk a stabil párosítás problémát.

Átváltható hasznosságú játékok

Egy játék *átváltható hasznosságú*, röviden *TU-játék*, ha megadható egy (N, v) párral, ahol v most egy *hasznosság-függvény*, amely minden $S \subseteq N$ társuláshoz egy $v(S) \in \mathbb{R}$ értéket rendel hozzá, amely a társulás által elérhető összkifizetést jelenti. Ezen osztozhatnak a társulás tagjai. Meggondolható, hogy minden TU-játék felírható NTU-játékként is a következő hozzárendeléssel: $V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\}$ minden $S \subseteq N, S \neq \emptyset$-re.

Átváltható hasznosságú játékoknál, ha az $x(S) = \sum_{i \in S} x(i)$ jelölést használjuk, akkor a játék kimenete egy $x(N) \leq v(N)$ *megvalósítható kifizetés.* Ha $x(N) \geq v(N)$ és minden i szereplőre teljesül a $x_i \geq v(\{i\})$ feltétel (vagyis senki sem kap kevesebb kifizetést, mint amit egyedül is el tud érni), akkor a kimenetet *elosztásnak* nevezzük. Egy elosztás benne van a játék magjában, ha $x(S) \geq v(S)$ minden S társulásra. A szuperadditivitási feltétel TU-játékokra a $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ egyenlőtlenségnek felel meg.

A mag-megoldás létezésének szükséges és elégséges feltételét pontosan meg lehet határozni. A társulások egy $\mathcal{S} \subseteq 2^N$ rendszerét *kiegyensúlyozottnak* nevezzük, ha léteznek olyan $0 \leq \lambda_S \leq 1$ $(S \in \mathcal{S})$ súlyok, melyekkel

$$\sum_{i \in S \in \mathcal{S}} \lambda_S = 1$$

teljesül minden i játékosra. Egy *játék kiegyensúlyozott*, ha minden kiegyensúlyozott társulásra és súlyrendszerre fennáll a

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) \leq v(N)$$

egyenlőtlenség. A témakör talán leghíresebb állítása a következő tétel:

Tétel (Bondareva-Shapley). *Egy TU-játék magja akkor és csakis akkor nem üres, ha a játék kiegyensúlyozott.*

A *partícionálási TU-játékokra* egy S társulás értéke megegyezik a benne szereplő játékosokból kialakított legnagyobb összértékű alaptársulásokból álló partíció értékével:

$$v(S) = \max\{v(B_1) + v(B_2) + \ldots + v(B_k) : \pi \in \Pi_{\mathcal{B}}, B_i \in \pi\}$$

Itt is igaz, hogy egy x elosztás pontosan akkor mag-megoldás, ha nincs blokkoló alaptársulás (vagyis, ha $x(B) \geq v(B)$ minden $B \in \mathcal{B}$-re). Ez viszont azt jelenti, hogy ha π egy olyan partíciója N-nek, amelyre a maximum felvétetik, akkor minden $B_i \in \pi$-re $x(B_i) = v(B_i)$. Tehát, ha a játék magja nem üres, akkor egy magbeli x elosztás megvalósítható, úgy is hogy az $x(N)$ összértékű π partíció minden egyes B_i alaptársulásának tagjai egymást között —a társulásokon belül— osztják fel az általuk létrehozott hasznosságot.

Hasonlóképpen, meg lehet mutatni, hogy egy partícionálási játék kiegyensúlyozottságához elég csak az alaptársulásokból álló $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$ kiegyensúlyozott társulás-rendszereket vizsgálni, hiszen minden $\mathcal{S} \subseteq 2^N$-re létezik egy $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$, hogy

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \Bigg[\sum_{B_i \in \pi_S} v(B_i) \Bigg] = \sum_{B_i \in \mathcal{S}'} \Bigg[\sum_{\substack{B_i \in \pi_S \\ S \in \mathcal{S}}} \lambda_S \Bigg] v(B_i) =$$
$$= \sum_{B_i \in \mathcal{S}'} \lambda'_{B_i} v(B_i)$$

ahol $\mathcal{S}'$ szintén kiegyensúlyozott a λ'_S súlyokkal. A játék magjának létezésének szükséges és elégséges feltétele tehát értelemszerűen egyszerűsödik.

Ha az alaptársulások legfeljebb csak kételeműek, akkor a partícionálási TU-játék természetes módon megfeleltethető egy stabil párosítás probléma kifizetéses változatának. Ugyanis, ha egy $\{i, j\}$ lehetséges pár értéke $v(\{i, j\}) = u_i(\{i, j\}) + u_j(\{i, j\})$, és az x elosztásból az i-edik játékos részesedése természetes módon megfelel a játékos összhasznosságának, $x_i = h_i = u_i + p_i(M)$, akkor, ha $x(N)$ egy mag-elosztás az előbbiben, akkor az $x(N) = v(N)$ értéket megvalósító M párosítás stabil lesz $p_i(M) = x_i - v(B_M[i])$ kifizetés mellett az utóbbiban.

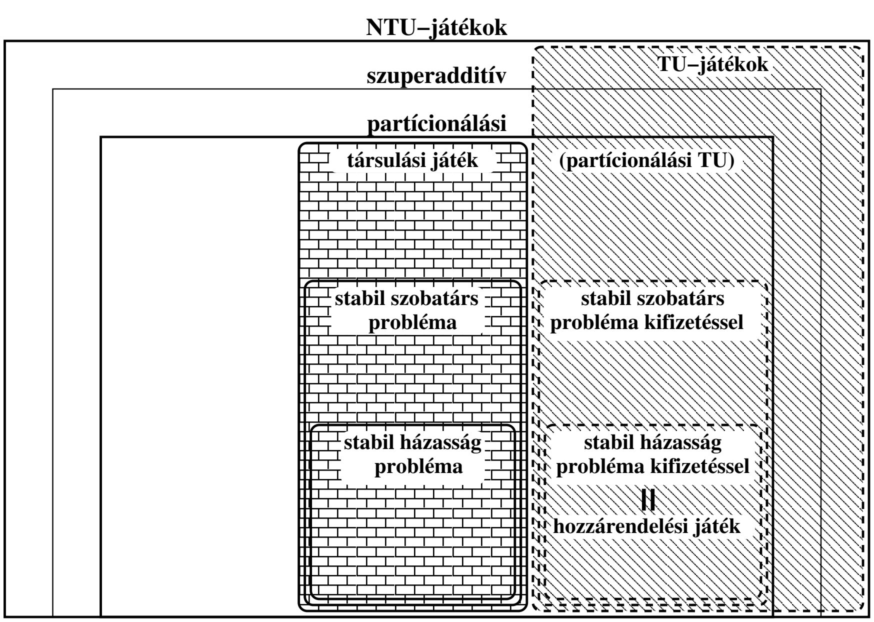
Amennyiben a kételemű alaphalmazokból képzett gráf páros, akkor a —stabil házasság probléma kifizetéses változatának megfelelő— feladatot *hozzárendelési játéknak* nevezzük. Erről Shapley és Shubik [41] látta be 1972-ben, hogy kiegyensúlyozott, ezért a magja nem üres. Lássuk végül ennek egy ekvivalens bizonyítását Egerváry 1931-es tétele szerint.

Legyen adva a G gráf minden e éléhez egy $w(e)$ súly. Egy párosítás *összsúlyán* a párosításban szereplő élek súlyainak összegét értjük. A maximális összsúlyú párosítás összsúlyát jelöljük $\nu_w(G)$-vel. Egy $c : V \Longrightarrow R^V$ értékadást a csúcsokon nevezzünk *fedésnek*, ha minden $e = \{u, v\}$ élre $c(u)+c(v) \geq w(e)$ teljesül. Egy fedés értéke a csúcsok értékeinek összege. A minimális értékű fedés értékét jelöljük $\tau^*_w(G)$-vel.

Nyilvánvaló, hogy ha M egy maximális összsúlyú párosítás, akkor akár csak az M éleinek fedésére is kell egy ekkora értékű fedés, ezért $\nu_w(G) \leq \tau^*_w(G)$ teljesül minden G gráfra. Egerváry Jenő [15] —Kőnig tételének általánosításaként— belátta, hogy a két paraméter között egyenlőség áll fenn, ha a gráf páros.

Tétel (Egerváry, 1931). *Ha G páros gráf, akkor $\nu_w(G) = \tau^*_w(G)$.*

A gráfelméleti és játékelméleti megfontolások között a következő megfeleltetés adható: Minden $e = \{i, j\}$ élen legyen akkora $w(e)$ súly, amekkora az adott $\{i, j\}$ pár $v(\{i, j\})$ értéke. A játék $v(N)$ értéke ebben az esetben egyenlő $\nu_w(G)$-vel, vagyis a maximális összsúlyú párosítás értékével. Egerváry tétele szerint páros gráfban mindig van ugyanekkora értékű fedés is. Ennek következménye, hogy egy c minimális értékű fedésnek kölcsönösen egyértelműen megfelel egy x mag-elosztás (hiszen a $c(i) + c(j) \geq w(\{i, j\})$ fedés-feltétel az $x(i) + x(j) \geq v(\{i, j\})$ mag-feltétellel ekvivalens). Egerváry tétele tehát pontosan a hozzárendelési játék kiegyensúlyozottságát igazolja.



4. ábra. A kooperatív játékok rendszerezése

Ha a stabil szobatárs probléma kifizetéses változatát tekintjük, akkor annak megoldhatósága a fentiekhez hasonlóképpen azon múlik, hogy a megfelelő súlyozott gráfban a maximális összsúlyú párosítás értéke eléri-e a minimális fedés értékét. Ez utóbbiról belátható (lásd bővebben [28]), hogy értéke megegyezik a maximális összsúlyú *fél-párosítás* értékével.[8] Végül a *4. ábrán* egy összegző táblázatot láthatunk az ismertetett kooperatív játékokról.

Irodalom

1. Abdulkadiroglu A., Pathak P. A., Roth A. E. (2005) The New York city high school match. *American Economic Review* 95(2):364–367
2. Abdulkadiroglu A., Pathak P. A., Roth A. E. (2005) The Boston public school match. *American Economic Review* 95(2):368–371
3. Abraham D. J., Biró P., Manlove D. F. (2006) 'Almost stable' matchings in the roommates problem. *Proceedings of WAOA 2005*, volume 3879 of Lecture Notes in Computer Science :1–14
4. Aharoni R., Fleiner T. (2003) On a lemma of Scarf. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 87:72–80
5. Angelov N. (2006) *Modelling firm mergers as a roommate problem.* Working Paper
6. Biró P. (2003) *Stabil b-párosítás gráfokon.* Diplomamunka, BME, matematikus szak
7. Biró P. (2006) *Stabil párosítások gazdasági alkalmazásai az Európai Unióban.* Diplomamunka, Corvinus Egyetem, közgazdász szak
8. Biró P., Cechlárová K. (2006) Inapproximability of the kidney exchange problem. *Information Processing Letters* 101(5):199–202
9. Biró P., Cechlárová K., Fleiner T. (2006) On the dynamics of the stable matching markets. *The 17th International Conference on Game Theory*
10. Biró P., Rizzi R. (2006) *On optimal kidney exchange programs.* Working paper
11. Blum Y., Roth A. E., Rothblum U. G. (1997) Vacancy chains and equilibration in senior-level labor markets. *Journal of Economic Theory* 76:362–411
12. Blum Y., Rothblum U. G. (2002) 'Timing is everything' and marital bliss. *Journal of Economic Theory* 103:429–443
13. Cechlárová K., Ferková S. (2004) The stable crews problem. *Discrete Applied Mathematics* 140:1–17
14. Cechlárová K., Fleiner T. (2005) On a generalization of the stable roommates problem. *ACM Transactions on Algorithms* 1(1):143–156
15. Egerváry J. (1931) Matrixok kombinatorius tulajdonságairól. *Matematikai és Fizikai Lapok* 38:16–28
16. Ericsson K., Karlander J. (2001) Stable outcomes of the roommate game with transferable utility. *International Journal of Game Theory* 29:555–569

[8] Hasonló következtetésre jutott a stabil szobatárs probléma kifizetéses változatának vizsgálatában Ericsson és Karlander [16] gráfelméleti tételek használata nélkül. Visszagondolva a 4. Példára, ott azért nem találhattunk stabil megoldást, mert a maximális összsúlyú párosítás értéke 5, míg a fél-párosítás értéke 5,5 volt.

17. Fleiner T., *Stable and crossing structures.* Ph.D. Thesis (2000) www.renyi.hu/fleiner

18. Forgó F., Szép J., Szidarovszky F. (1999) *Introduction to the Theory of Games.* Kluwer Academic Publishers: Nonconvex Optimalization and Its Applications 32

19. Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T. (2006) *Játékelmélet.* Elektronikus jegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem

20. Gale D., Shapley L. S. (1962) College admissions and stability of marriage. *American Mathematical Monthly* 69:9–15

21. Gale D., Sotomayor M. (1985) Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics* 11:223–232

22. Gusfield D., Irving R. W. (1990) *The stable marriage problem: structure and algorithms.* The MIT Press, Cambridge

23. Irving R. W. (1985) An efficient algorithm for the 'stable roommates' problem. *Journal of Algorithms* 6:577–595

24. Irving R. W., Manlove D. F. (2002) The stable roommates problem with ties. *Journal of Algorithms* 43:85–105

25. Jackson M. O., Watts A. (2002) The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory* 106:265–295

26. Jordán T., Recski A., Szeszlér D. (2004) *Rendszeroptimalizálás.* Typotex Kiadó, Budapest

27. Kujansuu E., Lindberg T., Mäkinen E. (1999) The stable roommates problem and chess tournament pairings. *Divulgaciones Matematicás* 7:19–28

28. Lovász L., Plummer M. D. (1986) *Matching Theory.* Akadémiai Kiadó – North Holland, Budapest

29. Manlove D. F., Irving R. W., Iwama K., Miyazaki S., Morita Y. (2002) Hard variant of stable marriage. *Theoretical Computer Science* 276(1-2):261–279

30. Ronn E. (1990) NP-complete stable matching problems. *Journal of Algorithms* 11:285–304

31. Rónyai L., Ivanyos G., Szabó R. (1998) *Algoritmusok.* Typotex Kiadó, Budapest

32. Roth A. E. (1984) The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *Journal of Political Economy* 6:991–1016

33. Roth A. E. (1990) New physicians: a natural experiment in market organization. *Science* 250:1524–28

34. Roth A. E., Peranson E. (1999) The redesign of the matching market for American physicians: some engineering aspects of economic design. *The American Economic Review* 89:748–752

35. Roth A. E., Sotomayor M. (1990) *Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis.* Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press

36. Roth A. E., Vande Vate J. H. (1990) Random paths to stability in two-sided matching. *Econometrica* 58:1475–80

37. Roth A. E., Sönmez T., Ünver U. (2004) Kidney exchange. *Quarterly Journal of Economics* 119(2):457–488

38. Roth A. E., Sönmez T., Ünver U. (2005) Pairwise kidney exchange. *Journal of Economic Theory* 125(2):151–188
39. Scarf H. E. (1967) The core of an N person game. *Econometrica* 35:50–69
40. Segev D. L., Gentry S. E., Warren D. S., Reeb B., Montgomery R. A. (2005) Kidney paired donation and optimizing the use of live donor organs. *Journal of American Medical Association*, 293:1883–90
41. Shapley L. S., Shubik M. (1972) The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory* 1:111–130
42. Tan J. J. M. (1991) A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *Journal of Algorithms* 12:154–178
43. Tan J. J. M., Hsueh J. C. (1995) A generalisation of the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics* 59:87–102
44. Yuan Y. (1996) Residence exchange wanted: A stable residence exchange problem. *European Journal of Operational Research* 90:536–546

STABLE MATCHING MODELS AND CENTRALIZED MATCHING PROGRAMS

The goal of this survey is to introduce the most relevant stable matching models and its applications. Centralized matching programs can preserve suitable solutions for a wide range of social and economic problems. Beside this summary, we show some recent results on the dynamics of matching markets, and we present the computational complexity of a family of related problems. Finally, we explain how these stable matching models can be described with game theoretical notions.

TECHNOLÓGIAI KIZÁRÁS A TÁVKÖZLÉS PIACÁN[1]

BAKÓ BARNA – BERDE ÉVA
Budapesti Corvinus Egyetem

Cikkünkben egy vertikálisan integrálódott iparág forrásvidéki inkumbens vállalatának kizárást eredményező stratégiai magatartására hívjuk fel a figyelmet. Bemutatjuk az inkumbens vállalat motivációit, és viselkedésének hatását a piaci struktúrára. Bebizonyítjuk, hogy a kizárás nem csak a torkolatvidéki vállalat számára nélkülözhetetlen input árának felemelésével, hanem a termelési technológia alkalmas kiválasztásával is megvalósítható. Egy egyszerű modell kapcsán megvizsgáljuk, hogy a szabályozó hatóság milyen mozgástérrel rendelkezik, ha el akarja kerülni a kizárást. Mindez különös aktualitást nyer napjainkban, amikor az internet alapú telefonálás (Voice over Internet Protocol) egyre nagyobb részesedést harcol ki magának a telekommunikáció piacán.

1 Bevezetés

Az internetes telefonálás alkalmazásának lehetősége nem kis mértékben rendezheti át a közeljövő telekommunikációs piacát. A hagyományosan monopolista, illetve napjainkban már oligopolista piacstruktúrával jellemezhető hangtovábbítás területén az alternatív szolgáltatók az új technológiai lehetőségeket kihasználva, egyre nagyobb fenyegetettséget jelentenek az inkumbens vállalatok számára. Majdnem teljes biztonsággal megjósolható, hogy a hang adatcsomagonként való továbbítása már rövid távon kizárólagos jelleggel fel fogja váltani az analóg technológiát, ezért a hagyományos szolgáltatók is az új módszerek alkalmazói, esetleg továbbfejlesztői lesznek. Mindez az internet világában ma már egyértelműen realitás. Nem lényegtelen azonban, hogy a jelenlegi telekommunikációs infrastruktúrát birtokló többi vállalat milyen technológiai megvalósításokhoz folyamodik a meglévő hálózatok összekapcsolódását és használhatóságát illetően. Szélsőséges esetben az is felmerülhet —bár ennek nem túl nagy az esélye—, hogy a technológiai újítások a régi infrastruktúrát kikerülve, teljesen a saját maguk által kiépített hálózatokra támaszkodnak. Mindenesetre e kérdéskörben nem kisebb szerep jut a szabályozó hatóságnak, mint a nemrégiben felszabdalt telekommunikációs piac visszarendeződésének megakadályozása, a régi vagy egy új monopolista piacszerkezet kialakulásának elkerülése, és egy versenyzői(bb) iparág kialakítása.

A jelenlegi infrastruktúrát birtokló inkumbens vállalatok az összekapcsolódást lehetővé tevő technológia megválasztásával befolyással lehetnek a piacra belépni szándékozó vállalatok költségszerkezetére. Olyan technológiai

[1] Beérkezett: 2006. szeptember 18. E-mail: `barna.bako@uni-corvinus.hu`, `eva.berde@uni-corvinus.hu`.

megoldások alkalmazásával, amelyek növelik az összekapcsolódás költségeit, továbbá nehezítik a számhordozhatóság megvalósítását, a telekommunikációs hálózatot birtokló forrásvidéki tradicionális vállalat gátolhatja a VoIP (Voice over Internet Protocol, azaz hangtovábbítás interneten keresztül) technológiát alkalmazó alternatív szolgáltatók torkolatvidéki piacra való belépését.

Az alábbiakban egy egyszerű modell keretében arra a kérdésre keressük a választ, hogy a szabályozó hatóság a helyi hálózat (local loop) hozzáférhetőségének árszabályozási stratégiájával hogyan hat az inkumbens vállalat technológiai választására. A piaci belépés elrettentése ugyanis megvalósulhat erre alkalmas technológia választásával is, ezt nevezzük technológiai kizárásnak. (Az e témával kapcsolatos különböző megközelítéseket lásd pl. Bowman [1957], Bork [1978], Hart and Tirole [1990], Sibley and Weisman [1998], Economides [2000], Lessig [2000]-ben.) A technológiai kizárás alkalmazására akkor kerülhet pl. sor az inkumbens vállalat részéről, amikor a piaci kizárás nem célszerű, vagy nem lehetséges, éppen a szabályozói hatóság ármeghatározása miatt.

Amennyiben a forrásvidéki monopolista a torkolatvidéki piacot teljes mértékben ellenőrzése alatt tartja, és nem kényszerül valamilyen szabályozott áron a torkolatvidéki piac termékének előállításához nélkülözhetetlen erőforrás értékesítésére, akkor a monopolista a technológiailag leghatékonyabb, pontosabban a saját profitját maximalizáló infrastruktúra kialakítása mellett kötelezi el magát. Egyben korlátozza a szóban forgó termelési tényező (esetünkben a hálózat) versenytársak általi igénybevételét (árral történő, azaz piaci kizárás).

Amennyiben a forrásvidéki monopolista nem rendelkezik teljes mértékű ellenőrzéssel a torkolatvidéki piacon, például a szabályozó hatóság tevékenységének eredményeképp, akkor a monopolista ösztönözve lehet kizáró technológia alkalmazására a torkolatvidéki piacon. Természetesen léteznek olyan esetek, amikor a forrásvidéki monopolista ilyen körülmények közt sem érdekelt a torkolatvidéki versenytárs kizárásában, mert a torkolatvidéki eladás segítségével saját profitját is növelheti. Ez utóbbi véleményt elsősorban a chicagói iskola hívei (Bork [1978], Posner [1976]) osztják. Ma már azonban a szakirodalom is egyre inkább azt a nézetet vallja, miszerint hatósági árszabályozás esetén, a forrásvidéki vállalat termékére utalt torkolatvidéki vállalat számíthat a forrásvidéki vállalat technológiai újításokon keresztül megvalósuló kizárási stratégiájára (Rey and Tirole [2006]). Ennek hatására a torkolatvidéki piacra való belépés, sőt a már ott levő vállalat egyszerű működése is költségesebbé válik. Amennyiben a szabályozó hatóság kizárólag a monopólium által birtokolt, a torkolatvidéki piac termékéhez nélkülözhetetlen termelési tényező árára vonatkozóan hozhat döntéseket, akkor a következő dilemmával kénytelen szembesülni: alacsony (esetleg határköltség-alapú) árat előírva közvetve a technológiai kizárást, magas árat (árplafont) megengedve pedig közvetlenül a piaci kizárást idézheti elő.

Természetesen ezt a dilemmát árnyalhatja az egyes modellekben, hogy az egymással együttműködő, illetve versenyző vállalatok stratégiai változója a mennyiség, vagy az ár, illetve a játék több fázisát tekintve, esetleg mindkét változó lehet döntési kategória (más összefüggésben erre vonatkozóan lásd Tasnádi [2006]).

Cikkünkben a technológiai kizárás lehetőségével foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy amennyiben egy vertikálisan kapcsolódó forrásvidéki vállalat saját technológiai fejlesztésével csökkentheti torkolatvidéki vetélytársa profitját, továbbá ha az általa kínált üvegnyak[2] erőforrás, illetve szolgáltatás nagykereskedelmi ára nem kellően magas, akkor a forrásvidéki vállalat érdeke, hogy technológiai úton zárja ki vetélytársát a piacról. Továbbfejlesztjük Sadowski és Straathof (2005) Cournot-piaci modelljét, és Stackelberg-piacon is megvizsgáljuk, hogy a VoIP technológiák esetében milyen árszabályozás mellett kerülhető el mind a piaci, mind a technológiai kizárás. Végül összefoglaljuk a szabályozó hatóság számára hasznos következtetéseinket.

2 A technológia kizárást ösztönző körülmények

Egy vertikálisan integrálódott iparág piaci kizárása alatt egy nélkülözhetetlen erőforrás (üvegnyak erőforrás) piacán meglévő piaci erőfölény kiterjesztését értjük, egy további, kiegészítő piacra. A nélkülözhetetlen erőforrást termelő vállalat úgy képes piaci hatalmát kiterjeszteni a termékét, mint inputot felhasználó piacra, hogy közben más vállalatokat korlátoz az adott erőforráshoz való hozzáférésben. Egy erőforrást akkor tekintünk nélkülözhetetlennek, ha annak a kizárt vállalatok általi előállítása, illetve helyettesítése nem, vagy csak nagyon drágán lehetséges, ugyanakkor az erőforrás felhasználása a vizsgált termeléshez elengedhetetlen. Ilyen nélkülözhetetlen erőforrás a telekommunikációs szektorban a helyi hurok (local loop), amelynek igénybevétele nélkül az egyes végső felhasználókat nem lehetne összekapcsolni.

A kizárás különböző formái képzelhetők el.[3] Egy piacról való kizárás a monopolista piacstruktúra megőrzését, illetve megszerzését eredményezheti, ha a nélkülözhetetlen erőforrást birtokló vállalat megtagadja az adott inputhoz való hozzáférést más vállalatok számára. Ez történik, pl. akkor, ha a monopolista egy kellően magas ár meghatározásával kizárólag egyetlen, vagy néhány vele integrálódott vállalat számára teszi elérhetővé az adott input felhasználását. Hasonló eredményre vezetnek a kizárólagos kereskedői szerződések, vagy a franchise megállapodások is. Az integrálódott vállalat tehát megtagadhatja a potenciális versenyzők számára az adott erőforrás értékesítését, de a kizárás árnyaltabb formáit is alkalmazhatja. Például technológiailag összeférhetetlenné (inkompatibilissé) teheti az adott erőforrást a potenciális versenytársak számára, vagy akár árukapcsolást alkalmazva érheti el az adott erőforráshoz való eredménytelen hozzáférést (Katz [1989] és Perry [1989]).

Legyen U a forrásvidéki piac egyetlen szereplője, mely a torkolatvidéki piac számára nélkülözhetetlen erőforrást termel. Tegyük továbbá fel, hogy a torkolatvidéki piac versenyzői tulajdonságokkal jellemezhető, amennyiben

[2] Az üvegnyak (bottleneck) erőforrás olyan nélkülözhetetlen és nem helyettesíthető, szűkösen rendelkezésre álló erőforrás, amelyet általában a forrásvidéki vállalat nyújt a torkolatvidéki vállalatok részére. Bővebben lásd pl. Rey–Tirole [2006]-ban.

[3] A különböző kizárási formák csoportosítását lásd Rey–Tirole [2006]-ban.

a torkolatvidéki piac szereplői termelésük során akadálytalanul (ki-ki a saját profit-maximalizálási feladatából származtatható mértékben) használhatják a forrásvidéki piac termékét. A forrásvidéki monopolista az adott feltételek mellett befolyással lehet a végtermék (a torkolatvidéki piac) piacának szerkezetére, azáltal, hogy valamely torkolatvidéki szereplő —például leányvállalata— számára biztosítja az általa a forrásvidéken készített terméket, a többi szereplőtől pedig megtagadja a hozzáférést. Az U vállalat erre ösztönzést érezhet, hiszen így ki tudja terjeszteni a forrásvidéki piaci monopóliumát a szóban forgó végtermék piacára is.

Rey és Tirole [2006] szerint ahhoz, hogy a forrásvidéki vállalat a torkolatvidéki piacon monopolista profitra tehessen szert, a torkolatvidéki piacon is valamilyen, kizárást eredményező stratégiát kell alkalmaznia. Példaként a szabadalom átadását, illetve a franchise szerződéseket említik. Egy licenctulajdonos csak abban az esetben tudja megfelelően magas áron értékesíteni az adott licencet, ha egyben képes hihetően elkötelezni magát amellett, hogy nem fogja licencét további vállalatoknak is értékesíteni. Hasonló elköteleződési problémával szembesül a franchise jogot értékesítő vállalat is, hisz az eladási jogot megvásárolni szándékozó partnere csak akkor hajlandó megfelelő díjat fizetni, ha nem kell további versenytársaktól tartania.

A vertikális integráció megoldhatja az elköteleződési problémát. Egy olyan szabályozói környezetben azonban, mely tiltja a vertikális integrációt —annak versenyt korlátozó hatásai miatt— a kizárólagos termelői, ill. forgalmazói szerződés helyettesítheti az integrációt. Egy ilyen szerződéssel szintén elérhető a monopol erő torkolatvidéki piacra való kiterjesztése, és az elköteleződési probléma megkerülése. Létezhet azonban olyan szabályozói környezet, ill. piaci szituáció, amikor a kizárólagos termelői vagy forgalmazói szerződés se valósítható meg. Ilyen pl. a helyi telefonhálózatok esete Európában. Az ezekhez való hozzáférést, a nagy telefonmonopóliumok lebontása után, a tulajdonos köteles minden más telefonszolgáltató részére biztosítani —méghozzá szabályozott áron—, hogy a hívások összekapcsolódhassanak. A technikai kizárást azonban ebben az esetben csak nagyon mérsékelten tudja kiküszöbölni a szabályozó hatóság.

Gilbert és Riordan [2003] cikkükben azt vizsgálják, hogy egy nélkülözhetetlen erőforrást birtokló monopóliumnak milyen ösztönzői vannak saját termékének fejlesztésére, pusztán abból a célból, hogy a torkolatvidéki versenytársak költségeit növelje. Elemzik továbbá, hogy a fenti típusú fejlesztés hatására, ex post milyen piaci szerkezet alakul ki a torkolatvidéki piacon. A forrásvidéki monopolista termékfejlesztésével a versenytársra két hatást generálhat. Egyrészt a versenytárs(ak) költségének növelésével képes a végtermék piaci versenyének intenzitását csökkenteni, másrészt esetleg akadályozza az adott erőforrás más célú, hatékonyabb igénybevételét. Ez annál szembetűnőbb, minél nagyobb a torkolatvidéki konkurens(ek) költséghatékonysága. A monopólium ilyen irányú döntése erősen függ a nélkülözhetetlen erőforrás árától. Magas ár esetén a monopóliumnak érdekében áll hatékony hozzáférést biztosítani a nélkülözhetetlen erőforráshoz. Alacsony ár mellett azonban késztetést érezhet olyan termékfejlesztésre, mely növeli a versenytársak költségét, és így kizárja őket a piacról. A továbbiakban egy meghatározott piacforma keretei közt, egy ilyen jellegű összefüggést vizsgálunk.

3 Piaci és technológiai kizárás Stackelberg-duopóliumban

Az alábbi modellben Sadowski és Straathof [2005]-ös, Cournot-piaci modelljének eredményeit vizsgáljuk meg egy Stackelberg-duopóliummal jellemezhető piaci struktúrában. Tegyük fel, hogy az adott piacon két vállalat verseng egymással, mindkettő az általa termelt mennyiségre vonatkozóan hoz döntést, oly módon, hogy az inkumbens vállalat —U— mennyiségi döntése a belépni szándékozó vállalat számára annak döntéshozatala során ismert. Tegyük fel továbbá, hogy az U vállalat a forrásvidéki piacon monopóliumként tevékenykedik és a forrásvidéki piacon értékesített terméke nélkülözhetetlen a torkolatvidéki piac termékének előállításához. Legyen a torkolatvidéki piacon az U vállalat versenytársa az E vállalat, mellyel teljesen azonos, homogén terméket termel az adott végtermék piacán. A forrásvidéki piacon értékesített termék termelési költsége k, továbbá az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az adott termelési tényező költségmentesen alakítható át a torkolatvidéki piac végtermékévé.

Szabályozói beavatkozás nélkül az U vállalat megtagadja az adott termelési tényező értékesítését az E vállalat számára. A szabályozó hatóság annak érdekében, hogy elejét vegye a piaci kizárás lehetőségének, egy c árplafont határoz meg az adott termelési tényező értékesítését illetően, amely mellett az E vállalat belép a torkolatvidéki piacra. A torkolatvidéki piacon értékesített mennyiségek, x és y, ahol x jelöli az U vállalat termelését, y pedig az E vállalatét. A végtermék piacán a vállalatok által piacra vitt mennyiségek függvényében kialakuló piaci ár az alábbi függvény által adott:

$$p(x, y) = a - b(x + y) \tag{1}$$

Az U vállalat profitja, Π_U a torkolatvidéki piacról származó bevétel (az inkumbens vállalat is telefonszolgáltató saját ügyfelei számára), valamint a forrásvidéki termelési tényező értékesítéséből származó bevétel (az inkumbens vállalat szükség esetén összekapcsolja, ill. átengedi hálózatát más telefonszolgáltatóknak) összegének, és a forrásvidéki termék termelési költségének, továbbá az új technológiára való áttérés m-mel jelölt költségének a különbségéből adódik. Az E vállalat profitja, Π_E, megegyezik a torkolatvidéki termék eladásából származó bevétel, és az ennek előállításához szükséges forrásvidéki termék költségének, valamint a piacra való belépés költségének (jelölje ezt e) a különbségével:

$$\begin{aligned} \Pi_U &= p(x, y)x + cy - k(x + y) - m \\ \Pi_E &= p(x, y)y - cy - e \end{aligned} \tag{2}$$

3.1 Szabályozott Stackelberg-duopólium

Legyen a szabályozó hatóság által meghatározott forrásvidéki termék rögzített ára c, amely mellett az E vállalat belép a torkolatvidéki piacra. Tegyük még fel, hogy a c nagyságára egyetlen vállalatnak sincs hatása, tehát a c exogén.

A Stackelberg-duopólium egyensúlyához tartozó piaci ár, illetve a vállalatok által termelt mennyiségek:

$$\begin{aligned} x &= (a-k)/2b \\ y &= (a-2c+k)/4b \\ p &= (a+k+2c)/4 \end{aligned} \tag{3}$$

Az egyensúlyi ár-mennyiség felhasználásával meghatározhatók a vállalatok által egyensúlyban realizált profitnagyságok

$$\begin{aligned} \Pi_U &= [(a+2c+k)(a-k)/8b] + c[(a-2c+k)/4b] - k[(3a-2c-k)/4b] - m \\ \Pi_E &= [(a-2c+k)(a-2c+k) - 16be]/16b \end{aligned} \tag{4}$$

3.2 Piaci kizárás

Szabályozott ár hiányában a forrásvidéki monopólium a torkolatvidéki piacra belépni szándékozó potenciális versenytárs belépését korlátozhatná a végtermék termeléséhez nélkülözhetetlen termelési tényező értékesítési árának növelésével. Az adott termelési tényező mennyiségét optimálisan megválasztva, meghatározható az a c ár, amely mellett a belépni szándékozó vállalat profitmaximuma az $y = 0$ mennyiség mellett valósulna meg, azaz nem lépne be a piacra.

Amennyiben a szabályozó hatóság is ezt a c értéket adja meg, akkor az E vállalat optimális termelési nagysága zérus. Ez egyben azt jelenti, hogy az U vállalat monopóliumként az egyedüli profitmaximalizáló a piacon. A monopolista profitot M indexszel jelölve, a vállalat által termelt mennyiség és elért profit, illetve a torkolatvidéki piaci ár a következő értékeket veszi fel:

$$\begin{aligned} x &= (a-k)/2b \\ \Pi_M &= [(a-k)(a-k)/4b] - m \\ p(x) &= (a+k)/2 \end{aligned} \tag{5}$$

3.3 Technológiai kizárás

Tegyük fel, hogy a forrásvidéki monopolista két különböző —A és B— technológia megválasztása mellett dönthet, mely technológiák más és más lehetőségeket és költségeket biztosítanak a torkolatvidéki piacra belépni szándékozó vállalat számára. Az általánosság megsértése nélkül tegyük fel, hogy a belépni szándékozó vállalat az A technológia esetén alacsonyabb belépési költséggel szembesül, mint a B technológia esetén. A torkolatvidéki piacra való belépés, ha a monopolista az A technológiát alkalmazza, legyen e_A, a B technológia mellett pedig legyen e_B. A fenti kikötések alapján $e_A < e_B$. Tegyük továbbá fel, hogy a monopólium fixköltsége az A technológia esetén m_A, a B technológia esetén m_B, ahol $m_A < m_B$ —ellenkező esetben a monopólium mindig a B technológiát választaná— és legyen $(m_B - m_A)/2 < e_A$, mely feltétel a különböző technológiák esetén felmerülő fixköltségek közti indokolatlanul nagy költségbeli eltérés kiküszöbölését szolgálja.

Amennyiben a szabályozó hatóság nem szabályozza az üvegnyak szolgáltatás árát, akkor a monopólium mindig az A technológiát választja annak érdekében, hogy elkerülje a technológiai váltás magas fix költségét. Ez esetben a monopólium a technológiai kizárás helyett a piaci kizárás stratégiáját alkalmazza. Amennyiben a szabályozó hatóság beavatkozik a torkolatvidéki piacra, a forrásvidéki piac termékének árszabályozása által, akkor az U vállalat érdekelt lehet a magasabb fix költséggel járó B technológia választásában, hogy megelőzze az E vállalat torkolatvidéki piacra való belépését. Az E vállalat belépési döntése ennek értelmében az U vállalat technológiára vonatkozó döntésétől, valamint a szabályozó hatóság által meghatározott c árplafon nagyságától függ. Az E vállalat mindaddig belép a piacra, amíg az alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$\Pi_E(T, c) = [(a - 2c + k)(a - 2c + k) - 16be_T]/16b > 0, \qquad T = A, B \ . \tag{6}$$

A legmagasabb c, amely mellett az E vállalat belép a torkolatvidéki piacra a fenti egyenlőtlenség c-re való megoldásából adódik:

$$c^E(T) = [a + k - 4(be_T)^{0,5}]/2 \ , \qquad T = A, B \ , \tag{7}$$

ahol a $c^E(T)$ a nélkülözhetetlen erőforrás legmagasabb ára, amely mellett az E vállalat a T technológia esetén belép a torkolatvidéki piacra. Látható, hogy az A technológia esetén ez alacsonyabb, mint a B technológia esetén.

Amennyiben a c árplafon oly módon meghatározott, hogy az E vállalat csak az A technológia esetén lép be a piacra, akkor az U vállalat ösztönzést érezhet arra, hogy a B technológiát válassza, és viselje az ezzel járó relatíve magas fix költségeket. Ezzel az esettel szembesülünk akkor, ha

$$\Pi_M(B) - \Pi_U(A, c) > 0 \ . \tag{8}$$

A maximális c, amely mellett a monopóliumnak előnyös a B technológia választása, a fenti egyenlőtlenség c-re való megoldásából adódik.[4] A küszöbértéket c^{TF}-fel jelölve

$$c^{TF} = \left(a - [8b(m_B - m_A)]^{0,5} + k\right)/2 \ . \tag{9}$$

Ha $c > c^{TF}$, akkor az U vállalat számára előnyösebb, ha az alacsonyabb költségű A technológia mellett egy duopólium tevékenykedik a torkolatvidéki

[4] Az egyenlőtlenség megoldásából két olyan intervallumot kapunk, amelyek esetén az inkumbens vállalatnak érdekében áll a drágább technológia alkalmazása, jelesül a $(-\infty, [a + k - \sqrt{8b(m_B - m_a)}]/2)$ és az $([a + k + \sqrt{8b(m_B - m_a)}]/2, \infty)$ intervallumokat, viszont mivel a $c^E(A)$ szigorúan kisebb az $[a + k + \sqrt{8b(m_B - m_a)}]/2$ értéknél, az utóbbi intervallum nem releváns elemzésünk tekintetében.

piacon, mintha monopóliumként termelne a magasabb fix költségű B technológiával.

A technológiai kizárás lehetősége az alábbi dilemma elé állítja a szabályozó hatóságot: egy túlságosan magasra állított c árplafon elrettenti az E vállalatot a piacra való belépéstől, míg egy túlzottan alacsony c mellett az U vállalat a B technológia választása mellett dönthet. A szabályozó hatóság számára két lehetséges alternatíva áll rendelkezésre, amelyek alkalmazásával megelőzheti mind a piaci, mind a technológiai kizárást. Az első lehetősége alapján úgy kell megválasztania a c nagyságát, hogy az kellőképpen magas legyen, így az U vállalat ne a B technológia alkalmazása mellett döntsön. Ugyanakkor c-nek elegendően alacsonynak kell lennie ahhoz, hogy az E vállalat belépjen a torkolatvidéki piacra. Azaz a c-t az alábbi intervallumból kell választani:[5]

$$c^{TF} < c < c^{E}(A) \, . \tag{10}$$

Amennyiben a c árplafon meghatározása lehetséges oly módon, hogy az a fenti intervallumba essen, akkor egy ilyen ár megválasztásával a szabályozó hatóság megelőzheti úgy a piaci, mint a technológiai kizárást. A fenti módon megválasztott árplafonnal ugyan mindkét kizárási forma elkerülhető, mégis a megoldás szuboptimális, hiszen az U vállalat még mindig kellően magas árat igényelhet a forrásvidéki termékéért az E vállalattól. Ebben az esetben részleges piaci kizárásról beszélünk.

A második lehetséges alternatíva, amellyel a szabályozó hatóság mindkét típusú kizárást megelőzheti, ha szélsőségesen alacsony, esetleg valamilyen gazdaságpolitikai cél által vezérelve negatív értéken (ekkor persze elengedhetetlen a szubvenció) állapítja meg a c nagyságát. Egy kellőképpen alacsony c esetén az E vállalat ösztönözve lehet a piacra való belépésre, még akkor is, ha az U vállalat a B technológia választása mellett dönt. Ekkor $c < c^{E}(B)$. Tekintettel arra, hogy ilyen feltételek mellett a technológiai kizárás nem kifizetődő alternatíva, az U vállalat mindig az A technológiát választja.

Végül egy, a fentieknél esetenként reálisabb szabályozási lehetőség az olyan árplafon meghatározása, amely alacsonyabb c értéket rendel a B technológiához, mint az A-hoz. Ily módon bármely technológia választása esetén az E vállalat ösztönözve van a piacra való belépésre. Ebben az esetben azonban több aszimmetrikus információs probléma merülhet fel, amelyek az U vállalat információs előnyének következtében végül is a belépés megakadályozását eredményezhetik.

Az alábbi táblázatban összegezzük a szabályozó hatóság által választandó alternatívák esetén kialakuló piacformákat. A táblázat első oszlopa a szabályozó hatóság lehetséges alternatíváit mutatja, míg a második oszlop az ezen alternatívák alkalmazásához szükséges feltételeket tartalmazzák. A harmadik és a negyedik oszlopban az inkumbens vállalat által választott technológia, illetve a megvalósult kizárás formája látható.

[5] Az adott egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságának feltétele $(m_B - m_A)/2 < e_A$.

Szabályozás módja	Feltétel	Alkalmazott technológia	Kizárás formája
Nincs	$c^E(A) < c$	A	Piaci
Magas árplafon	$c^{TF} < c < c^E(A)$	A	Részleges piaci
Alacsony árplafon	$c^E(B) < c < c^{TF}$	B	Technológiai
Nagyon alacsony árplafon	$c < c^E(B)$	A	Nincs
Technológiától függő árplafon	$c < \begin{cases} c^E(A), & \text{ha } A \\ c^E(B), & \text{ha } B \end{cases}$	A	Nincs

1. táblázat

4 Következtetések

A fenti táblázat jól mutatja, hogy a szabályozó hatóság mindennemű kizárásellenes intézkedése mellett, sőt, esetleg épp annak következtében, kialakulhat a kizárás. Ha ugyanis a hatóság túlzottan alacsony árat ír elő a forrásvidéki infrastruktúra, vagy bármilyen forrásvidéki termék igénybevétele ellenértékeként, akkor könnyen előfordulhat a technológiai kizárás. Ilyenkor a forrásvidéki vállalat érdekében állhat, hogy —akár a használhatóság szempontjából értelmetlen— technikai fejlesztéssel zárja ki a torkolatvidéki vállalatot a piacról. Az ebből a célból végrehajtott beruházás megtérül a monopólium többletprofitjából.

Nagyon alacsony árplafon esetén ugyan nincs értelme a technológiai kizárásnak, de ilyenkor kérdés, hogy az ár fedezi-e a forrásvidéki vállalat szolgáltatásának (árujának) költségét. Amennyiben nem, akkor szubvenció nélkül hosszú távon a forrásvidéki vállalat egyszerűen abbahagyja a szolgáltatást. Minden alaposabb jóléti elemzés nélkül belátható, hogy ez nem érdeke a társadalomnak. Létezhet még a technológiától függő árplafon, aminek viszont az a buktatója, hogy az árat a technológia kiválasztása után kell meghatározni. Modellünk logikája ezzel ellentétes, mivel épp az ár miatt választja a forrásvidéki vállalat a magasabb költségű technológiát. Ha a drágább technológia esetén a szabályozó hatóság lecsökkenti a forrásvidéki vállalat által nyújtott szolgáltatás (termék) árát, akkor a forrásvidéki vállalat mindent elkövet, hogy elfedje a hatóság elől technikai fejlesztését. Ez az aszimmetrikus információs helyzet miatt esetenként sikerülhet is neki.

Cikkünk tanulsága szerint nincsen egyértelmű recept arra, hogy egy forrásvidéki szolgáltatót miként kényszerítsenek rá a torkolatvidéki vállalattal (vállalatokkal) történő kooperációra. A kooperáció megtagadása esetén viszont elképzelhető, hogy a torkolatvidéki vállalat kiépíti a saját önálló infrastruktúráját (önálló inputtermelését), és függetleníti magát a forrásvidéki vállalattól. Az ilyen helyzet elemzése azonban már további vizsgálatot igényel.

Irodalom

1. Bork, Robert [1978]: *The antirust paradox*, New York: Basic Books.
2. Bowman, Ward [1957]: Tying arrangements and the leverage problem. *Yale Law Journal*, 19.

3. Economides, Nicholas [2000]: Comment on 'A note on N. Economides: The incentive for non-price discrimination by an input monopolist'. *International Journal of Industrial Organization*, vol. 18. pp. 989–991.
4. Gilbert, R. – Riordan, M [2003]: *Product Improvement and Technological Tying in a Winner-Take-All Market.* Columbia University and University of California.
5. Hart, Oliver – Tirole, Jean [1990]: *Vertical integration and market foreclosure.* Brooklin Papers on Economic Activity: Microeconomics, pp. 205–285.
6. Katz, Michael [1989]: Vertical Contractual Relations, *Handbook of Industrial Organization*, vol. I
7. Lessig, Lawrence [2000]: Brief of professor Lawrence Lessig as Amicus Curiae, United States of America vs. Microsoft Corporation, Civil Action No. 98–1233 (TPJ) in The United States District Court for the District of Columbia.
8. Perry, Martin K. [1989]: Vertical Integration: Determinants and Effects, *Handbook of Industrial Organization*, vol. I
9. Posner, Richard [1976]: *Antitrust Law*, Chicago: University of Chicago Press
10. Rey, Patrick – Tirole, Jean [2006]: A Primer on Foreclosure, Forthcoming *Handbook of Industrial Organization III*
11. Sadowski, Bert – Straathof, Bas [2005]: *VoIP under the EU Regulatory Framework: Preventing Foreclosure?* REPEC Working Paper
12. Sibley, David – Weisman, Dennis [1998]: Raising Rival's costs: Entry of an upstream monopolist into downstream markets. *Information Economics and Policy*, vol. 10. no. 4, December pp. 551–571
13. Tasnádi, Attila [2006]: Price vs. Quantity in Oligopoly Games. *International Journal of Industrial Organization* 24, pp. 541–554

TECHNOLOGICAL FORECLOSURE IN THE TELECOMMUNICATIONS MARKET

In this article we bring notice to the strategic behavior of a downstream incumbent company in a vertically integrated industry resulting in foreclosure. We introduce the motivations of the incumbent company and the result of its behavior on the market structure. We prove that foreclosure can be realized not only through increasing the price of the input good necessary for the downstream company but through the appropriate selection of the production technology. Using a simple model we investigate what are the possibilities for the regulating authority if it wants to avoid foreclosure. These are particularly actual questions nowadays when Voice over Internet Protocol (VoIP) gains greater and greater share in the telecommunications market.

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

VÖRÖS JÓZSEF

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501–599, Fax: 72/501–553

e-mail: voros@ktk.pte.hu

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság

ISSN 0039-8128

`www.szigma.ktk.pte.hu`