STABIL PÁROSÍTÁSI MODELLEK ÉS EZEKEN ALAPULÓ KÖZPONTI PÁROSÍTÓ PROGRAMOK[1]

BIRÓ PÉTER
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Áttekintő jellegű dolgozatom célja bemutatni a legfontosabb stabil párosítási modelleket, és ezek fő alkalmazási területeként a —bizonyos gazdasági, társadalmi helyzetekben minden szereplőnek elfogadható megoldást kínáló— központi párosító programokat. Emellett ismertetek néhány friss kutatási eredményt a párosítás-piacok dinamikájára, illetve a stabil párosítási problémák bonyolultságára vonatkozóan. Végül megmutatom, hogy ez a modellcsalád miként helyezhető el a kooperatív játékelmélet tárgykörében.

Bevezetés

Stabilnak nevezünk egy olyan egyensúlyi helyzetet, ahol nincsenek olyan szereplők, akiknek lehetőségük van egy új együttműködés létrehozására, amelyben mindannyian jobban járnának (felbontva eközben esetleg más jelenlegi kapcsolataikat). Gale és Shapley 1962-es, klasszikussá vált cikkében [20] a házassági kapcsolatok alapmodelljén szemléltette és elemezte a problémát. Egy természetes algoritmus segítségével megmutatták, hogy miként található tetszőlegesen megadott preferenciákra egy stabil párosítás fiúk és lányok között. A stabilitás itt azt jelenti, hogy nincs olyan blokkoló pár, melyben mindkét félnek megérné az új házasságot megkötnie (elhagyva esetleg jelenlegi házastársát).

A stabil párosítás probléma, és az ennek különféle általánosításaiból kapott modellcsalád a játékelmélet és a kombinatorikus optimalizálás egyik fontos kutatási területévé vált az elmúlt évtizedekben. Ennek talán legfőbb magyarázata, hogy a modellek igen hasznosnak bizonyultak gazdasági és társadalmi problémák leírására, sőt, az ezekre épülő algoritmusokat egyre szélesebb körben kezdték el alkalmazni központi párosító programokban. Dolgozatom célja az alapmodellek és a legismertebb alkalmazások bemutatása.

A stabil párosítás problémát páros gráfok esetén napjainkban is gyakran tárgyalják a házassági kapcsolatok kontextusában. A példa használatához azonban hallgatólagosan három dolgot biztosan felteszünk: minden szereplőnek legfeljebb egy házastársa lehet, házasság csak fiú és lány között létesülhet, továbbá nincs kifizetés (hozomány) a szereplők között. A stabil párosítási modellek legfontosabb általánosításai pontosan ezen feltételek feloldásával kaphatók meg, a dolgozat eszerint tagolódik fejezetekre.

[1] Beérkezett: 2006. október 12. E-mail: pbiro@cs.bme.hu.

Az első fejezetben Gale és Shapley klasszikus eredményeit mutatom be az eredeti formájában. A stabil házasság megtalálására —valamint a legfontosabb alkalmazások alapvető eljárásául— szolgáló „leánykérő algoritmus" elemzését ismertetem és működését egy példán szemléltetem.

A második fejezetben egy szereplő több kapcsolatot is létesíthet egyszerre egy adott kvóta erejéig. A *stabil b-párosítás* probléma szintén megoldható a Gale-Shapley algorimussal, a gyakorlatban is ezt a módszer alkalmazzák széles körben kétoldali piacokon. A központi párosító programok közül bemutatom a legismertebbeket: az egyetemi felvételi rendszert —melyet hazánkban is lényegében ebben a formában működtetnek— illetve a gyakornok elhelyezését.

A harmadik fejezetben a kétoldali piacok helyett egyoldaliakat vizsgálunk. A stabil párosítás problémát itt páros gráfok helyett tetszőleges gráfokon értelmezzük és *szobatárs problémának* nevezzük. Megmutatom, hogy ekkor csak a stabil *fél-párosítások* létezését lehet garantálni. Ismertetek néhány új eredményt a piac dinamikáját, illetve a problémák bonyolultságát illetően. Alkalmazásra példaként az oszthatatlan javak páronkénti cseréjét hozom, melynek egyik fontos megvalósulásaként lehet említeni a páronkénti vesecsere-programokat.

Az utolsó, negyedik fejezetben megengedjük a kifizetést a szereplők között. A két modellcsalád közti különbséget a hozzájuk szorosan kapcsolódó játékelméleti problémák bemutatásával igyekszem megvilágítani. Megmutatom, hogy a kifizetéses esetben a stabil megoldás létezése páros gráfon —amely ekvivalens a hozzárendelési játékok magjának nemürességével— egyszerű következménye Egerváry 1931-es tételének.

Az itt közölt írás nagy része, bővebb terjedelemben, megtalálható közgazdász diplomamunkámban [7].

1 Stabil házasság probléma

Gale és Shapley [20] méltán híressé vált cikkében a stabil párosítások kétoldali alapmodelljét házasságkötésekkel szemléltette. A cikk egyik különlegessége, hogy semmilyen matematikai formulát nem használnak benne, állításaikat józan ésszel könnyen megérthető köznyelvi érveléssel bizonyítják. Ennek szellemében szeretném én is belátni két legfontosabb tételüket, és csak ezután ismertetem a probléma formális leírását.

Legyen adva fiúknak és lányoknak egy-egy halmaza. Egy fiú és egy lány között lehetséges a házasságkötés, ha kölcsönösen elfogadhatónak találják egymást. Feltesszük, hogy mindenki szigorú rangsort tud felállítani lehetséges partnerei között. Célunk egy *stabil házasítás* létrehozása, vagyis úgy rendezni párokba a lányokat a fiúkkal, hogy ne legyen blokkoló pár: egy olyan fiú és lány, akik nem egymás házastársai, de mindketten boldogabbak lennének egymással. Másképpen fogalmazva, ha egy fiú és egy lány nem házas, akkor legalább az egyiküknek jobban kell szeretnie a jelenlegi házastársát, ezért nem lesz elcsábítható. Egy stabil párosítás előállítható a *leánykérő algoritmussal*, melynek menete a következő.

Minden fiú az első körben tegyen ajánlatot a számára legjobban tetsző lánynak. Ha egy lány több ajánlatot is kapott, akkor tartsa meg a legjobb udvarlót, a többit utasítsa vissza. A visszautasított fiúk tegyenek ajánlatot a következő lánynak preferenciájuk szerint. Minden körben a lányok, akik több ajánlatot is kapnak, csak a legjobbat tartsák meg feltételesen, a többi kérőt utasítsák vissza véglegesen.

Észre kell vennünk, hogy így a visszautasított fiúk nekik egyre kevésbé tetsző lányoknak kénytelenek ajánlatot tenni, míg a lányok helyzete mindig csak javulhat a folyamat során. Emiatt egy fiú ugyanannak a lánynak biztosan nem tehet ajánlatot kétszer az algoritmus során, a folyamat tehát legfeljebb annyi körben biztosan véget ér, ahány lehetséges pár volt. Amikor már senki nem akar, vagy nem tud új ajánlatot tenni, akkor az udvarló fiúkból férjek lesznek, a maradék fiúkat viszont már minden lehetséges partnerük visszautasította, így ők agglegények maradnak.

Belátjuk, hogy az eredmény egy stabil párosítás. Párosítás, hiszen minden fiú egyszerre legfeljebb csak egy lánynak udvarolt, és minden lány legfeljebb egy kérőt tartott meg minden körben. A stabilitás igazolásához vegyünk egy fiú-lány párt akik nem egymás házastársai az algoritmus végén. Ennek két oka lehet, vagy udvarolt a fiú a lánynak, de az visszautasította, vagy nem is udvarolt neki. Ha a fiút a lány visszautasította valamikor az algoritmus során, akkor abban a pillanatban volt egy jobb kérője a lánynak, de mivel a lány csak egyre jobb és jobb ajánlatot kapott, ezért a legvégén is kedvezőbb udvarlója (férje) lesz a fiúnál. Ha viszont a fiú nem is tett ajánlatot a lánynak, akkor az csak azért lehetett, mert mindvégig neki jobban tetsző lányoknak udvarolt, így a folyamat végén is olyan feleséget kap, akit jobban kedvel a lánynál. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

Tétel (Gale-Shapley, 1962). *A stabil házasság problémának mindig létezik megoldása.*

A leánykérő algoritmus által adott eredményről azonban több is elmondható. Minden fiú olyan feleséget kap, akinél jobbat semmilyen más stabil párosításban nem kaphatott volna. Másképpen fogalmazva: minden fiú a legjobb *stabil párját* kapja, vagyis a párosítás *fiú-optimális.*

Tétel (Gale-Shapley, 1962). *A leánykérő algoritmussal kapott megoldás optimális minden fiúnak.*

Ennek igazolásához vezessünk be egy definíciót: mondjuk azt, hogy egy lány *elérhető* egy fiú számára, ha van olyan stabil párosítás, amelyben ők egymás házastársai. Indirekt módon tegyük fel, hogy András volt az első olyan fiú az algoritmus során, akit egy számára elérhető lány, Kati visszautasított. Ez csak úgy történhetett meg, hogy abban a pillanatban Katinak volt egy jobb kérője, mondjuk Balázs. Balázsnak biztosan nincs Katinál jobb elérhető partnere, hiszen akkor nem András lett volna az első olyan fiú, akit egy elérhető partner visszautasított. Emiatt Balázs abban a stabil párosításban sem kaphat jobb feleséget Katinál, amikor András és Kati egymással házas. Ez ellentmondás, hiszen Kati és Balázs ekkor egy blokkoló párt alkotna.

A stabil házasítás probléma leírása természetes módon adható meg gráfelméleti nyelvezettel. A szereplőket egy gráf csúcsainak feleltetjük meg, ha két szereplő egymásnak kölcsönösen elfogadható, akkor közöttük egy él fut a gráfban. Amennyiben a csúcsok halmaza kettéosztható oly módon (például fiúkra és lányokra), hogy élek csak a két halmaz között futnak, akkor a gráfot *párosnak* nevezzük. *Párosításnak* nevezünk egy élhalmazt, ha abban semelyik két élnek nincs közös pontja, vagyis az élhalmaz *független.* A lehetséges partnereken vett preferenciák szerint minden csúcsnak szigorú rendezése van a rá illeszkedő éleken. Ha például egy v csúcsra illeszkedik f és e él, és f jobb mint e, akkor azt $f >_v e$-vel jelöljük. Ezt az ábrákon egy irányított szöggel jelezhetjük, ami e élből f élre mutat. A kapcsolatok és egyéni rangsorok megadására gyakran preferencia-listákat használunk. Itt az egyes szereplők listájában a számára elfogadható partnerek vannak felsorolva a preferencia szerint csökkenő sorrendben.

Tömör leírást adhatunk a stabil párosításokra a *karakterisztikus függvény* segítségével. Egy adott $G = (V, E)$ gráfban egy $M \subseteq E$ párosítás leírására definiáljunk egy $x_M : E \longrightarrow \{0, 1\}$ karakterisztikus függvényt, ahol minden $e \in E$ élre teljesül, hogy

$$x_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$$

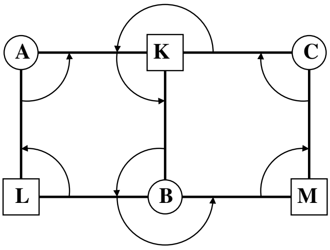
Ekkor az adott gráfra, és az egy csúcsra illeszkedő élek rendezésére $(G, \mathcal{O})$ egy M stabil párosítás definiálható a karakterisztikus függvényére megadott egyenlőtlenségekkel:

(P) Párosítás:
$\sum\limits_{v\in e} x_M(e) \leq 1$ minden $v \in V$-re

(S) Stabilitás:
minden $e \notin M$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum\limits_{v\in f, f\geq_v e} x_M(f) = 1$

Vagyis egy élhalmaz párosítás, ha minden csúcsot legfeljebb egy párosításbeli él fed. A párosítás pedig stabil, ha minden párosításban nem szereplő e élhez található olyan v csúcs, amelyre e illeszkedik és amely fedve van a csúcs által preferált f párosításbeli éllel.

1. Példa Végül lássunk egy példát a stabil párosítás problémára és a Gale-Shapley algoritmusra:



Fiúk	Preferencia	Lányok	Preferencia
A :	$[K, L]$	K :	$[B, A, C]$
B :	$[M, L, K]$	L :	$[A, B]$
C :	$[K, M]$	M :	$[C, B]$

Esetünkben Andrásnak például legjobban Kati tetszik, másodsorban Laura, Mónival pedig nem lehet kapcsolata (nem ismerik egymást, vagy valamelyikük inkább egyedül marad, mintsem ebben a házasságban részt venne). A leánykérő algoritmus során András Katinak, Balázs Móninak, Csaba pedig szintén Katinak tesz ajánlatot. Kati a két ajánlatból a számára kedvezőbbet, Andrásét tartja meg. A visszautasított Csaba a második körben Móninak kezd el udvarolni, melynek hatására Móni kikosarazza addigi kérőjét, Balázst. Végül, a harmadik körben Balázs ajánlatot tesz Laurának, amit ő elfogad. Nincs több visszautasítás, az algoritmus megáll, András Katival, Balázs Laurával, Csaba pedig Mónival köt házasságot. Meggondolhatjuk, hogy ha a lányok tennék az ajánlatokat (fiúkérő algoritmus), akkor az András-Laura, Balázs-Kati, Móni-Csaba párok jönnének létre, és így két lány is jobban járna.[2]

A stabil párosítás problémájának tanulmányozásához remek kiindulópont Roth és Sotomayor [35], valamint Gusfield és Irving [22] könyve. Az előbbi közgazdasági, játékelméleti nézőpontból, míg az utóbbi algoritmuselméleti, kombinatorikus aspektusból ad átfogó leírást a témakörről. Ajánlom továbbá Fleiner [17] munkáját, a stabil párosításokkal kapcsolatos mélyebb matematikai, hálóelméleti, gráfelméleti összefüggések megértéséhez.

2 Kapacitásos modellek, *b*-párosítás probléma

Magyarországon, úgy gondolom, hogy mindenki számára egy természetes elvárás az egyetemi felvételi rendszerrel szemben, hogy ha egy diákot nem vesznek fel egy szakra, akkor az csak két okból következhet be: vagy egy számára kedvezőbb helyre vették fel a diákot, vagy a szak kvótája lett feltöltve jobb jelentkezőkkel. A világ sok más helyén, például az Egyesült Államokban mégsem működtetnek ilyen rendszert, és nem csak a stabilitás természetes feltétele sérül, hanem a felvettek létszáma is hektikusan változhat egyes egyetemeken, mert a sikeres jelentkezők egy része csak az utolsó pillanatban dönt arról, hogy hová iratkozik be. Másrészről viszont hazánkban az iskolai felvételeken kívül tudtommal sehol máshol nem alkalmaznak központi párosító programot, míg a világ sok más helyén, például az Egyesült Államokban széles körben használnak ilyen centralizált eljárásokat a munkaerőpiacon, főként gyakornokok elhelyezésére már 1952 óta.

Mi ennek az oka? Véleményem szerint, legfőképpen az, hogy a fenti piacok szereplői nincsenek kellőképpen tudatában ezen központi párosító rendszerek társadalmi és gazdasági hasznának, és esetleg tartanak a szabad döntési

[2] A kutatások egy fontos irányvonala a szereplők stratégiájának elemzése. A kérdés leegyszerűsítve úgy fogalmazható meg, hogy egy eljárás során a szereplőnek érdemes-e mindig igazat mondani, a valós preferenciáját megadni a központi programnak, avagy el tud-e érni jobb végeredményt, ha néha hazudik. Megmutatható, hogy a leánykérő algoritmus esetén minden fiúnak optimális stratégia az igazmondás. A lányok közül viszont néhánynak érdemes hazudnia abban az esetben, ha nem csak egy stabil megoldása van a feladatnak. A fenti példában mondjuk ha Kati eltitkolná, hogy Andrást is hajlandó elfogadni férjnek, akkor végül Balázst kapná a leánykérő algoritmus eredményeként. A kérdéskör részletes elemzése megtalálható Roth és Sotomayor [35] könyvének 4. fejezetében.

joguk csorbulásától. Alvin Roth a terület talán legismertebb közgazdásza egy tanulmányában [33] a következőket írta a párosító-programokról: ,,Vegyük észre, hogy az itt vizsgált központosított piacok nem jelentenek központi tervezést, ahogyan a legtöbben ezt értelmezik, mivel ezek a piacok úgy lettek megalkotva, hogy érzékenyek legyenek a szereplők kinyilvánított preferenciáira, ahelyett, hogy egy tervező ezektől független céljainak elérését szolgálnák. Ami itt központosítva van, az nem az elérendő cél, hanem a piaci mechanizmus maga." Vagyis a központosított párosító-programok olyan szabályozási keretet teremtenek, amelyben a szereplők szabad választása hatékonyan juthat érvényre egy világos, mindenki által elfogadott automatizmus révén.

A motiváció ismeretében lássuk mi a stabil b-párosítás probléma formális megadása. Gráfelméletben, ha minden v pontra adva van egy egészértékű $b(v)$ kvóta, amelynél több éllel a v csúcs nem lehet fedve, akkor a feltételt teljesítő élhalmazt *b-párosításnak* nevezzük. A b-párosítás illetve a stabilitás kritériuma hasonlóképpen leírható tömör formulákkal a karakterisztikus függvények segítségével. Ez esetben egy $M^b \subseteq E(G)$ b-párosítás x_{M^b} karakterisztikus függvénye ugyanúgy az

$$x_{M^b}(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M^b \\ 0 & \text{ha } e \notin M^b \end{cases}$$

módon definiálható. A b-párosítás és a stabilitás feltétele pedig a következőképpen módosul:

b-Párosítás:
$\sum_{v \in e} x_{M^b}(e) \leq b(v)$ minden $v \in V$-re

Stabilitás:
minden $e \notin M^b$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum_{v \in f, f \geq_v e} x_{M^b}(f) = b(v)$

Gale és Shapley leánykérő algoritmusa a diákok elhelyezésére is hasonlóképpen használható, (munkájuk célja pontosan egy ilyen eljárás kidolgozása volt). A különbség csupán annyi, hogy a kvótákkal rendelkező egyetemi szakok a diákok jelentkezéséből nem csak a legjobb ajánlatát fogadják el, hanem annyi darabot tartanak meg a legjobb jelentkezések közül, amennyi a kvótájuk volt. A visszautasított diákok ugyanúgy a listájuk szerint tesznek újabb ajánlatokat minden egyes körben. A megoldásról hasonló indoklással belátható, hogy a jelentkezők számára ad optimális megoldást.

Érdemes megjegyezni, hogy a stabil b-párosítás probléma gráfelméleti konstrukciókkal visszavezethető stabil párosítás problémára (részletes leírás található erről Cechlárová és Fleiner [14] munkájában).

Egyetemi felvételi eljárás

A hazai egyetemi felvételi eljárás lényegében a Gale és Shapley által kidolgozott algoritmust követi. Fontos különbség, hogy az egyetemi szakok — felvételi pontszámok alapján kialakított— rangsora nem szigorúan rendezi a jelentkezőket.[3] A másik nem elhanyagolható eltérés, hogy a magyar „vonalhúzásos módszer" lényegében az egyetemi szakok felől futtatja az algoritmust, így a kapott eredmény a diákok számára mindig a lehető legrosszabb megoldást adja. Habár az eredmények közti különbség nem biztos, hogy jelentős, —véleményem szerint, és a nemzetközi tapasztalatok alapján— a hazai eljáráson már csak elvi okokból is érdemes lenne változtatni.

Végül megjegyzem, hogy Bolognai-folyamatként aposztrofált közösségi kezdeményezés, melynek célja az Európai Felsőoktatási Térség kialakítása, maga után vonhatja egy egységes európai felvételi rendszer bevezetésének szükségességét. Hiszen, ha a többszintű képzés egyik céljaként megvalósul a diákok nagymértékű mobilitása, vagyis egyre több jelentkező adja be felvételi kérelmét különböző országokban, akkor a nemzeti felvételi-rendszerek működésében zavar keletkezhet, amennyiben az eljárások nincsenek összehangolva.

Gyakornokok elhelyezése

Roth 1984-ben publikált cikkében [32] bemutatta az amerikai orvosi rezidensek elhelyezésére szolgáló párosító-program létrejöttének történetét. Sokak meglepetésére kiderült, hogy az 1952-ben bevezetett eljárás tulajdonképpen Gale és Shapley —mintegy 10 évvel később kitalált és elemzett— algoritmusát használja. A stabil eredményt adó programot a piac szereplői érdekeiket felismerve gyorsan elfogadták, és a program gyakorlatilag változatlan formában működik ma is. Az egyik, a sokasodó elemzések hatására bekövetkezett változtatás, hogy a 90-es évek végétől a kórházak helyett a jelentkezők felől futtatják az algoritmust, hogy így az utóbbiak számára optimális megoldás lehessen a végeredmény. Habár meg kell jegyezzem, hogy ez utóbbi változtatás Roth és Peranson [34] elemzése szerint csak elhanyagolható különbséget hozott a gyakorlatban, mindössze minden ezredik jelentkező kapott másik, jobb gyakornoki helyet.

A sikerek hatására több más szakmában (így például ügyvéd-jelöltek részére is) hasonló programokat indítottak be, és a világ számos helyén igyekeztek központi párosító-rendszereket bevezetni több-kevesebb sikerrel. Tanulságosnak tartom Roth [33] cikkét, amelyben 10 különböző párosító-programot hasonlít össze. Ezek közül négy algoritmus adott végeredményként stabil megoldást, és hatban előfordulhatott az instabilitás. A cikkben közölt legfontosabb megfigyelés szerint mind a négy stabil program változatlan formában használatban maradt, míg a másik hat közül, kettő kis volumenű program kivételével, mindegyik megszüntetésre került. A kétoldali párosítás-piacok részletesebb megismeréséhez elsősorban Roth és Sotomayor [35] könyvét ajánlom. Továbbá Alvin Roth honlapját, ahol a rengeteg tanulmány mellett számos alkalmazás elérhetősége is megtalálható.

[3]Ebből adódó problémák közül az egyik, hogy a kvóták betöltése nem lesz egyenletes. Emiatt, tudomásom szerint, nemrégiben egy új módosítás bevezetéséről kezdeményeztek vitát, melynek célja, hogy a százalékokban kiértékelt dolgozatok eredményeit nem kerekítik, hanem egy-az-egyben pontszámmá alakítják. Így sokkal kevesebb jelentkezőnek lesz azonos pontszáma, ez lényegesen javíthat az algoritmus hatékonyságán.

Végül szeretném kiemelni, hogy a felgyülemlett nemzetközi tapasztalatok alapján valószínűsíthető, hogy még rengeteg új piacon lehet számítani hasonló párosító-programok beindítására. Az Egyesült Államokban például az elmúlt években a bostoni általános iskoláknál [1] és a new yorki gimnáziumoknál [2] vezettek be központi felvételi eljárást. Hasonlóképpen nem tartanám rossz ötletnek, ha hazánkban is egy központi program segítené a gyakornokok elhelyezését.

3 Egyoldali modellek, szobatárs probléma

A stabil párosítás probléma általános esetét *stabil szobatárs problémának* nevezzük, mert itt bármely két szereplő között létrejöhet a párkapcsolat. Ekkor a feladatot leíró gráf tetszőleges lehet, de ettől eltekintve a karakterisztikus függvénnyel történő megadás ugyanazon (S) és (P) egyenlőtlenségekkel írható le. A problémát már Gale és Shapley is felvetette alapcikkében, sőt példát is adtak arra nézve, hogy nem mindig létezik megoldása egy ilyen feladatnak:

2. Példa Legyen a négy szereplő preferenciája a következő

Szereplő	Preferencia
A	$[B, C, D]$
B	$[C, A, D]$
C	$[A, B, D]$
D	tetszőleges

Itt az első három szereplő ,,körbe szereti egymást”. Könnyen látható, hogy egyik párosítás sem lehet stabil, hiszen ha hármójuk közül bármely kettő párt alkotna, akkor a harmadik el tudná csábítani a pár egyik tagját. Gondoljuk például azt, hogy négy teniszjátékos keres partnert magának, mindenki heti egy óra játékra. András Balázzsal játszana legszívesebben, majd Csabával, legkevésbé pedig Dénessel. (Dénest tulajdonképpen mindenki szeretné elkerülni, mert mindig késik és gyengén is játszik.) Erre a problémára nincs stabil megoldás. Ha például András Balázzsal alkotna párt, akkor Csaba Dénessel lenne kénytelen játszani, de ekkor Csaba és Balázs blokkoló párt alkotna, mindketten szívesebben játszanának egymással, mint jelenlegi partnerükkel.

Több mint két évtized elteltével Irving [23] konstruált először egy olyan algoritmust, amely tetszőleges gráf esetén megtalál egy stabil párosítást, amennyiben ilyen létezik az adott feladatra. A megoldások struktúrájának részletes leírása megtalálható Gusfield és Irving könyvében [22].

Tan [42] ismerte fel, hogy a stabilitást elrontó páratlan hosszú körökben szereplő párkapcsolatokat fél-intenzitással véve, egy olyan fél-párosítást kaphatunk, amely teljesít bizonyos stabilitási feltételeket.

A teniszjátékos példára gondolva András, Balázs és Csaba megegyezhet abban, hogy heti egyszer összejönnek, és egy-egy félórát játszanak egymással. Így mindhárman egy-egy órát játszanak és csak Dénesnek nem lesz párja. A megoldás stabilitása itt azt jelenti, hogy mindegyik párosban van egy olyan szereplő, aki nem szeretne több időt játszani abban a párban. Ha például András és Dénes kapcsolatát nézzük, akkor világos, hogy András miatt nem fognak ők semennyit se egymással játszani, mert András kitölti a teniszre fordított egy óráját két jobb partnerrel vívott fél-fél óra játékkal. Ha András és Balázs kapcsolatát nézzük, akkor a jelenlegi félóra játékot Balázs nem szeretné tovább növelni, hiszen ő a maradék félórájában Csabával játszik, akivel jobban szeret teniszezni.

Egy *stabil fél-párosításban* a szereplők párokat és *fél-párokat* alkothatnak. Minden szereplő legfeljebb egy párban vagy két fél-párban lehet benne. A stabilitás feltétele, hogy ha két szereplő nincs párosítva, akkor legalább az egyiküknek vagy van egy jobb párja, vagy van két jobb fél-párja. Továbbá, ha két szereplő fél-párban van, akkor legalább az egyiküknek van egy másik, ennél jobb fél-párja. Összefoglalóan, egy fél-párosítás stabil, ha nincs olyan blokkoló pár, amely szereplőinek lehetősége és egyben kölcsönös érdeke a kapcsolatuk intenzitásának növelése (csökkentve esetleg ezáltal más kapcsolataik kihasználtságát). Másképpen fogalmazva, ha egy párkapcsolat nincs teljesen kihasználva, akkor az intenzitás növelése legalább az egyik félnek nem érdeke, mert a maradék kapacitása le van kötve egy vagy több kedvezőbb kapcsolattal.

Egy fél-párosítást általában hM-el jelölünk, a benne szereplő párok halmazát M-el, a fél-párok halmazát pedig H-val. Vagyis $hM = H \cup M$.

A *stabil fél-párosítás* pontos definiálásához, nem kell mást tennünk, mint hogy a párosítást leíró függvény értékkészletét $\{0, 1\}$-ről $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-re módosítjuk úgy, hogy ha $hM = H \cup M$ egy fél-párosítás, akkor

$$x_{hM}(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ \frac{1}{2} & \text{ha } e \in H \\ 0 & \text{ha } e \notin hM \end{cases}$$

Ekkor az eredeti (P) és (S) egyenlőtlenségek változatlan formában írják le a fél-párosítás illetve a stabilitás feltételét.

A fél-párosítás tehát azt jelenti, hogy minden csúcs legfeljebb 1 összértékkel van fedve. A stabilitási kritérium pedig azt mondja, hogy ha egy e él nem szerepel a fél-párosításban ($e \notin hM$), akkor e egyik v pontjában vagy egy e-nél jobb M-beli éllel, vagy két e-nél jobb H-beli éllel van fedve. Egy fél-értékű (H-beli) e él egyik végpontjának maradék fél-kapacitása pedig egy e-nél jobb H-beli f éllel kell hogy fedve legyen.

Az a megfigyelés, hogy minden fél-párhoz kapcsolódnia kell az egyik szereplőjénél egy másik, nálánál jobb fél-párnak, rögtön azt eredményezi, hogy a fél-párok köröket alkotnak, amely mentén a szereplők „körben kedvelik egymást". Az ilyen preferencia-köröket *ciklusoknak* nevezzük. Tan [42] a következő tételt látta be a stabil fél-párosításokról:[4]

Tétel (Tan, 1990). *Minden stabil szobatárs feladatra létezik stabil fél-párosítás,*

[4] Aharoni és Fleiner [4] megmutatta, hogy a tétel közvetlenül belátható Scarf [39] híres Lemmájából is.

amely párokból és fél-párokból álló páratlan hosszú ciklusokból áll. A szereplők halmaza tehát felosztható

a) párosítatlan,

b) ciklusbeli és

c) párosított szereplőkre.

Továbbá minden stabil fél-párosításban ugyanazok a páratlan ciklusok jönnek létre és ugyanazok a szereplők maradnak párosítatlanok.

Kérdés, hogy miért hasznos a stabil fél-párosítás megkonstruálása? Egyrészt, ha nem tartalmaz páratlan ciklust, akkor egy stabil párosítást találtunk a gráfban, ha pedig tartalmaz páratlan ciklust, akkor tudjuk, hogy nem létezhet stabil párosítás. Másrészt lehetnek olyan természetes feladatok (mint például a fent említett teniszjátékosok esete), ahol a fél-megoldásnak is van értelme. Végül, ha egy stabil fél-párosítás minden páratlan köréből elhagyunk egy szereplőt, és a ciklusok maradék szereplőit a körök mentén párokba rendezzük, akkor egy olyan párosítást kapunk, amely stabil a redukált halmazon. Másképpen fogalmazva —erre a párosításra nézve az eredeti feladatban— minden blokkoló párban az egyik szereplő a mellőzött személyek közül való, így a stabilitás megmaradhat, ha sikerül őket valahogy kompenzálnunk.

A stabil párosítás modell alkalmas lehet társadalmi és gazdasági együttműködések leírására. Jackson és Watts [25] a kapcsolati hálók alakulását elemezte ebben a kontextusban, míg Angelov [5] a cégek összeolvadásának vizsgálatára használta a stabil szobatárs problémát. Mindkét esetben indokolt a dinamikus szemléletű megközelítés.

A párosítás-piac dinamikája

Ebben a részben Biró, Cechlárová és Fleiner [9] munkájából ismertetem a legfontosabb eredményeket. A piac dinamikájának vizsgálatakor azt a kérdést elemezzük, hogy miként változik meg a stabil egyensúlyi helyzet új szereplők belépését követően. Kétoldali piacok esetében a folyamatot modellező algoritmust —egy más kérdés kapcsán— Roth és Vande Vate alkotta meg [36] a következőképpen:

Érkezzen egy új szereplő, v a piacra, ahol jelenleg egy M_v stabil párosítás áll fenn. Mi történik? Tegyük fel, hogy az új játékos egyenként ajánlatot tesz a piac szereplőinek a preferenciája szerint. Amennyiben senki sem fogadja el v ajánlatát, az azt jelenti, hogy a lehetséges partnerei mind egy-egy jobb partnerrel vannak kapcsolatban, vagyis az új szereplő senkivel sem alkot blokkoló párt, így az M_v párosítás stabil marad. Amennyiben az új szereplő, v egy fiú, és ajánlatát egy u lány fogadja el először, akkor két eset lehetséges: Amennyiben u-nak nem volt párja az M_v párosításban, akkor az $M = M_v \cup \{u, v\}$ egy stabil párosítás lesz az új piacon. Ha viszont u egy w fiúval volt párban, akkor u és w kapcsolata felbomlik, u és v összejön egymással, és most w-nek kell új párt keresnie magának úgy, mintha ő érkezett volna be a piacra.

Vagyis $M_w = M \setminus \{u, w\} \cup \{u, v\}$ stabil párosítás lesz, a w fiú nélküli piacon. A mechanizmus folytatódik.

Észrevehetjük, hogy ha a fiúk tesznek ajánlatot, akkor a lányok helyzete egyre csak javul a folyamat során, míg a fiúk helyzete egyre rosszabbodik. Emiatt ugyanaz az ajánlattétel kétszer nem jöhet létre, az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus biztosan véget ér.

Egyoldali piacok esetén Tan és Hsueh [43] alkotott egy hasonló inkrementáló elven működő algoritmust. Az egyetlen különbség, hogy ezen általánosabb esetben ciklusok tűnhetnek el illetve újak formálódhatnak. Amennyiben az utolsó szereplő, aki elfogad egy ajánlatot egy ciklusbeli szereplő, akkor a ciklus maradék része stabil párokra bomlik. Végül, itt előfordulhat, hogy egy szereplő, aki korábban ajánlatot tett, később ajánlatot kaphat. Ebben az esetben az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus vég nélkül folytatódna, de Tan és Hsueh megmutatta, hogy ekkor az ismétlődésben részt vevő szereplőkből egy új ciklust formálva kaphatunk egy stabil fél-párosítást az új piacon.

Blum, Roth és Rothblum [11] a szenior-pozíciók megüresedésének-betöltésének kontextusában vizsgálta a kétoldali piacok dinamikáját. Az ajánlattevő-elfogadó mechanizmus által kapott sorozat az „álláslehetőségek láncolataként" jelenik meg a munkaerő-piacon. Megmutatták, hogy ez a folyamat lényegében megegyezik a leánykérő algoritmus azon változatával, amelyben az ajánlattételt a fiúk mindig egyenként teszik. Ebből a megfigyelésből egyszerűen adódik a következő fontos tétel:

Tétel (Blum-Roth-Rothblum, 1997). *Tegyük fel, hogy egy kétoldali párosítás-piacon egy M_0 stabil párosítás áll fenn és néhány új fiú érkezik a piacra. Ekkor az ajánlattevő-visszautasító mechanizmussal kapott új, M stabil párosításban minden fiú vagy megmarad az M_0-beli párjával, vagy egy rosszabb párt kap, aki viszont a legjobb stabil pár számára az új piacon.*

Az utolsó piacra érkező játékos tehát mindig a lehető legjobb párt kapja meg. Blum és Rothblum [12] állítása szerint általában is érdemes minél később érkezni a piacra:

Tétel (Blum-Rothblum, 2002). *Egy kétoldali párosítás-piac stabil egyensúlya alakuljon ki úgy, hogy a szereplők egymás után lépnek be a piacra, majd az egyensúly az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus által jöjjön létre. Amennyiben két belépési sorrend csak annyiban különbözik, hogy két játékos helye a sorrendben felcserélődik: az elsőben u megy be előbb, a másodikban v, akkor u játékos az első sorrend alapján kialakult stabil párosításban nem kaphat jobb párt, mint a második sorrend alapján kialakult stabil párosításban.*

Végül, nem szabad elfelejteni, hogy az ajánlatot elfogadó lányok —habár végül a lehető legrosszabb párt kapják— helyzete javul, sőt néhányuknak biztosan jobb párjuk lesz az új fiú belépése után, mint előtte volt.

Tétel (Roth-Sotomayor, 1990). *Tegyük fel, hogy egy kétoldali párosítás-piacon a lány-optimális stabil párosítás áll fenn, amikor belép néhány új fiú, és a lányok egy L halmaza új párt kap. Ebben az esetben minden L-beli lány* *határozottan jobb párt kap bármelyik stabil párosításban az új piacon, mint kapott akármelyik stabil párosításban a régi piacon; továbbá az L-beli lányok eredeti párjai határozottan rosszabb párt kapnak bármely stabil párosításban az új piacon, mint kaptak akármelyik stabil párosításban a régi piacon.*

A fenti kétoldali piacokra vonatkozó tételek megfelelőit sikerült igazolnunk egyoldali piacokra, a bizonyításához a következő Lemmát használtuk:

3.1 Lemma (Kulcs-lemma). *Tegyük fel, hogy egy új szereplő, v lép be az egyoldali párosítás-piacra, ahol egy hM_v stabil fél-párosítás áll fenn. Amennyiben v nem alkot blokkoló párt egy u szereplővel hM_v-re nézve, akkor v nem alkothat stabil párt u-val az új piacon.*

Stabil párosítási problémák bonyolultsága

A stabil párosítási problémákat is alapvetően két csoportba tudjuk osztani a bonyolultságuk szerint: vannak olyanok, amelyek megoldhatók polinom időben, illetve olyanok, melyek NP-nehezek.[5] A következőkben négy szempont szerint osztályozva ismertetem őket.

A feladatot kitűzhetjük páros gráfokra, illetve tetszőlegesekre. A preferenciák lehetnek szigorúak, illetve megengedhetünk preferencia-egyezéseket (ez utóbbi esetben is akkor lesz egy él blokkoló, ha mindkét végpontja szigorúan preferálja azt). A kérdésfeltevés szerint a feladat lehet egy stabil párosítás megtalálása, avagy egy olyan párosítás megkeresése, amelyre nézve a blokkoló élek száma minimális. Végül a párosítások halmazát megszoríthatjuk a maximális méretűekre.

Adjunk egy M párosítást, ahol	ahol M	páros gráf		tetszőleges gráf	
		szigorú pref	nem szigorú	szigorú pref	nem szigorú
M stabil	tetsz	Polinomiális	Polinomiális	Polinomiális	NP-nehéz$^{(1)}$
	max	Polinomiális	NP-nehéz$^{(2)}$	Polinomiális	(NP-nehéz)
a blokkoló élek száma M-re min	tetsz	Polinomiális	Polinomiális	NP-nehéz$^{(3)}$	(NP-nehéz)
	max	NP-nehéz$^{(4)}$	(NP-nehéz)	(NP-nehéz)	(NP-nehéz)

Azt, hogy NP-teljes azon kérdés eldöntése, hogy létezik-e stabil párosítás nem-szigorú preferenciák esetén (1) először Ronn [30] mutatta meg, majd később Irving és Manlove [24] adott rá alternatív bizonyítást. Annak a problémának az NP-teljes voltát, hogy a maximális méretű párosítások között létezik-e stabil, páros gráfok esetén, nem-szigorú preferenciákra (2) Manlove és társai [29] látták be.

A blokkoló élek minimális számának meghatározásának (3) nehézségét tetszőleges gráfok esetén Abraham, Biró és Manlove [3] látták be. Azt pedig,

[5] Ha ez utóbbiak közül bármelyikről kiderülne, hogy megoldható polinom időben, akkor az összes NP-teljes probléma is megoldható volna. Ezt az esetet a számítástudomány szakértői nem tartják valószínűnek. A pontos definíció megtalálható Rónyai, Ivanyos és Szabó [31] könyvében.

hogy ez a feladat páros gráfokra is nehéz, ha megköveteljük, hogy a párosítás maximális méretű legyen (4) Manlove bizonyította a közelmúltban. Sőt, mindkét esetben az is bebizonyították, hogy az említett értékeknek még a közelítésére sincs remény.[6]

Egyoldali párosító-programok

A legtöbbször alkalmazott egyoldali párosító-program valószínűleg a sakkversenyeken használt párosító-szoftver, amely a verseny minden fordulójában eldönti, hogy ki kivel játsszon. Mivel a verseny végső célja a győztes kihirdetése, ezért talán érthető, hogy a sorsolást irányító procedúra először mindig a versenyben vezető játékosnak keres megfelelő ellenfelet, majd így folytatja tovább, külön figyelmet fordítva arra, hogy a végén lehetőleg mindenki kapjon párt. Bár történt egy kísérlet [27] annak elemzésére, hogy a hivatalos algoritmus helyett inkább stabil párosítást keressen a program, de véleményem szerint ennek csak akkor lenne értelme, ha a versenyzők célja nem a győzelem, hanem a számukra kedvező partnerekkel történő játék volna.

Egy másik alkalmazási terület lehet az *oszthatatlan javak páronkénti cseréje*. Ebben az esetben minden szereplőnek pontosan egy dolog van a birtokában, amit kicserélhetnek egymás között egy lépésben. Egy releváns alkalmazási lehetőségként vizsgálta Yuan [44] az állami bérlakások cseréjét, amely a régi szovjet-típusú rendszerekben, és a mai Kínában sem képezheti piaci adás-vétel tárgyát. Hasonló jellegű, de a világon mindenütt előforduló probléma kezelésére szolgálnak a páronkénti vesecserék koordinálására létrehozott egyoldali párosító-programok. Erről a problémakörről írok most bővebben a fejezet zárásaként.

Ha egy beteg és a potenciális donorja (tipikusan egy házaspár) között immunológiai okokból nem lehetséges az átültetés, de van egy hasonló problémákkal küzdő másik pár, és keresztben nincs immunológiai probléma, akkor elképzelhetővé válhat a párok közti vesecsere. Néhány elszigetelt eset után az elmúlt években több fejlett országban hivatalos programokat indítottak a vesecserék koordinálására.

A programok deklarált céljai és az alkalmazott modellek között azonban jelentős különbségek lehetnek. A legtöbb ma működő programban, a veséhez jutó betegek számát maximalizálják. Ez egy maximális méretű párosítás feladathoz vezet azon a gráfon, melynek csúcsai a beteg-donor párok, és él akkor fut közöttük, ha lehetséges a kereszt-donáció (lásd a [37] és a [38] cikkeket). Ennél kifinomultabb módszer, ha nem csak elfogadható és nem elfogadható veséket különböztetünk meg, hanem azt is vizsgáljuk, hogy egy vese „mennyire jó" az adott betegnek. Ennek mérőszáma lehet a beültetett szerv várható élettartama. A probléma matematikailag egy súlyozott párosítás feladatra

[6] Az NP-nehéz problémák egy része közelíthető additív vagy multiplikatív hibával. Az élkromatikus szám például minden gráf esetén vagy egyenlő a maximális fokszámmal, vagy ennél eggyel nagyobb. A lefogó pontok számának minimuma pedig felülről becsülhető a maximális párosítás méretének kétszeresével, amely már polinom időben kiszámítható. A kérdéskörről bővebb leírást találhat az Olvasó Jordán, Recski és Szeszlér [26] könyvében.

vezet (ezt a módszert alkalmazzák Ohio államban, az elméleti háttért lásd a [40] cikkben.) Végül nem elhanyagolható etikai érvek szólnak a stabil megoldás alkalmazása mellett is, ahol nincs két olyan pár, akik kölcsönösen jobb esélyeket kapnának, ha egymással cserélnének a programon kívül.[7]

4 Kifizetéses modellek, NTU/TU-játékok

Kifizetéses modellekről akkor beszélünk, ha megengedjük, hogy a létrejött párok illetve társulások tagjai valamilyen formában kompenzálják egymást. Két dolgot követelünk meg: egyrészt mindenki pontosan meg tudja határozni mekkora hasznosságot jelent neki egy lehetséges partnerkapcsolatban való részvétel, másrészt feltesszük, hogy létezik egy olyan átváltható hasznosságú áru, amely átadható a kapcsolatban lévő szereplők között, és a transzfer révén ugyanannyival csökken az azt átadó fél hasznossága, mint amennyivel a fogadó fél hasznossága nő.

A stabil párosítási modellek kifizetéses változatának megoldása ezért mindig két elemű: megadjuk, hogy mely párok alakulnak meg és mennyi hasznosságot adtak át egymásnak a szereplők. A stabilitás feltétele, hogy ne legyen olyan megvalósulatlan (blokkoló) pár, melynek tagjai mind jobban járnának, ha a partnerkapcsolatuk létrejönne és megfelelő kifizetésekkel kompenzálnák egymást.

Az i szereplő hasznosságát egy $\{i,j\}$ kapcsolatban jelöljük $u_i(\{i,j\})$-vel. Egy M párosítás esetén az átadott kifizetéseket gyűjtsük egy $p(M)$ vektorba, melynek i-edik koordinátája, $p_i(M)$ jelentse azt a (pozitív vagy negatív) transzfert, amelyet az i-edik játékos kapott. Transzfert csak M-beli párok adhatnak egymásnak, és egy $\{i,j\}$ páron belül a transzferek összértéke természetesen nulla, vagyis $p_i(M)+p_j(M)=0$. Ha egy szereplő nem eleme egy párnak, akkor értelemszerűen nem lehet kifizetése, vagyis $p_i(M)=0$ minden M-ben nem szereplő i-re. Egy i játékos *összhasznát* h_i-vel jelölve tehát $h_i=0$, ha i nincs párosítva, és $h_i=u_i(\{i,j\})+p_i(M)$, ha i szereplő a j-vel alkot párt és $p_i(M)$ transzfert kap tőle.

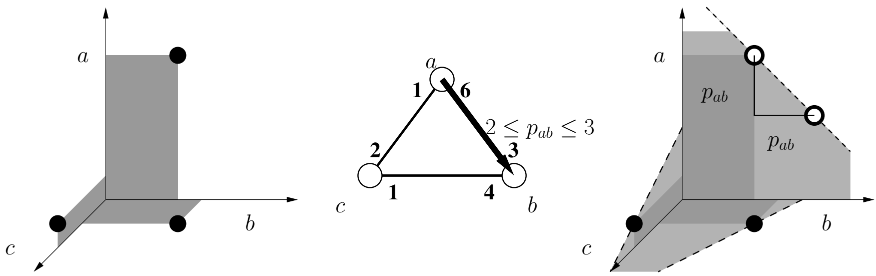
Egy $[M,p(M)]$ párt *stabil megoldásnak* nevezünk, ha nem létezik olyan megvalósulatlan $\{a,b\}$ blokkoló pár, hogy $u_a(\{a,b\})+u_b(\{a,b\})>h_a+h_b$. Ekkor ugyanis a-nak és b-nek érdekében állna kilépni az M-beli kapcsolataiból és új párt alkotni, majd az a-tól b-nek juttatott $u_a(\{a,b\})-h_a$ és $h_b-u_b(\{a,b\})$ közötti hasznosság átadásával mindketten jobban járnának.

Bevezetésképpen lássunk két példát egy-egy háromszemélyes stabil párosítási problémára kifizetéssel és kifizetés nélkül. (Az elérhető hasznosságok ábrázolásának megértéséhez segítséget nyújthat a 3. ábra és annak magyarázata.)

[7] Fontos még megemlíteni, hogy a cserék nem csak páronként kivitelezhetők, hanem elvileg hosszabb körökben is. Azonban érthető okokból az összes műtétet egy időben kell végrehajtani, így ha három pár cserél egy körben, akkor már 6 műtőre és orvoscsoportra van szükség egyszerre. Ennek ellenére például az amerikai NEPKE programban a hármas-cserék is megengedettek. Ekkor a megfelelő matematikai problémák sok esetben bizonyítottan nehézzé válhatnak (lásd [10] és [8]).

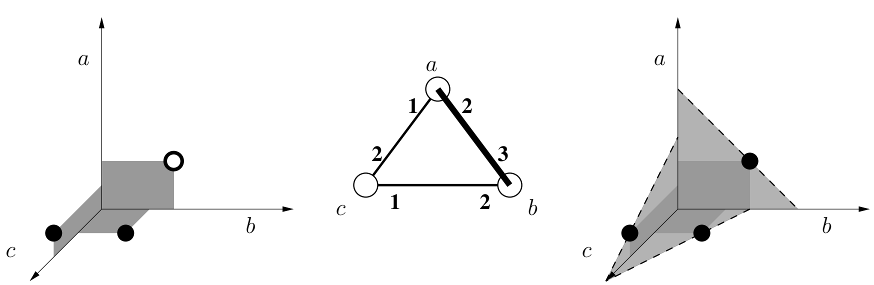
3. Példa. A három szereplő hasznossága a párkapcsolatokban legyen a következő: $u_a(\{a,b\}) = 6$, $u_b(\{a,b\}) = 3$, $u_b(\{b,c\}) = 4$, $u_c(\{b,c\}) = 1$, $u_c(\{c,a\}) = 2$, $u_a(\{c,a\}) = 1$.

Az *1. ábrán* látható, hogy a kifizetés nélküli esetben nem létezik stabil párosítás, illetve, hogy a kifizetéses esetben az $\{a,b\}$ egy stabil párt alkot ha a 2 és 3 közötti hasznosságot átad b-nek.



1. ábra. A párok hasznosságai és a stabil megoldás a kifizetéses esetben

4. Példa. A három szereplő hasznossága a párkapcsolatokban legyen a következő: $u_a(\{a,b\}) = 2$, $u_b(\{a,b\}) = 3$, $u_b(\{b,c\}) = 2$, $u_c(\{b,c\}) = 1$, $u_c(\{c,a\}) = 2$, $u_a(\{c,a\}) = 1$.



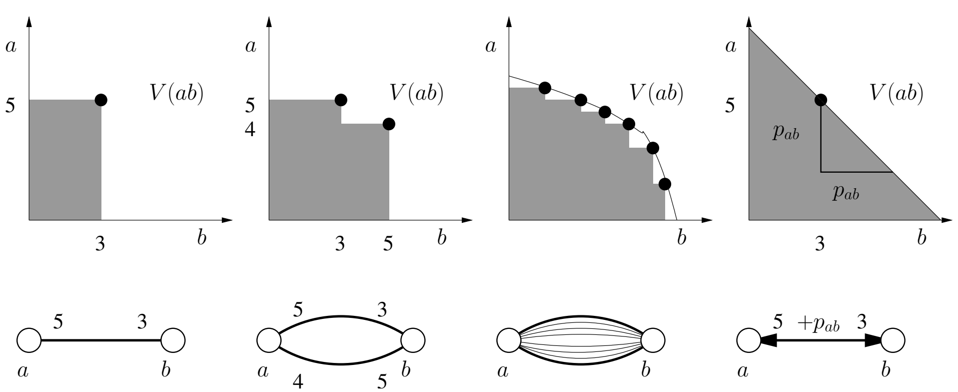
2. ábra. A párok hasznosságai és a stabil megoldás a kifizetés nélküli esetben

A fenti ábrán látható, hogy a kifizetés nélküli esetben az $\{a,b\}$ egy stabil pár, illetve, hogy a kifizetéses esetben nem létezik stabil megoldás. Ennek okát a későbbiekben részletezem.

Természetes feltevés, hogy a szereplők egy csoportja ne csak egyféleképpen tudjon együttműködni. Életszerű Cechlárová és Ferková példája [13] a repülőgép-pilóták párosításáról. Itt ugyanis egy pár beosztásakor igen eltérő lehet a kapcsolat megítélése a pilóták részéről, attól függően, hogy melyiküket tették meg első- illetve másodpilótának. Hasonlóképpen két lehetséges kapcsolat lehet két sakkjátékos között egy sakkverseny egy fordulójában, attól függően, hogy ki játszik világossal. Szintén két lehetséges kapcsolat jöhet létre hazánkban egy diák és az egyetem egy szakja között, hiszen költségtérítéses és államilag finanszírozott formában is igénybe lehet venni az oktatást. A játékelmélet egy klasszikus példája a házaspár esete, ahol a férj inkább a focimeccsre, a feleség pedig balettre menne, de persze leginkább egymás társaságában.

Meggondolható, hogy többféle együttműködés jöhet létre pusztán aszerint is, hogy az egyes szereplők mekkora erőfeszítést fordítanak a kapcsolatra. Illetve ennek egyszerűsített változataként a szereplők átváltható hasznosságú jószág átadásával, transzferrel szintén tetszőleges mértékben módosíthatják egymás hasznosságát egy kapcsolatban. Megjegyezzük, hogy a folytonosan változó elérhető hasznosságok halmaza jól közelíthető diszkrét kimenetekkel.

A következő, *3. ábrán* egy pár lehetséges együttműködéseinek négy esetét mutatjuk be, a kapcsolódó személyes hasznosságok megjelenítésével. Az első esetben csak egyfajta együttműködés lehet a két fél között. A másodikban kétféle. A harmadikban sokféle lehet, az elérhető hasznosságok akár folytonosan is változhatnak, ezt közelíthetjük véges sok lehetséges kimenettel. Végül a negyedik példa az átváltható hasznosságú esetet mutatja, ahol a két fél együttműködésének van egy maximális összhaszna, amelyet egymás között tetszőlegesen eloszthatnak. Párkapcsolatok esetén a többféle együttműködést párhuzamos élek behúzásával tudjuk modellezni, ha gráffal reprezentáljuk a kapcsolati rendszereket.



3. ábra. Hasznosságfüggvények egy párkapcsolatban

Átváltható hasznosság nélküli játékok

Egy *átváltható hasznosság nélküli játék*, röviden *NTU-játék*, megadható egy (N, V) párral, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza és V a kifizetésfüggvény, amely minden $S \subseteq N$ társuláshoz hozzárendel egy $I\!R^S$-beli $V(S)$ halmazt, úgy hogy $V(\emptyset) = \emptyset$ és minden $S \subseteq N, S \neq \emptyset$-re:

a) $V(S)$ egy nemüres és zárt halmaza $I\!R^S$-nek

b) ha $x \in V(S)$ és $y \leq x$, akkor $y \in V(S)$

c) $V(S) \cap I\!R^S_+$ korlátos.

Minden játékos részt vesz a játékban, ezért a játék kimenete egy $V(N)$-beli vektor, melynek koordinátái az egyes játékosok elért hasznosságát jelentik. Természetesen két kimenet közül minden játékos azt preferálja, amelyikben a hasznossága nagyobb. A játék egy $x \in V(N)$ kimenete benne van a játék *magjában*, ha nem létezik olyan (blokkoló) S társulás és a tagjai által elérhető $y \in V(S)$ kimenet, melyre $y_i > x_i$ minden $i \in S$-re. Tehát a játékosok egyik csoportjának sem éri meg kilépni a nagykoalícióból, mert önmagukban nem tudnának olyan kimenetet elérni, amelyben minden szereplőjük nagyobb haszonra tehet szert.

Természetes feltételként jelentkezhet a *szuperadditivitás*, amely egy NTU-játékra megköveteli, hogy tetszőleges két $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$ társulásra $V(S) \cup V(T) \subseteq V(S \cup T)$ teljesüljön.

További specializálás után definiálhatjuk a *partícionálási játékot.* Itt feltesszük, hogy adva van a lehetséges *alaptársulásoknak* egy $\mathcal{B} \subseteq 2^N$ halmaza, melynek része minden $\{i\}$, $i \in N$ egyszereplős társulás (mindenkinek meghagyjuk a jogot, hogy egyedül maradjon). Egy tetszőleges S társulás által legyen elérhető egy $x \in I\!R^S$ kifizetés, akkor és csak akkor ha létezik az S halmaznak egy olyan $B_i \in \mathcal{B}$ alaptársulásokból álló $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S$ partíciója, hogy minden ebben résztvevő B_i társulásra az x kimenetből B_i szereplőinek jutó kifizetés $V(B_i)$-ben legyen. Ha $S \subseteq N$-re $\Pi_{\mathcal{B}}(S)$-el jelöljük a $\mathcal{B}$ alaptársulásokból előállítható partíciók halmazát az S szereplőin, akkor tömörebb kifejezéssel:

$$V(S) = \{x \in I\!R^S : \exists \pi \in \Pi_{\mathcal{B}}, B_i \in \pi, x \in V(B_1) \times V(B_2) \times \ldots \times V(B_k)\}$$

A partícionálási játék nagy előnye, hogy egy kimenet magbeli voltának vizsgálatakor elég csak az alaptársulásokra ellenőrizni a stabilitási feltételt. Igaz ugyanis a következő tétel:

Tétel. *Egy partícionálási játékban az x kimenet akkor és csakis akkor magbeli, ha nem létezik blokkoló B alaptársulás (vagyis egy $B \in \mathcal{B}$ és egy $y \in V(B)$, hogy $y_i > x_i$ minden $i \in B$-re).*

A bizonyításhoz azt kell csak megmutatni, hogy ha az adott x kimenetre van egy tetszőleges S blokkoló társulás, akkor van egy B blokkoló alaptársulás is. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen az S társulás által elért $y \in V(S)$ egy alapkoalíciókból álló partícióval valósítható meg, tehát az ebben szereplő bármelyik B alaptársulás is blokkoló lesz.

Az alaptársulások által elérhető kifizetésekre tett erős megkötéssel kaphatjuk meg a partícionálási játékok speciális eseteként a *társulási játékot.* Feltesszük, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ társulásra létezik egy $\underline{v}(B) \in I\!R^B$ kifizetés, hogy a B által elérhető más kifizetésekben egyik B-beli játékos sem kaphat többet. Vagyis

$$V(B) = \{x \in I\!R^B : x \leq \underline{v}(B)\}$$

A társulási játékokban tehát nem kérdés, hogy egy társulás, ha megalakul, akkor mekkora kifizetést kapnak belőle a tagok. (Ezt értelmezhetjük úgy is, hogy csak egy lehetséges formája van minden koalíciós együttműködésnek.)

Így a játék kimenetén elég már csak azt értenünk, hogy mely alaptársulások jöttek létre, a tényleges kifizetések ebből egyértelműen meghatározódnak. A társulási játék kimenetelét ezért hívhatjuk egyszerűen partíciónak.

Ebből kifolyólag viszont az egyes szereplők természetes módon tudnak egy rangsort felállítani az alaptársulások között, amelyben tagok lehetnek: mindenki azt a társulást preferálja, ahol a társulás megvalósulása esetén nagyobb lesz a kifizetése. Formálisan: ha $i \in B_k$ és $i \in B_l$, akkor $B_k \leq_i B_l \iff \underline{v}_i(B_k) \leq \underline{v}_i(B_l)$.

A társulási játék kimenete, egy π partíció pontosan akkor lesz benne a játék magjában, ha nincs blokkoló alaptársulás, vagyis egy olyan létre nem jött társulás, melynek tagjai egyértelműen jobban járnának a társulás megvalósulásával, mint a jelenlegi partícióban. Precízebben fogalmazva, jelöljük $B_\pi[i]$-vel azt a társulást, amelynek az i játékos tagja a π partícióban. Definíció szerint akkor és csakis akkor blokkolja egy $B \in \mathcal{B}$ társulás a kimenetet, ha minden $i \in B$-re $\underline{v}_i(B_\pi[i]) < \underline{v}_i(B)$, ami a fentiek szerint ekvivalens azzal, hogy $B_\pi[i] <_i B$.

A társulási játékokat a fentiek miatt definiálhatjuk úgy is, hogy minden szereplőnek csupán a preferenciáit adjuk meg azon alaptársulások felett, amelyeknek tagja lehet. A játék mag-beli kimenetét pedig egyszerűen nevezhetjük *stabil partíciónak*. Amennyiben minden alapkoalíció csak kételemű lehet, akkor speciális esetként megkapjuk a stabil párosítás problémát.

Átváltható hasznosságú játékok

Egy játék *átváltható hasznosságú*, röviden *TU-játék*, ha megadható egy (N, v) párral, ahol v most egy *hasznosság-függvény*, amely minden $S \subseteq N$ társuláshoz egy $v(S) \in \mathbb{R}$ értéket rendel hozzá, amely a társulás által elérhető összkifizetést jelenti. Ezen osztozhatnak a társulás tagjai. Meggondolható, hogy minden TU-játék felírható NTU-játékként is a következő hozzárendeléssel: $V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\}$ minden $S \subseteq N, S \neq \emptyset$-re.

Átváltható hasznosságú játékoknál, ha az $x(S) = \sum_{i \in S} x(i)$ jelölést használjuk, akkor a játék kimenete egy $x(N) \leq v(N)$ *megvalósítható kifizetés*. Ha $x(N) \geq v(N)$ és minden i szereplőre teljesül a $x_i \geq v(\{i\})$ feltétel (vagyis senki sem kap kevesebb kifizetést, mint amit egyedül is el tud érni), akkor a kimenetet *elosztásnak* nevezzük. Egy elosztás benne van a játék magjában, ha $x(S) \geq v(S)$ minden S társulásra. A szuperadditivitási feltétel TU-játékokra a $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ egyenlőtlenségnek felel meg.

A mag-megoldás létezésének szükséges és elégséges feltételét pontosan meg lehet határozni. A társulások egy $\mathcal{S} \subseteq 2^N$ rendszerét *kiegyensúlyozottnak* nevezzük, ha léteznek olyan $0 \leq \lambda_S \leq 1$ $(S \in \mathcal{S})$ súlyok, melyekkel

$$\sum_{i \in S \in \mathcal{S}} \lambda_S = 1$$

teljesül minden i játékosra. Egy *játék kiegyensúlyozott*, ha minden kiegyensúlyozott társulásra és súlyrendszerre fennáll a

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) \leq v(N)$$

egyenlőtlenség. A témakör talán leghíresebb állítása a következő tétel:

Tétel (Bondareva-Shapley). *Egy TU-játék magja akkor és csakis akkor nem üres, ha a játék kiegyensúlyozott.*

A *partícionálási TU-játékokra* egy S társulás értéke megegyezik a benne szereplő játékosokból kialakított legnagyobb összértékű alaptársulásokból álló partíció értékével:

$$v(S) = \max\{v(B_1) + v(B_2) + \ldots + v(B_k) : \pi \in \Pi_{\mathcal{B}}, B_i \in \pi\}$$

Itt is igaz, hogy egy x elosztás pontosan akkor mag-megoldás, ha nincs blokkoló alaptársulás (vagyis, ha $x(B) \geq v(B)$ minden $B \in \mathcal{B}$-re). Ez viszont azt jelenti, hogy ha π egy olyan partíciója N-nek, amelyre a maximum felvétetik, akkor minden $B_i \in \pi$-re $x(B_i) = v(B_i)$. Tehát, ha a játék magja nem üres, akkor egy magbeli x elosztás megvalósítható, úgy is hogy az $x(N)$ összértékű π partíció minden egyes B_i alaptársulásának tagjai egymást között —a társulásokon belül— osztják fel az általuk létrehozott hasznosságot.

Hasonlóképpen, meg lehet mutatni, hogy egy partícionálási játék kiegyensúlyozottságához elég csak az alaptársulásokból álló $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$ kiegyensúlyozott társulás-rendszereket vizsgálni, hiszen minden $\mathcal{S} \subseteq 2^N$-re létezik egy $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$, hogy

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \Bigg[\sum_{B_i \in \pi_S} v(B_i) \Bigg] = \sum_{B_i \in \mathcal{S}'} \Bigg[\sum_{\substack{B_i \in \pi_S \\ S \in \mathcal{S}}} \lambda_S \Bigg] v(B_i) = \\ = \sum_{B_i \in \mathcal{S}'} \lambda'_{B_i} v(B_i)$$

ahol $\mathcal{S}'$ szintén kiegyensúlyozott a λ'_S súlyokkal. A játék magjának létezésének szükséges és elégséges feltétele tehát értelemszerűen egyszerűsödik.

Ha az alaptársulások legfeljebb csak kételeműek, akkor a partícionálási TU-játék természetes módon megfeleltethető egy stabil párosítás probléma kifizetéses változatának. Ugyanis, ha egy $\{i, j\}$ lehetséges pár értéke $v(\{i, j\}) = u_i(\{i, j\}) + u_j(\{i, j\})$, és az x elosztásból az i-edik játékos részesedése természetes módon megfelel a játékos összhasznosságának, $x_i = h_i = u_i + p_i(M)$, akkor, ha $x(N)$ egy mag-elosztás az előbbiben, akkor az $x(N) = v(N)$ értéket megvalósító M párosítás stabil lesz $p_i(M) = x_i - v(B_M[i])$ kifizetés mellett az utóbbiban.

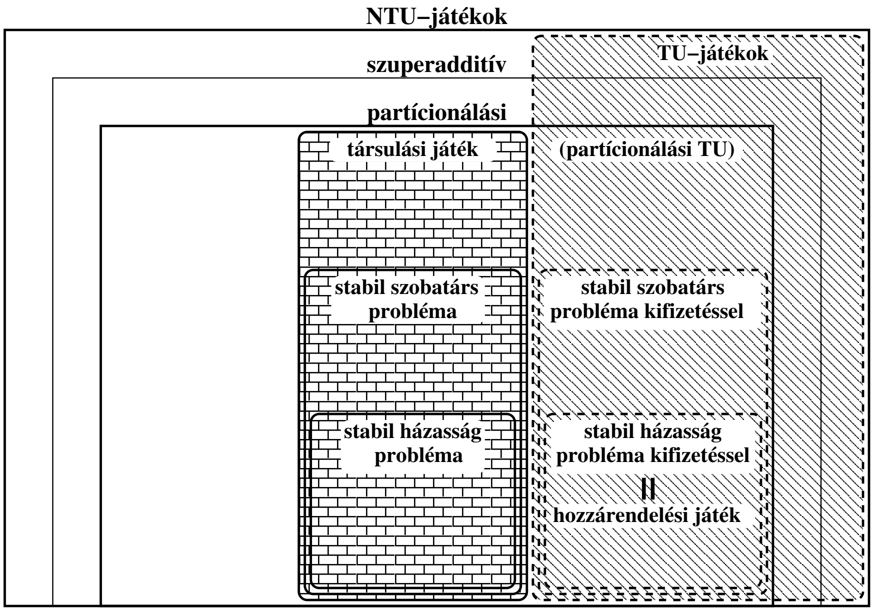
Amennyiben a kételemű alaphalmazokból képzett gráf páros, akkor a —stabil házasság probléma kifizetéses változatának megfelelő— feladatot *hozzárendelési játéknak* nevezzük. Erről Shapley és Shubik [41] látta be 1972-ben, hogy kiegyensúlyozott, ezért a magja nem üres. Lássuk végül ennek egy ekvivalens bizonyítását Egerváry 1931-es tétele szerint.

Legyen adva a G gráf minden e éléhez egy $w(e)$ súly. Egy párosítás *összsúlyán* a párosításban szereplő élek súlyainak összegét értjük. A maximális összsúlyú párosítás összsúlyát jelöljük $\nu_w(G)$-vel. Egy $c : V \Longrightarrow R^V$ értékadást a csúcsokon nevezzünk *fedésnek*, ha minden $e = \{u, v\}$ élre $c(u)+c(v) \geq w(e)$ teljesül. Egy fedés értéke a csúcsok értékeinek összege. A minimális értékű fedés értékét jelöljük $\tau_w^*(G)$-vel.

Nyilvánvaló, hogy ha M egy maximális összsúlyú párosítás, akkor akár csak az M éleinek fedésére is kell egy ekkora értékű fedés, ezért $\nu_w(G) \leq \tau_w^*(G)$ teljesül minden G gráfra. Egerváry Jenő [15] —Kőnig tételének általánosításaként— belátta, hogy a két paraméter között egyenlőség áll fenn, ha a gráf páros.

Tétel (Egerváry, 1931). *Ha G páros gráf, akkor $\nu_w(G) = \tau_w^*(G)$.*

A gráfelméleti és játékelméleti megfontolások között a következő megfeleltetés adható: Minden $e = \{i, j\}$ élen legyen akkora $w(e)$ súly, amekkora az adott $\{i, j\}$ pár $v(\{i, j\})$ értéke. A játék $v(N)$ értéke ebben az esetben egyenlő $\nu_w(G)$-vel, vagyis a maximális összsúlyú párosítás értékével. Egerváry tétele szerint páros gráfban mindig van ugyanekkora értékű fedés is. Ennek következménye, hogy egy c minimális értékű fedésnek kölcsönösen egyértelműen megfelel egy x mag-elosztás (hiszen a $c(i) + c(j) \geq w(\{i, j\})$ fedés-feltétel az $x(i) + x(j) \geq v(\{i, j\})$ mag-feltétellel ekvivalens). Egerváry tétele tehát pontosan a hozzárendelési játék kiegyensúlyozottságát igazolja.



4. ábra. A kooperatív játékok rendszerezése

Ha a stabil szobatárs probléma kifizetéses változatát tekintjük, akkor annak megoldhatósága a fentiekhez hasonlóképpen azon múlik, hogy a megfelelő súlyozott gráfban a maximális összsúlyú párosítás értéke eléri-e a minimális fedés értékét. Ez utóbbiról belátható (lásd bővebben [28]), hogy értéke megegyezik a maximális összsúlyú *fél-párosítás* értékével.[8] Végül a *4. ábrán* egy összegző táblázatot láthatunk az ismertetett kooperatív játékokról.

Irodalom

1. Abdulkadiroglu A., Pathak P. A., Roth A. E. (2005) The New York city high school match. *American Economic Review* 95(2):364–367
2. Abdulkadiroglu A., Pathak P. A., Roth A. E. (2005) The Boston public school match. *American Economic Review* 95(2):368–371
3. Abraham D. J., Biró P., Manlove D. F. (2006) 'Almost stable' matchings in the roommates problem. *Proceedings of WAOA 2005*, volume 3879 of Lecture Notes in Computer Science :1–14
4. Aharoni R., Fleiner T. (2003) On a lemma of Scarf. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 87:72–80
5. Angelov N. (2006) *Modelling firm mergers as a roommate problem.* Working Paper
6. Biró P. (2003) *Stabil b-párosítás gráfokon.* Diplomamunka, BME, matematikus szak
7. Biró P. (2006) *Stabil párosítások gazdasági alkalmazásai az Európai Unióban.* Diplomamunka, Corvinus Egyetem, közgazdász szak
8. Biró P., Cechlárová K. (2006) Inapproximability of the kidney exchange problem. *Information Processing Letters* 101(5):199–202
9. Biró P., Cechlárová K., Fleiner T. (2006) On the dynamics of the stable matching markets. *The 17th International Conference on Game Theory*
10. Biró P., Rizzi R. (2006) *On optimal kidney exchange programs.* Working paper
11. Blum Y., Roth A. E., Rothblum U. G. (1997) Vacancy chains and equilibration in senior-level labor markets. *Journal of Economic Theory* 76:362–411
12. Blum Y., Rothblum U. G. (2002) 'Timing is everything' and marital bliss. *Journal of Economic Theory* 103:429–443
13. Cechlárová K., Ferková S. (2004) The stable crews problem. *Discrete Applied Mathematics* 140:1–17
14. Cechlárová K., Fleiner T. (2005) On a generalization of the stable roommates problem. *ACM Transactions on Algorithms* 1(1):143–156
15. Egerváry J. (1931) Matrixok kombinatorius tulajdonságairól. *Matematikai és Fizikai Lapok* 38:16–28
16. Ericsson K., Karlander J. (2001) Stable outcomes of the roommate game with transferable utility. *International Journal of Game Theory* 29:555–569

[8] Hasonló következtetésre jutott a stabil szobatárs probléma kifizetéses változatának vizsgálatában Ericsson és Karlander [16] gráfelméleti tételek használata nélkül. Visszagondolva a 4. Példára, ott azért nem találhattunk stabil megoldást, mert a maximális összsúlyú párosítás értéke 5, míg a fél-párosítás értéke 5,5 volt.

17. Fleiner T., *Stable and crossing structures.* Ph.D. Thesis (2000) www.renyi.hu/fleiner
18. Forgó F., Szép J., Szidarovszky F. (1999) *Introduction to the Theory of Games.* Kluwer Academic Publishers: Nonconvex Optimalization and Its Applications 32
19. Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T. (2006) *Játékelmélet.* Elektronikus jegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem
20. Gale D., Shapley L. S. (1962) College admissions and stability of marriage. *American Mathematical Monthly* 69:9–15
21. Gale D., Sotomayor M. (1985) Some remarks on the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics* 11:223–232
22. Gusfield D., Irving R. W. (1990) *The stable marriage problem: structure and algorithms.* The MIT Press, Cambridge
23. Irving R. W. (1985) An efficient algorithm for the 'stable roommates' problem. *Journal of Algorithms* 6:577–595
24. Irving R. W., Manlove D. F. (2002) The stable roommates problem with ties. *Journal of Algorithms* 43:85–105
25. Jackson M. O., Watts A. (2002) The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory* 106:265–295
26. Jordán T., Recski A., Szeszlér D. (2004) *Rendszeroptimalizálás.* Typotex Kiadó, Budapest
27. Kujansuu E., Lindberg T., Mäkinen E. (1999) The stable roommates problem and chess tournament pairings. *Divulgaciones Matematicás* 7:19–28
28. Lovász L., Plummer M. D. (1986) *Matching Theory.* Akadémiai Kiadó – North Holland, Budapest
29. Manlove D. F., Irving R. W., Iwama K., Miyazaki S., Morita Y. (2002) Hard variant of stable marriage. *Theoretical Computer Science* 276(1-2):261–279
30. Ronn E. (1990) NP-complete stable matching problems. *Journal of Algorithms* 11:285–304
31. Rónyai L., Ivanyos G., Szabó R. (1998) *Algoritmusok.* Typotex Kiadó, Budapest
32. Roth A. E. (1984) The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *Journal of Political Economy* 6:991–1016
33. Roth A. E. (1990) New physicians: a natural experiment in market organization. *Science* 250:1524–28
34. Roth A. E., Peranson E. (1999) The redesign of the matching market for American physicians: some engineering aspects of economic design. *The American Economic Review* 89:748–752
35. Roth A. E., Sotomayor M. (1990) *Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis.* Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press
36. Roth A. E., Vande Vate J. H. (1990) Random paths to stability in two-sided matching. *Econometrica* 58:1475–80
37. Roth A. E., Sönmez T., Ünver U. (2004) Kidney exchange. *Quarterly Journal of Economics* 119(2):457–488

38. Roth A. E., Sönmez T., Ünver U. (2005) Pairwise kidney exchange. *Journal of Economic Theory* 125(2):151–188
39. Scarf H. E. (1967) The core of an N person game. *Econometrica* 35:50–69
40. Segev D. L., Gentry S. E., Warren D. S., Reeb B., Montgomery R. A. (2005) Kidney paired donation and optimizing the use of live donor organs. *Journal of American Medical Association*, 293:1883–90
41. Shapley L. S., Shubik M. (1972) The assignment game I: The core. *International Journal of Game Theory* 1:111–130
42. Tan J. J. M. (1991) A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *Journal of Algorithms* 12:154–178
43. Tan J. J. M., Hsueh J. C. (1995) A generalisation of the stable matching problem. *Discrete Applied Mathematics* 59:87–102
44. Yuan Y. (1996) Residence exchange wanted: A stable residence exchange problem. *European Journal of Operational Research* 90:536–546

STABLE MATCHING MODELS AND CENTRALIZED MATCHING PROGRAMS

The goal of this survey is to introduce the most relevant stable matching models and its applications. Centralized matching programs can preserve suitable solutions for a wide range of social and economic problems. Beside this summary, we show some recent results on the dynamics of matching markets, and we present the computational complexity of a family of related problems. Finally, we explain how these stable matching models can be described with game theoretical notions.