IRÁNYÍTÁSELMÉLET ÉS AZ ASZIMMETRIKUS INFORMÁCIÓS JÁTÉKOK ELMÉLETE[1]

BADICS JUDIT – GÖMÖRI ANDRÁS
Pannon Egyetem (Veszprém) – Budapesti Corvinus Egyetem

Közgazdasági alkalmazásait tekintve az optimális irányítások elmélete, vagy röviden irányításelmélet (optimal control theory) a dinamikus optimalizálás jól ismert eszköze. Sőt, attól tartunk, hogy a közgazdászok fejében és gyakorlatában az irányításelmélet túlságosan is, csaknem elválaszthatatlanul összefonódott az időbeli döntési problémák kezelésével.[2] Ezt az összefonódást kívánjuk oldani, amikor igyekszünk ráirányítani a figyelmet egy olyan alkalmazási területre, amelynek semmi köze az időbeli döntésekhez, annál több a játékelmélethez, pontosabban az aszimmetrikus információs játékok elméletéhez. Így írásunkban —a végén bemutatott illusztratív példától eltekintve— semmi új sincs. Ismertetésünket azoknak az olvasóknak (közgazdászoknak, hallgatóknak) szánjuk, akik többé-kevésbé, vagy akár jól ismerik az irányításelmélet szokásos alkalmazásait, és érdeklődnek egy ettől eltérő alkalmazás iránt. Először a hagyományos alkalmazást idézzük fel röviden a —minden bizonnyal— legismertebb példán, majd az aszimmetrikus információs játékelméleti alkalmazást mutatjuk be, végül ez utóbbit illusztráljuk egy példával.

1 Az irányításelmélet klasszikus alkalmazása

Az optimális irányítások elméletét Pontrjagin dolgozta ki munkatársaival az ötvenes években. 1961-ben, tanítványaival közösen publikálta eredményeit, a könyv a következő évben angol fordításban is megjelent, így a hatvanas években ismertté vált.[3] Amellett, hogy számos tudományterületen (a fizika különböző területei, műszaki tudományok, stb.) alkalmazzák, már az említett évtizedben felkeltette a közgazdászok érdeklődését is. A közgazdasági alkalmazás alapgondolata minden jel szerint Arrow nevéhez fűződik, azonban az egyik első és mindmáig alighanem legtöbbet idézett alkalmazást Dorfman-

[1]Beérkezett: 2006. szeptember 6. Az első szerző munkáját a T17 48680 sz. OTKA pályázat támogatta. E-mail: badicsj@gtk.uni-pannon.hu, andras.gomori@uni-corvinus.hu.

[2]Például egy közgazdászoknak írt matematika kézikönyv irányításelméleti alfejezetének első mondata így szól: ,,Az irányításelméletből megtanulhatjuk, hogyan oldjunk meg folytonos időbeli maximalizálási feladatokat, ha a célfüggvényben integrál, a korlátban pedig differenciálegyenlet szerepel.” Klein [2002], 469. oldal. Egy másik, hasonló könyv irányításelméleti fejezetének pedig ez a címe: ,,Erőforrásallokáció az időben: irányításelmélet.” Silberberg – Suen [2001], 617. oldal.

[3]Legismertebb változata a könyv 1986-os kiadása, lásd: Potrjagin et al. [1986]. Simonovits András szíves közléséből tudjuk, hogy magyarul is olvasható: Potrjagin et al. [1968]. Az irányításelmélet történetéről lásd: McShane [1989].

nak köszönhetjük.[4] A klasszikus közgazdasági alkalmazás illusztrációjaként idézzük fel mi is Dorfman példáját röviden![5]

Egy vállalat a $[0, T]$ folytonos időintervallumban dolgozik és minden $t \in [0, T]$ időpontban megválasztja x döntési változójának $x(t)$ értékét. x lehet a vállalat termékének ára, az output mennyisége, a befektetett tőke mennyisége, vagy bármi, amitől célfüggvényének értéke (mondjuk profitja) függ. Ugyanakkor a vállalatnak minden t időpontban rendelkezésére áll a tőke $k(t)$ mennyisége, amely korábbi tevékenységétől (döntéseitől) függ. Ezt a kapcsolatot a

$$\dot{k}(t) = f(k(t), x(t), t)$$

differenciálegyenlet írja le. A vállalat célfüggvényének értéke (ha tetszik, „pillanatnyi profitja") a t időpontban

$$u(t) = u(k(t), x(t), t) \ .$$

Ugyanakkor a vállalat célfüggvényének a $[0, T]$ időintervallumon vett teljes összegét maximalizálja, így optimumfeladata

$$\max_{x(t)} \int_0^T u(k(\tau), x(\tau), \tau)\, d\tau \ ,$$

feltéve, hogy

$$\dot{k}(t) = f(k(t), x(t), t) \ .$$

Ezzel előttünk áll a legegyszerűbb irányításelméleti feladat, amelyben x-et irányítási változónak (control variable), k-t állapotváltozónak (state variable) szokás nevezni.

Ésszerű feltenni, hogy a folyamat elején a vállalat már rendelkezik a tőke egy adott mennyiségével, legyen ez k_0. Ekkor írhatjuk, hogy $k(0) = k_0$. De —a feladat jellegétől függően— megkövetelhetjük, hogy a vállalat úgy zárja a folyamatot, hogy rendelkezésére álljon a tőke egy adott —mondjuk k_T— mennyisége, azaz legyen $k(T) = k_T$, vagy előírhatjuk, hogy ez a tőkemennyiség ne legyen kisebb (vagy nagyobb) egy adott értéknél, azaz $k(T) \geq k_T$. A feladatot —természetétől függően— még ennél bonyolultabb peremfeltételek mellett is megfogalmazhatjuk.

A megoldáshoz szükség van a Hamilton-függvényre

$$H = u(k(t), x(t), t) + \lambda(t) f(k(t), x(t), t) \ ,$$

[4] Lásd: Arrow [1968], Arrow – Kurz [1970], Dorfman [1969].

[5] Természetesen itt nem kívánunk bevezetést adni az irányításelméletbe, a példát csak annyira részletezzük, amennyire ahhoz szükséges, hogy majd összehasonlítsuk azzal az alkalmazással, amit valóban be kívánunk mutatni. Az irányításelmélet iránt érdeklődő olvasó számos, közgazdászoknak írt matematika könyv közül válogathat, például: Chiang [1992], Dixit [1990], Fuente [2000], Klein [2002], Léonard – Long [1992], Kamien – Schwartz [1991], Seierstad – Sydsaeter [1987], Silberberg – Suen [2000], Sydsaeter – Hammond [2005], Takayama [1994]. Magyar nyelven: Tallos [1998], Simonovits [1998]. Megoldatlan problémákat tárgyal Blondel – Megretski [2004]. Egy érdekesség: az említett típusú könyvek közül talán Allen híres műve (Allen [1962]) az egyik utolsó, amely a variációszámítással véget ér.

ahol $\lambda(t)$ az úgynevezett Pontrjagin-multiplikátor (co-state variable).[6]

A megoldás szükséges feltételei egyrészt az elsőrendű feltételek

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial k} &= -\dot{\lambda}, \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{k}, \end{aligned}$$

másrészt a transzverzalitási feltétel

$$\lambda(T) = 0 \, .$$

A modellben $\lambda(t)$ az állapotváltozó marginális növekedésének a célfüggvény optimális értékére tett hatását adja meg (a tőke árnyékára). Ebből rögtön következik, hogy mivel ez a hatás a folyamat végén zérus, így $\lambda(T) = 0$, ami éppen a transzverzalitási feltétel.

A feladat az elsőrendű feltételekből és a transzverzalitási feltételből megoldható.[7]

Dorfman modelljét végeláthatatlan sorban követték a hasonló megfontolásokra épülő közgazdasági alkalmazások. Talán az egyik legnagyobb alkalmazási terület a növekedéselmélet.[8] De alkalmazzák az irányításelméletet a megújítható erőforrások, illetve a korlátozottan rendelkezésre álló és környezetszennyező energiaforrások felhasználásának leírásában, a politikai üzleti ciklusok, vagy a speciális technológiai fejlesztések elemzésében és még számos más területen.[9] Valamennyi alkalmazás közös vonása azonban, hogy folytonos időbeli döntési problémákat kezelnek, azaz dinamikus optimalizálási modellek. A következőkben bemutatandó modell nem ilyen.

2 Az irányításelmélet alkalmazása az aszimmetrikus információs játékok elméletében

Mielőtt a szóban forgó alkalmazást bemutatnánk, helyesnek látszik az alkalmazási területet nagyjából lokalizálni, környezetében elhelyezni.[10] Elkerü-

[6] Az angol nyelvű irodalomban más megnevezése: auxiliary variable. Találkozhatunk még a dinamikus Lagrange-multiplikátor megjelöléssel is.

[7] Minthogy fő célunk egy alkalmazás bemutatása, nem foglalkozunk itt a megoldás létezésének kérdésével, továbbá mindvégig feltesszük, hogy a szükséges feltételek elégségesek és nem foglalkozunk ennek feltételeivel sem. E kérdéseket illetően a korábban hivatkozott irodalomban tájékozódhat az érdeklődő.

[8] A szinte minden tankönyvben idézett példa a Ramsey – Cass – Koopmans modell. Eredeti változata (Ramsey [1928]) nem használt irányításelméleti eszközöket. Cass által konstruált változata (Cass [1965]) már igen, a Koopmans-féle változat (Koopmans [1965]) azonban szintén nem.

[9] Illusztrációként az említettekhez lásd például: Plourde [1970], Forster [1980], Nordhaus [1975], Arrow [1962], Shell [1966].

[10] Az irányításelmélet legkézenfekvőbb és legelső játékelméleti alkalmazása a differenciáljátékok elmélete, e területen maga Pontrjagin is jelentős eredményeket ért el.

lendő, hogy a játékelmélet történetének —itt fölöslegesnek látszó— részleteiben elvesszünk,[11] mintegy a közepébe vágva kezdjük ott, hogy az információ közgazdaságtanában alkalmazott játék-modell legegyszerűbb alakja egy kétszereplős, kétlépéses, szekvenciális játék, amelyben az egyik szereplő teljesen informált[12], a másik nem. Ha a rosszul informált szereplő nem tudja megfigyelni a másik döntési változóját, akkor *morális kockázat*i problémával állunk szemben. Ha azonban nem ismeri a másik fél (vagy a helyzet) valamely tulajdonságát, akkor a jelenség a *kontraszelekció*.[13] Az információhiány mindkét helyzetben hatékonyságveszteséghez vezet (az azonos, teljes információs esethez képest). Azonban ismerünk eszközöket, amelyek kontraszelekció esetén alkalmasak e veszteség csökkentésére. Ha az említett játékban a jól informált fél lép először, akkor ez az eszköz a *szignálozás* (szignál-használat, vagy jelzés).[14] Ha azonban az első döntést a rosszul informált játékos hozza, akkor ez az eszköz a *szűrés*[15]. A szűrésmodell felírásában és megoldásában az irányításelmélet van segítségünkre. Az alkalmazást egy elemi példán mutatjuk be.[16]

Egy szereplő megbíz egy vállalatot egy termék q mennyiségének előállításával és ezért t összeget (transzfert) fizet a termelőnek. Feltesszük, hogy t és q mennyisége megfigyelhető és bizonyítható. A megbízó a q termékmennyiségen $S(q)$ többletet élvez ($S' > 0$, $S'' < 0$, $S(0) = 0$). A termelő állandó mérethozadék mellett dolgozik, költségfüggvénye $C(q) = \theta q$, ahol θ a termelés határköltsége. A megbízó célfüggvénye

$$V = S(q) - t \ ,$$

a termelőé pedig

$$U = t - \theta q \ .$$

Az információs aszimmetria abban áll, hogy a termelő ismeri θ értékét (ő tehát a jól informált fél, ügyvivő, agent), a megbízó (aki a rosszul informált fél, principal) azonban erről csak annyit tud, hogy θ valószínűségi változó

[11] Ismert módon Harsányi nem teljes információs játékra adott első megoldása (Harsanyi [1967-68]) nyitott utat a szóban forgó terület fejlődésének, amelyben elválaszthatatlanul összefonódott az aszimmetrikus információs játékok elmélete és az erre épülő közgazdasági elmélet, amelyet szokás az információ (vagy az információs aszimmetria) közgazdaságtanának, szerződéselméletnek, ösztönzéselméletnek, vagy megbízó-ügyvivő (principal-agent) modellnek nevezni. A területről —az ismert játékelmélet és mikroökonómia könyveken kívül— áttekintést ad például Hillier [1997], Molho [1997], Macho-Stadler – Pérez-Castrillo [2001], Bolton – Dewatripont [2005], Salanié [1997], Laffont – Martimort [2002], Laffont [1993], magyar nyelven Gömöri [2001].

[12] Azaz birtokában van a játék megadásában foglalt összes információnak.

[13] A morális kockázat közgazdasági elemzésének gondolata először Arrow [1963] cikkében jelenik meg, még nem minden etikai konnotáció nélkül. Már ilyen összefüggésektől mentesen tárgyalja Pauly [1968]. A kontraszelekció első leírása Akerlof [1970], a szerző eredményeiért 2001-ben Nobel-díjat kapott. A kettő közötti, itt használt megkülönböztetés kissé felszínes, valójában két különböző struktúráról van szó.

[14] A szignálozás (signaling) ötlete Spence nevéhez fűződik (Spence [1973, 1974]), aki ezért 2001-ben kapott Nobel-díjat.

[15] A szűrés (screening) Stiglitz nevéhez kötődik (Rothschild – Stiglitz [1976], Stiglitz [1977], Wilson [1977]), aki 2001-ben kapott eredményeiért Nobel-díjat.

[16] A korábban hivatkozott irodalom számos változatban tárgyalja.

$F(\theta)$ eloszlás- és $f(\theta) = F'(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel a $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ intervallumon ($f(\theta) > 0$, $\forall\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$). Szokás θ értékét a jól informált fél *típus*ának nevezni. A szereplők szerződést kötnek, amely rögzíti, hogy a megbízó a termelőnek milyen q termékmennyiségért, milyen t összeget fizet. Ha például a szerződés $t = (1 + \tau)\theta q$ alakú ($0 < \tau < 1$), ez azt jelenti, hogy a megbízó által kifizetett összeg fedezi a termelő költségeit és tartalmaz egy ,,költségarányos" nyereséget. Ez azonban a termelőt abban teszi érdekeltté, hogy minél nagyobb költséget ismertessen el a megrendelővel, a megrendelő ezzel szemben nem tud hatékonyan védekezni, mivel nem ismeri θ valódi értékét, ugyanakkor hasonló okból a termelő sem tud bármely θ érték mellett hatékonyan érvelni. Így minden alapot nélkülöző —a gyakorlatból jól ismert— alkudozás kezdődhet. Ezért olyan szerződést keresünk, amely megkerüli ezt a zsákutcát. Rendeljünk minden θ típushoz egy $q(\theta)$ mennyiséget, és egy $t(\theta)$ összeget. Így a szerződés egy $(t(\theta), q(\theta))$ függvénypár, szokás ezt *szerződésmenü*nek is nevezni.

A játék forgatókönyve a következő. A rosszul informált fél lép elsőként, meghatároz egy szerződésmenüt. A jól informált szereplő ezt megfigyeli és vagy elfogadja, vagy elutasítja. Ha elutasítja, a játéknak vége, a szereplők célfüggvényértéke zérus. Ha elfogadja, kiválaszt —a revelációs elv szellemében[17] — egy tetszőleges $\widehat{\theta}$ típust (azaz a szerződésmenü egy ,,menüpontját"), megtermeli a $q(\widehat{\theta})$ mennyiséget és megkapja érte a $t(\widehat{\theta})$ összeget. A feladat a $(t(\theta), q(\theta))$ szerződésmenü megkonstruálása.

Vizsgáljuk meg milyen feltételeknek kell eleget tennie a keresett szerződésmenünek! Ha a termelő θ típusú és $\widehat{\theta}$ típust választ ki, vagy jelent be, akkor célfüggvény-értéke

$$U(\widehat{\theta}, \theta) = t(\widehat{\theta}) - \theta q(\widehat{\theta}) \ .$$

A szerződésmenünek azonban olyannak kell lennie, hogy egy θ típusú termelő akkor járjon a legjobban, ha a szerződésmenüből választott $\widehat{\theta}$ típus megegyezik valódi típusával, azaz $\widehat{\theta} = \theta$. Ez teljesül, ha

$$\frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \widehat{\theta}} = t'(\theta) - \theta q'(\theta) = 0 \ . \qquad (1)$$

Ez az összefüggés a termelő *ösztönzési korlát*ja. Ha a szerződés eleget tesz a mondott feltételnek, akkor ösztönzéskompatibilis, vagy igazmondásra ösztönző. (Szokás *szeparáló szerződésmenü*nek is mondani.) Ekkor a termelő optimális célfüggvény-értéke

$$U^*(\theta) = U(\theta, \theta) = t(\theta) - \theta q(\theta) \ ,$$

innen

$$t(\theta) = \theta q(\theta) + U^*(\theta) \ . \qquad (2)$$

[17] A revelációs elvről lásd például: Myerson [1979], Dasgupta – Hammond – Maskin [1979], Myerson [1991], 258-263., 294-299.

Állítsuk most elő a termelő optimális célfüggvényértékének θ szerinti totális deriváltját

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial U(\theta,\theta)}{\partial\widehat{\theta}} + \frac{\partial U(\theta,\theta)}{\partial\theta} = [t'(\theta) - \theta q'(\theta)] - q(\theta)\ .$$

A jobb oldalon a szögletes zárójelben lévő kifejezés azonban az ösztönzési korlát teljesülése esetén zérus, így

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = -q(\theta)\ . \tag{3}$$

Mielőtt megvizsgálnánk, hogy a szerződésnek milyen további feltételnek kell eleget tennie, írjuk fel a megbízó célfüggvényét! A megbízó a $V(\theta) = S(q(\theta)) - t(\theta)$ függvény θ szerinti várható értékét maximalizálja, így célfüggvénye

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [S(q(\theta)) - t(\theta)]\, f(\theta)\, d\theta\ ,$$

ebben (2)-t felhasználva

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U^*(\theta)]\, f(\theta)\, d\theta\ .$$

A szerződésnek olyannak kell lennie, hogy minden típusú vállalat elfogadja, azaz teljesüljön a termelő

$$U^*(\theta) \geq 0$$

*részvételi korlát*ja. De (3)-ból

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} \leq 0\ ,$$

így, ha a részvételi korlát a legmagasabb (legkevésbé hatékony) $\overline{\theta}$ típusra teljesül, akkor minden típusra teljesül, ezért elég megkövetelni, hogy

$$U^*(\overline{\theta}) \geq 0$$

legyen. Ugyanakkor a megbízó célfüggvénye $U^*(\theta)$-ban csökkenő, ezért csak ott lehet maximális, ahol az utóbbi minimális, ezért a fenti korlátnak effektívnek kell lennie:

$$U^*(\overline{\theta}) = 0\ .$$

Most már felírhatjuk az irányítási feladatot!

$$\max_{q(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U^*(\theta)]\, f(\theta)\, d\theta\ ,$$

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = -q(\theta)\ ,$$

$$U^*(\overline{\theta}) = 0 \; .$$

A feladat irányítási változója q, állapotváltozója U^*. Az első feltétel írja le az állapotváltozó változását az irányítási változó függvényében, az utolsó összefüggés a részvételi korlátot megfogalmazó peremfeltétel.

A feladat Hamilton-függvénye

$$H = \left[S(q(\theta)) - \theta q(\theta) - U^*(\theta)\right] f(\theta) - \lambda(\theta) q(\theta) \; .$$

Az elsőrendű szükséges feltételek

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q} &= [S'(q(\theta)) - \theta] f(\theta) - \lambda(\theta) = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial U} &= -f(\theta) = -\lambda'(\theta), \\ \frac{dU^*(\theta)}{d\theta} &= -q(\theta). \end{aligned}$$

Továbbá szükséges a transzverzalitási feltétel

$$\lambda(\underline{\theta}) = 0 \; ,$$

amelynek magyarázata az, hogy a Pontrjagin-multiplikátor ellentettje, tehát $-\lambda(\theta)$, az állapotváltozó marginális csökkenésének a célfüggvény optimális értékére tett hatását adja meg, és ez a hatás a $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ intervallum alsó határán nulla.

Az $S(q)$ függvény általános alakja mellett is tehetünk néhány megállapítást. Az első szükséges feltételből

$$S'(q(\theta)) = \theta + \frac{\lambda(\theta)}{f(\theta)} \; .$$

A második feltételből integrálással

$$\lambda(\theta) = F(\theta) + C \; .$$

Az utolsó, transzverzalitási feltétellel egybevetve

$$\lambda(\underline{\theta}) = F(\underline{\theta}) + C = 0 \; .$$

Mivel $F(\underline{\theta}) = 0$, így $C = 0$ és $\lambda(\theta) = F(\theta)$. Ezt felhasználva

$$S'(q(\theta)) = \theta + \frac{F(\theta)}{f(\theta)} \; ,$$

ahonnan $q(\theta)$ meghatározható. A jobb oldal második tagja a kockázati hányad. Ha a kockázati hányad monoton[18], azaz $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{F(\theta)}{f(\theta)}\right) \geq 0$, akkor $q(\theta)$

[18] Ez a feltétel a leggyakrabban használt eloszlás-típusokra teljesül.

nyilván csökkenő. Ekkor azonban, ha létezik a feladat megoldásaként adódó $(t(\theta), q(\theta))$ pár, akkor létezik olyan $T(q)$ függvény is, amely ugyanezt a feladatot ellátja. A $(t(\theta), q(\theta))$ mechanizmus esetén a jól informált fél egy θ típust választ, döntése kijelöl számára egy $q(\theta)$ termelt mennyiséget és egy ezért kapott $t(\theta)$ összeget. Míg a $T(q)$ függvény esetén egy q mennyiséget választ és ehhez kap egy T összeget.

Ha $q(\theta)$ csökkenő, akkor létezik inverze $\theta(q)$, ekkor legyen

$$T(q) = t(\theta(q)) \ .$$

Belátható, hogy a jól informált döntéshozó a $(t(\theta), q(\theta))$ mechanizmussal szemben ugyanúgy viselkedik, mint az említett függvény esetén. Az előbbi esetben, mint láttuk az igazmondó döntés elsőrendű feltétele

$$t'(\theta) - \theta q'(\theta) = 0 \ ,$$

míg a második esetben az elsőrendű feltétel

$$\frac{d}{dq}(T(q) - \theta q) = T'(q) - \theta = t'(\theta)\theta'(q) - \theta = 0 \ .$$

Ezt $q'(\theta)$-val szorozva

$$t'(\theta)\theta'(q)q'(\theta) - \theta q'(\theta) = 0 \ .$$

Mivel $\theta(q)$ a $q(\theta)$ inverze, ezért a két feltétel ugyanaz.

Érdemes egybevetni a bemutatott klasszikus irányításelméleti alkalmazást az iménti szűrésmodellel. Formálisan nyilván ugyanarról a feladatról van szó, egy integrált maximalizáló függvényt keresünk egy differenciálegyenlet, mint korlátozó feltétel mellett. A dinamikus optimalizálás esetén a döntéshozó ,,pillanatnyi" döntésével meghatározza célfüggvényének ,,pillanatnyi" értékét, azonban ezen értékek egy időintervallum feletti összegét maximalizálja, innen a célfüggvényben az integrál. Ugyanakkor pillanatnyi döntései nem függetlenek egymástól, ezt a kapcsolatot az állapotváltozó teremti meg. A korlátozó feltétel éppen azt írja le, hogy hogyan függ az állapotváltozó változása az irányítási változótól. Továbbá az irányítási változó értékét keressük minden időpontban, azaz olyan függvényt keresünk, amely időbeli ,,pályáját" írja le.

A szűrési feladatban a rosszul informált fél célfüggvény-értéke függ a jól informált fél típusától, amelynek értékét az előbbi szereplő nem ismeri. Így a célfüggvényben szereplő integrál a típus szerinti várható érték. A feladatban azt keressük, hogy a szerződés —legalábbis egyik— értéke hogyan függjön a típustól, vagyis az irányítási változó egy típus-függvény. Ugyanakkor a korlátozó feltétel differenciálegyenlete azt írja le, hogy hogyan változzon a jól informált fél optimális célfüggvény-értéke a típus szerint (ha tetszik, ,,típusróltípusra") ahhoz, hogy egyik típusnak se érje meg a másik típusnak szóló menüpontot választani, vagyis valódi típusától eltérő típust színlelni. Így a korlátozó feltétel a jól informált fél ösztönzési korlátja (vagy tartalmazza azt). Nem hiányozhat a feladatból egy peremfeltétel, ami abból adódik, hogy a jól informált fél visszautasíthatja a szerződést. Ha tehát azt akarjuk, hogy elfogadja, akkor teljesülnie kell, hogy a szerződéssel legalább olyan jól járjon, mint annak elutasításával. Ez a korlát a jól informált fél részvételi korlátja (amelyet célfüggvényének monotonitása miatt elég az egyik szélső típusra felírni).[19]

A szűrési eljárás közgazdasági alkalmazása igen széles körű. Legismertebb talán a nemlineáris árképzés.[20] De használják a közbeszerzésben, a vállalati szabályozás elméletében,[21] sőt, szűrési eljárás a jól ismert aukció is.[22] Az alkalmazási lehetőségek sokszínűségét[23] illusztrálandó a következőkben igyekszünk egy eléggé speciális alkalmazást bemutatni.

3 Egy példa: a válságmenedzser díjazása

Ha egy vállalat rossz állapotban van, több más megoldás mellett az egyik lehetőség, hogy tulajdonosa szakértőt (vagy szakértő céget) kér fel a probléma megoldására. A szakértő átvilágítja a vállalatot, javaslatokat tesz működésének megváltoztatására. A tulajdonos kifizeti a szakértő járandóságát, megteszi a szükségesnek vélt lépéseket, a vállalat pedig vagy sikeres lesz, vagy nem. Feltételezve, hogy a szakértő —főként munkája elvégzése után— jobban ismeri a vállalatot, mint a tulajdonos, továbbá a munkában tanúsított igyekezetéről elsősorban magának vannak információi, az említett díjazási feladat pontos megfogalmazása valószínűleg morális kockázati problémához vezetne. Mi azonban megoldásként egy szűrési eljárást mutatunk be.[24]

Egy vállalat a $t = 0$ időpontban profitot nem termel, tőkepiaci értéke zérus. Ezért tulajdonosa megbíz egy szakértőt, akivel szerződést köt a következők szerint. A $t = 0$ időpontban a szakértő V összeget fizet a tulajdonosnak és átveszi a vállalat működtetését (de az nem válik tulajdonává). Egy a szerződésben meghatározott, későbbi $T > 0$ időpontban megfigyelik a vállalat értékét. Ha a vállalat értéke nagyobb, mint egy —szintén a szerződésben előre rögzített— X összeg, akkor a szakértő kap X összeget (és munkája véget ért). Ha kisebb, megkapja a vállalatot.

[19] A bemutatott szűrési eljárás másfelől egy speciális mechanizmus. A mechanizmustervezés nyelvén szólva, egy adott döntési szabályt, szeparáló, tökéletes Bayes-i egyensúlyban implementáló mechanizmust tárgyaltunk. A mechanizmus-tervezésről lásd például: Fudenberg – Tirole [1991], 7. fejezet.

[20] Lásd Wilson [1993].

[21] Az alapmű Baron – Myerson [1982], egy igen érdekes modell Laffont – Tirole [1986], amely alapjául szolgál egy sok alkalmazást bemutató könyvnek: Laffont – Tirole [1993].

[22] Lásd például Wilson [1992]. Egy speciális alkalmazás a hazai irodalomban Eső – Simonovits [2003].

[23] E sokszínűség természetes, ha meggondoljuk, hogy az általunk bemutatott modell speciális esete egy általánosabb modellnek. Általánosan ugyanis két szereplő cseréli ki két jószág t, ill. q mennyiségeit, miközben egyikük rosszul informált. Az ármérce-jószág megválasztásával jelölhetjük ki a vevőt és eladót, így különböző vételi és eladási eljárásokhoz jutunk (lásd az említett példákat). A szereplők döntési sorrendjének megválasztása pedig a szignál-játékhoz, illetve a szűréshez vezet. A modell általános leírását lásd például Gömöri [2001], 126-135. oldal.

[24] Az eljárás alapötlete Hongbin Li [2003] cikkéből származik, a modell felírása és megoldása azonban —véleményünk szerint— súlyosan hibás, ezért jelentősen átalakítottuk.

Tegyük fel, hogy a szakértő tevékenysége vagy sikeres, ekkor a vállalat értéke a T időpontban $S > 0$, vagy sikertelen, ekkor ez az érték zérus. A sikeresség a szakértő erőfeszítésétől függ, legyen ez utóbbi a szakértő döntési változója a, értékét a tulajdonos nem tudja megfigyelni. Az erőfeszítésnek a szakértő számára költségei vannak, legyen az erőfeszítés haszonáldozat-függvénye $C(a, \theta)$ ($C_a > 0, C_\theta < 0$), ahol θ a vállalat azon jellemzőit foglalja össze, amelyeket a szakértő pontosan ismer, de a tulajdonos nem. A tulajdonos csak annyit tud, hogy θ egy valószínűségi változó a $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ intervallumon, ismert $F(\theta)$ eloszlás-, ill. $f(\theta)$ sűrűségfüggvénnyel. θ a vállalat, vagy a szakértő típusa.

A játék forgatókönyve a következő. A tulajdonos meghatároz egy

$$(V(\theta), X(\theta))$$

szerződésmenüt, ezt a szakértő vagy elfogadja, vagy elutasítja. Utóbbi esetben mindkét szereplő kifizetése zérus. Ha elfogadja, kiválaszt egy $\widehat{\theta}$ típust és kifizet egy ehhez tartozó $V(\widehat{\theta})$ összeget, de ezzel kiválaszt egy ehhez tartozó $X(\widehat{\theta})$ összeget is. Ezután megválasztja az erőfeszítés a értékét, majd megfigyelik a vállalat értékét és megkapják a szerződésnek megfelelő kifizetéseket. Feladatunk a $(V(\theta), X(\theta))$ szerződésmenü meghatározása.

Azért, hogy konkrét eredményeket kaphassunk, adjunk néhány összefüggésnek konkrét alakot. Tudjuk, hogy a sikeresség valószínűsége az erőfeszítés növekvő függvénye. Legyen az egyszerűség kedvéért a sikeresség valószínűsége maga az erőfeszítés, így $a \in [0, 1]$ és a vállalat értéke a valószínűséggel S, $(1 - a)$ valószínűséggel zérus lesz. Legyen a szakértő erőfeszítésének haszonáldozat-függvénye $C(a, \theta) = \frac{a^2}{2\theta}$ alakú. Legyen továbbá θ egyenletes eloszlású a $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ intervallumon, úgy, hogy $\underline{\theta} > 0$ és —később tisztázandó okból— $\overline{\theta} \leq \frac{1}{S}$.

A megoldás során a visszagöngyölítés szellemének megfelelően haladhatunk. A szakértő célfüggvénye

$$U(a, \widehat{\theta}, \theta) = -V(\widehat{\theta}) + aX(\widehat{\theta}) - \frac{a^2}{2\theta} \, .$$

Ha bármely θ-hoz célfüggvényét maximalizáló a értéket választja, akkor teljesül, hogy

$$\frac{\partial U(a, \widehat{\theta}, \theta)}{\partial a} = X(\widehat{\theta}) - \frac{a}{\theta} = 0 \, ,$$

innen

$$a(\widehat{\theta}, \theta) = \theta X(\widehat{\theta}) \, .$$

Ha bejelentett típusa megegyezik valódi típusával, azaz $\widehat{\theta} = \theta$, akkor $a(\theta, \theta) = \theta X(\theta)$, ezt célfüggvényébe helyettesítve, célfüggvényének optimális értéke

$$U^*(\theta) = U(a(\theta, \theta), \theta, \theta) = -V(\theta) + \frac{\theta X(\theta)^2}{2} \, ,$$

innen

$$V(\theta) = \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta) \, .$$

A tulajdonos bevételi függvénye

$$R(\theta) = V(\theta) + a(\theta)(S - X(\theta)) \, ,$$

aki ennek θ szerinti várható értékét maximalizálja, így célfüggvénye

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} [V(\theta) + a(\theta)(S - X(\theta))] \, f(\theta) \, d\theta \, .$$

A korábban kapott $a(\theta, \theta)$ és $V(\theta)$ értékét felhasználva

$$\int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta X(\theta) S - \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta) \right] f(\theta) \, d\theta \, .$$

A szakértő optimális célfüggvény-értékének θ szerinti totális deriváltja

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \widehat{\theta}} + \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \theta} \, .$$

A jobb oldal első tagja az ösztönzési korlát miatt nulla, így

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial U(\theta, \theta)}{\partial \theta} = X(\theta)^2 - \frac{X(\theta)^2}{2} = \frac{X(\theta)^2}{2} \, .$$

Számításba kell még vennünk a szakértő részvételi korlátját, azaz minden θ esetén fenn kell álljon, hogy

$$U^*(\theta) \geq 0 \, .$$

De —mint láttuk— $\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{X(\theta)^2}{2} \geq 0$, azaz $U^*(\theta)$ nemcsökkenő, így, ha a „legrosszabb” típusra, azaz a legalacsonyabb $\underline{\theta}$ értékre teljesül, akkor minden θ-ra teljesül, így elég megkövetelni, hogy

$$U^*(\underline{\theta}) \geq 0$$

legyen. Azonban azt is láttuk, hogy a tulajdonos célfüggvénye $U^*(\theta)$-ban csökkenő, ezért ott lehet maximális, ahol ez utóbbi minimális, vagyis a fenti korlát effektív:

$$U^*(\underline{\theta}) = 0 \, .$$

Az előzőeket felhasználva felírhatjuk az irányítási feladatot:

$$\max_{X(\theta)} \int_{\underline{\theta}}^{\overline{\theta}} \left[\theta X(\theta) S - \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta) \right] f(\theta) \, d\theta \, ,$$

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{X(\theta)^2}{2} \, ,$$

$$U^*(\underline{\theta}) = 0 \ .$$

A feladat irányítási változója X, állapotváltozója U^*. Az első feltétel tartalmazza a szakértő ösztönzési korlátját, a második pedig a részvételi korlátja.

A feladat Hamilton-függvénye

$$H = \left[\theta X(\theta)S - \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta)\right] f(\theta) + \lambda(\theta)\frac{X(\theta)^2}{2} \ .$$

Az elsőrendű feltételek

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \theta S f(\theta) - \theta X(\theta) f(\theta) + \lambda(\theta) X(\theta) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial H}{\partial U^*} = -f(\theta) = -\lambda'(\theta) \ ,$$

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{X(\theta)^2}{2} \ ,$$

továbbá felhasználjuk az

$$U^*(\underline{\theta}) = 0 \ ,$$

$$\lambda(\overline{\theta}) = 0$$

feltételeket. Az utolsó összefüggés abból adódik, hogy $\lambda(\theta)$ jelöli azt a hatást, amelyet a szakértő optimális célfüggvényértékének θ szerinti marginális növekedése jelent a tulajdonos optimális célfüggvény-értékére. A θ értéke azonban $\overline{\theta}$-nál már nem nőhet, így itt ez a hatás zérus.

Az első feltételből

$$X(\theta) = \frac{S\theta f(\theta)}{\theta f(\theta) - \lambda(\theta)} \ .$$

A második feltételből integrálással

$$\lambda(\theta) = F(\theta) + C \ .$$

Ezt egybevetve az utolsó feltétellel $\lambda(\overline{\theta}) = F(\overline{\theta}) + C = 1 + C = 0$, innen $C = -1$, azaz

$$\lambda(\theta) = F(\theta) - 1 \ .$$

Ezt felhasználva

$$X(\theta) = \frac{S\theta f(\theta)}{\theta f(\theta) + 1 - F(\theta)} \ .$$

Most felhasználva, hogy θ egyenletes eloszlású, azaz $F(\theta) = \frac{\theta - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}$ és $f(\theta) = \frac{1}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}$

$$X(\theta) = \frac{S\frac{\theta}{\overline{\theta} - \underline{\theta}}}{\frac{\theta}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} - \frac{\theta - \underline{\theta}}{\overline{\theta} - \underline{\theta}} + 1} = S\frac{\theta}{\overline{\theta}} \ .$$

Ugyanakkor

$$a(\theta, \theta) = \theta X(\theta) = S\frac{\theta^2}{\overline{\theta}} \; .$$

Az $X(\theta)$-ra kapott eredményt felhasználva a harmadik feltételben

$$\frac{dU^*(\theta)}{d\theta} = \frac{S^2}{2\overline{\theta}^2}\theta^2 \; .$$

Innen integrálással

$$U^*(\theta) = \frac{S^2}{6\overline{\theta}^2}\theta^3 + C_1 \; .$$

A részvételi korlátot felhasználva

$$U^*(\underline{\theta}) = \frac{S^2}{6\overline{\theta}^2}\underline{\theta}^3 + C_1 = 0 \; ,$$

így

$$C_1 = -\frac{S^2\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2} \; ,$$

tehát a szakértő optimális célfüggvényértéke

$$U^*(\theta) = \frac{S^2}{6\overline{\theta}^2}\theta^3 - \frac{S^2\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2} \; .$$

Az eddigi eredményeket felhasználva kapjuk $V(\theta)$ értékét:

$$V(\theta) = \frac{\theta X(\theta)^2}{2} - U^*(\theta) = \frac{S^2\theta^3}{2\overline{\theta}^2} - \frac{S^2\theta^3}{6\overline{\theta}^2} + \frac{S^2\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2} = \left(\frac{\theta^3}{3\overline{\theta}^2} + \frac{\underline{\theta}^3}{6\overline{\theta}^2}\right) S^2 \; .$$

Nyilvánvaló, hogy mind $V(\theta)$, mind $X(\theta)$, mind pedig $a(\theta)$ növekvő. Ez azt jelenti, hogy minél magasabb típusú a szakértő, vagy a vállalat (azaz minél „tehetségesebb" a szakértő, vagy minél jobbak a vállalat csak általa ismert lehetőségei), annál magasabb értékű (V, X) párt választ a szerződésmenüből, továbbá annál magasabb erőfeszítést tanúsít a vállalat sikeressé tétele érdekében, így annál nagyobb valószínűséggel lesz a vállalat magas értékű. Tekintsük például a legmagasabb, $\overline{\theta}$ típust. Erőfeszítése $a(\overline{\theta}) = S\overline{\theta}$. (Mindenekelőtt azonnal világossá válik, hogy a $\overline{\theta} \le \frac{1}{S}$ megszorításra azért volt szükség, hogy $a \le 1$ legyen.[25]) Ugyanakkor a legmagasabb típus esetén $S = X$. Ha speciálisan $\overline{\theta} = \frac{1}{S}$, akkor ez azt jelenti, hogy a legmagasabb típusú szakértő egy $V(\overline{\theta})$ összeg ellenében, valamint erőfeszítésének haszonáldozata révén hozzájutott egy $S = X$ értékű vagyonhoz, a tulajdonos pedig a $V(\overline{\theta})$ összeghez.

Az eljárás talán úgy interpretálható, hogy a szakértő a szerződésmenüből való választással mintegy „vállalást tesz" a vállalat elérhető értékére (ezt a

[25] Ha e megszorítással nem élünk, akkor minden $\theta > \frac{1}{S}$ esetén $a = 1$ és így a szűrési eljárás bonyolultabbá válna.

vállalást képviseli $X(\theta)$ értéke), ugyanakkor a vállalást ,,hitelesíti" a $V(\theta)$ összeg kifizetésével. Túlzott vállalást nem érdemes tenni, mert ekkor a kifizetendő $V(\theta)$ összeg is magas és a vállalat értéke nagyobb valószínűséggel lesz kisebb, mint $X(\theta)$ és a szakértő a kisebb értékű vállalatot kapja. De alulvállalni sem érdemes, mert ekkor a vállalat értéke nagyobb valószínűséggel lesz nagyobb, mint a túl alacsony $X(\theta)$ és a szakértő az utóbbi összeget kapja. Az eljárás lényege azonban az, hogy a jól informált szereplőt nemcsak arra ösztönzi, hogy típusának megfelelő optimális erőfeszítést tanúsítsa, hanem arra is, hogy a szerződésmenüből való választással a csak maga által ismert valódi típusát kinyilvánítsa.

Irodalom

1. Akerlof, G. A. [1970]: The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism, *Quarterly Journal of Economics*, 84(3): 488–500.
2. Allen, R. D. G. [1962]: *Mathematical Analysis for Economists,* Macmillan and Co. LTD, London.
3. Arrow, K. [1962]: The Economic Implications of Learning by Doing, *Review of Economic Studies,* 3:155–173.
4. Arrow, K. [1963]: Uncertainty and the Welfare Economics in Medical Care, *American Economic Review,* 53:91–96.
5. Arrow, K. [1968]: Applications of Control Theory to Economic Growth, In: *Mathematics of Decision Sciences,* Part 2, 85–119. Providence, RI: American Mathematical Society.
6. Arrow, K. – Kurz, M. [1970]: Methods of Optimization over Time, In: *Public Investment, The Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.
7. Arrow, K. [1985]: The Economics of Agency, In: Pratt, J. – Zeckhauser, R. (editors): *Principals and Agents: The Structure of Business*, Harvard Business School Press, Cambridge, 37–51.
8. Baron, D. – Myerson, R. [1982]: Regulating a Monopolist with Unknown Costs, *Econometrica,* 50:911–930.
9. Blondel, V. D. – Megretski, A. (ed.) [2004]: *Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, Princeton University Press.
10. Bolton, P. – Dewatripont, M. [2005]: *Contract Theory*, The MIT Press, Cambridge (MA).
11. Cass, D. [1965]: Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies,* 32:223–240.
12. Chiang, A. C. [1992]: *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, Inc., New York.
13. Dixit, A. [1990]: *Optimization in Economic Theory*, (2nd edition) Oxford University Press.
14. Dorfman, R. [1969]: An Economic Interpretation of Optimal Control Theory, *American Economic Review*, 59:817–831.
15. Eső Péter – Simonovits András [2003]: Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre, *Közgazdasági Szemle*, 50:99–111.

16. Forster, B. A. [1980]: Optimal Energy Use in a Polluted Environment, *Journal of Environmental Economics and Management*, 4:321–333.
17. Fudenberg, D. – Tirole, J. [1991]: *Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA).
18. Fuente, A. de la [2000]: *Mathematical Methods and Models for Economists,* Cambridge University Press.
19. Gömöri András [2001]: *Információ és interakció*, Typotex, Budapest.
20. Harsanyi, J. [1967-1968]: Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I-III., *Management Science*, 14(3,5,7): 159–182., 320–334., 486–502.
21. Hillier, B. [1997]: *The Economics of Asymmetric Information*, Macmillan Press, London.
22. Hongbin Li [2003]: Reversing Privatization as a Screening Mechanism, *Economics Letters*, 78:267–271.
23. Kamien, M. I. – Schwartz, N. L. [1991]: *Dynamic Optimization: the Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, London.
24. Klein, M. [2002]: *Mathematical Methods for Economics,* Addison-Wesley.
25. Koopmans, T. [1965]: On the Concept of Optimal Economic Growth, In: *The Econometric Approach to Development Planning,* Rand McNally, Chicago.
26. Laffont, J.-J. [1993]: *The Economics of Uncertainty and Information*, (4th printing) The MIT Press, Cambridge (MA).
27. Laffont, J.-J. – Martimort, D. [2002]: *The Theory of Incentives*, Princeton University press.
28. Laffont, J.-J. – Tirole, J. [1986]: Using Cost Observation to Regulate Firms, *Journal of Political Economy*, 94:614–641.
29. Laffont, J.-J. – Tirole, J. [1993]: *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation*, The MIT Press, Cambridge (MA).
30. Léonard, D. – Long, N. van [1992]: *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics,* Cambridge University Press.
31. Macho-Stadler, I. – Pérez-Castrillo, J. D. [2001]: *An Introduction to the Economics of Information*, (2nd edition), Oxford University Press.
32. McShane, E. J. [1989]: The Calculus of Variations from the beginning through Optimal Control Theory, *SIAM Journal on Control and Optimization,* 27 (5):916–939.
33. Molho, I. [1997]: *The Economics of Information,* Blackwell Pub.
34. Myerson, R. [1979]: Incentive Compatibility and the Bargaining Problem, *Econometrica*, 47:61–73.
35. Myerson, R. [1991]: *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge.
36. Nordhaus, W. D. [1975]: The Political Business Cycle, *Review of Economic Studies,* 2:169–190.
37. Pauly, M. V. [1968]: The Economics of Moral Hazard, *Quarterly Journal of Economics*, 88:44–62.
38. Plourde, C. G. [1970]: A Simple model of Replenishable Natural Resource Exploitation, *American Economic Review,* 60:520–522.

39. Pontrjagin et al. [1968]: Optimális folyamatok elmélete, Budapest, Közgazdasági és Jogi Kiadó.
40. Pontryagin, L. S. – Boltyanskii, V. G. – Gamkrelidze, R. V. – Mishchenko, E. F. [1986]: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Classics of Soviet Mathematics, Gordon & Breach Science Publishers, New York (transl. by K. N. Trirogoff).
41. Ramsey, F. [1928]: A Mathematical Theory of Savings, *Economic Journal,* 38:543–559.
42. Rothschild, M. – Stiglitz, J. [1976]: Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information, *Quarterly Journal of Economics*, 90:629–650.
43. Salanié, B. [1997]: *The Economics of Contracts*, The MIT Press, Cambridge (MA).
44. Seierstad, A. – Sydsaeter, K. [1987]: *Optimal Control Theory with Economic Applications*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, London.
45. Shell, K. [1966]: Towards a Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation, *American Economic Review,* 1-2:62–68.
46. Silberberg, E. – Suen, W. [2001]: *The Structure of Economics,* McGraw-Hill.
47. Simonovits András [1998]: *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, KJK. Budapest.
48. Spence, A. M. [1973]: Job Market Signaling, *Quarterly Journal of Economics*, 80:335–374.
49. Spence, A. M. [1974]: *Market Signaling*, Harvard University Press, Cambridge.
50. Stiglitz, J. [1977]: Monopoly, Nonlinear Pricing and Imperfect Information: The Insurance Market, *Review of Economic Studies*, 44: 407–430.
51. Sydsaeter, K. – Hammond, P. [2005]: *Further Mathematics for Economic Analysis,* Prentice Hall.
52. Takayama, A. [1994]: *Analytical Methods in Economics*, University of Michigan Press.
53. Tallos Péter [1998] : *Dinamikai rendszerek alapjai*, Aula, Budapest.
54. Wilson, C. [1977]: A Model of Insurance Markets with Incomplete Information, *Journal of Economic Theory*, 16:167–207.
55. Wilson, R. B. [1992]: Strategic Analysis of Auctions, In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications,* (R. J. Aumann – S. Hart editors), Vol. 1., 227–279., North-Holland, Amsterdam,
56. Wilson, R. B. [1993]: *Nonlinear Pricing*, Oxford University Press.

OPTIMAL CONTROL THEORY AND THE THEORY OF GAMES WITH ASYMMETRIC INFORMATION

Optimal control theory is a well-known tool for dynamic optimization. The paper presents one of it's lesser-known non-dynamic applications in asymmetric information economics, especially in screening. It gives an example of this type of application.