AZ L-NASH MEGOLDÁS IMPLEMENTÁCIÓJÁRÓL KÉTSZEMÉLYES ALKUPROBLÉMÁK ESETÉN[1]

FORGÓ FERENC
Budapesti Corvinus Egyetem

A ,,Nash program" célkitűzése, hogy minden axiomatikusan meghatározott kooperatív játék megoldását egy megfelelő nemkooperatív alkujáték részjáték tökéletes Nash egyensúlypontjaként is elő tudjuk állítani. Ebben a cikkben az úgynevezett L-Nash megoldást vizsgáljuk ebből a szempontból. A kétszemélyes alkuproblémák egy széles osztálya esetén bebizonyítjuk, hogy az L-Nash megoldás kooperatív alkujáték egyensúlyi kifizetéseként való előállítására minden olyan implementálás alkalmas, amely magát a Nash alkumegoldást is elő tudja állítani. A problémák egy másik osztálya esetében az L-Nash megoldást aszimptotikusan állítja elő Rubinstein váltakozó ajánlattételes alkujátékának megfelelő módosítása.

1 Bevezetés

Több, mint ötven év telt el Nash iránymutató munkáinak (Nash (1950), (1953)) megjelenése óta, de az a kutatási irány, amelyet meghirdetett, és amely *Nash-program* néven vált közismertté, még mindig újabb és újabb eredményeket produkál és mintegy iránytűül szolgál azok számára, akik játékelméleti kutatásaikban egy modellt, vagy megoldáskoncepciót két oldalról is meg szeretnének közelíteni. Ennek a vizsgálati módszernek a legkitűnőbb példáját maga Nash adta, aki a kétszemélyes kooperatív játékok axiomatikus és alkumodellként való elemzését összekapcsolta, ezzel példát mutatva a kooperatív és nemkooperatív játékelmélet együttes alkalmazására.

A Nash által vizsgált modell egyszerű, minden sallangtól megtisztított és csak a lényegre koncentrál: hogyan egyezhet meg két játékos abban, hogy a lehetséges kimenetelek halmazából (a hasznossági térben) mely elemet válasszák ki közös megegyezéssel. Tudván azt, hogy ez a megegyezés valamilyen alkufolyamat eredménye lehet, a problémát *alkumegoldásnak* (bargaining solution) nevezte.

Jelöljük F-fel a lehetséges kimenetelek (kifizetések) halmazát és $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$-vel az *egyet nem értési* (disagreement) kifizetést. Az $(F, \mathbf{d})$ párost, ahol $F \subset \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2$, kétszemélyes *alkuproblémának* nevezzük. Feltesszük, hogy F konvex, kompakt és van olyan $\mathbf{x} \in F$, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{d}$. Ez egy kicsit kevésbé általános megfogalmazás, mint Nashé, de a lényeget nem érinti. A (kooperatív) játék abból áll, hogy a két játékos tárgyal egymással arról,

[1]Beérkezett: 2006. október 22. A kutatás az OTKA T046194 pályázat keretében készült. E-mail: `ferenc.forgo@uni-corvinus.hu`.

hogy F melyik elemét válasszák. Ha sikerül megegyezni, és a választás $\mathbf{x}^* \in F$, akkor az első játékos megkapja az x_1^* kifizetést, a második pedig x_2^*-ot. Ha nem sikerül megállapodniuk, akkor az első játékos a d_1, a második a d_2 ,,büntető" kifizetést kapja. Ha adott az $(F, \mathbf{d})$ alkuprobléma, akkor mit tekintsünk megoldásnak? Jelöljük A-val az alkuproblémák halmazát. Egy $\psi : A \to I\!R^2$ függvényt *megoldásfüggvénynek* vagy röviden *megoldásnak* nevezünk.

Az axiomatikus megközelítés igyekszik követelményeket megfogalmazni, amelyek intuitíven elfogadhatók, és egyértelműen meghatároznak egy megoldást. Nash axiómái (követelményei) a következőek:

1. *Lehetségesség*: minden $(F, \mathbf{d})$ alkuproblémára $\psi(F, \mathbf{d}) \in F$.

2. *Racionalitás*: minden $(F, \mathbf{d})$-re $\psi(F, \mathbf{d}) \geq \mathbf{d}$.

3. *Pareto-optimalitás*: ha $\mathbf{f} \in F$ és $\mathbf{f} \geq \psi(F, \mathbf{d})$, akkor $\mathbf{f} = \psi(F, \mathbf{d})$.

4. *Skála függetlenség*: ha $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, β_1, β_2 tetszőleges, és

$$\begin{aligned} \mathbf{d}' &= (\alpha_1 d_1 + \beta_1, \alpha_2 d_2 + \beta_2) \\ F' &= \{(\alpha_1 x_1 + \beta_1, \alpha_2 x_2 + \beta_2) : (x_1, x_2) \in F\}, \end{aligned}$$

   akkor $\psi(F', \mathbf{d}') = (\alpha_1 \psi_1(F, \mathbf{d}) + \beta_1, \alpha_2 \psi_2(F, \mathbf{d}) + \beta_2)$.

5. *Kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség*: ha $F' \subset F, (F', \mathbf{d}) \in A$, és $\psi(F, \mathbf{d}) \in F'$, akkor $\psi(F', \mathbf{d}) = \psi(F, \mathbf{d})$.

6. *Szimmetria*: ha $(x_1, x_2) \in F$ akkor és csak akkor, ha $(x_2, x_1) \in F$ és $d_1 = d_2$, akkor $\psi_1(F, \mathbf{d}) = \psi_2(F, \mathbf{d})$.

Tekintsük a következő maximum feladatot, amelynek célfüggvényét *Nash szorzatnak* nevezzük:

$$\begin{gathered} (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \to \max \\ (x_1, x_2) \in F \\ x_1 \geq d_1 \\ x_2 \geq d_2 \ . \end{gathered}$$

Ennek a feladatnak pontosan egy megoldása van, melyet *Nash-alkumegoldásnak* (NAM) nevezünk. Legyen φ az a megoldásfüggvény, amely minden alkuproblémához a NAM-ot rendeli.

1. Tétel (Nash 1950). *φ az egyetlen megoldásfüggvény, amely az 1-6. követelményeket kielégíti.*

Ez a megközelítés semmit sem mond a konkrét alkufolyamatról, csak a végeredményt karakterizálja az axiómák segítségével. Nash eredeti gondolata volt, hogy minden alkuproblémához konstruáljunk egy nem-kooperatív, az alkufolyamatot részletesebben modellező játékot úgy, hogy lehetőleg ennek a játéknak egyetlen részjáték tökéletes Nash egyensúlypontja (NEP) legyen és ebben az egyensúlypontban a játékosok kifizetése egyezzék meg az axiómákkal egyértelműen meghatározott NAM-mal. A játékot úgy kell megkonstruálni, hogy a kooperatív megoldás expliciten semmi esetre sem szerepeljen a játék leírásában és lehetőleg magát a megoldást ne használjuk a játék paramétereinek meghatározásához.

Egy ilyen nemkooperatív játékra maga Nash mutatott példát (Nash (1953)), amelyet több más követett (pl. Rubinstein (1982), Howard (1992)). Ezt a vizsgálati módszert, az axiomatizálás és a nem-kooperatív implementáció harmonizálását egyéb megoldások (például a Kalai-Smorodinsky megoldás, Moulin (1984), a Shapley érték, Dasgupta és Chiu (1998) esetére is alkalmazták a Nash program iránymutatását követve. Nem célunk a Nash program teljes áttekintése, Binmore, K. et al. (1992) és Serrano (2005) munkái ezt megteszik.

Ebben a cikkben egy olyan kooperatív megoldás nemkooperatív implementációjával foglalkozunk, amely először Forgó (1983) munkájában jelent meg, majd Forgó és Szidarovszky (2003) az axiómatizálással és a többkritériumú döntésekkel való kapcsolatának kimutatásával egészítette ki. Ebben a dolgozatban használták a szerzők az L-Nash megoldás (LNAM) elnevezést. Az LNAM azt a megoldást jelenti, amelyet a NAM-ok határértékeként kapunk akkor, ha az egyet nem értés büntetésének mértéke egy adott rögzített irányban a végtelenhez tart.

Az LNAM nemkooperatív alkujátékkal való implementációjával foglalkozunk ebben a cikkben. Megmutatjuk, hogy bizonyos esetekben elég nagy, de véges büntetés kilátásba helyezésével is el lehet érni az LNAM-ot és így mindazok a modellek közvetlenül alkalmazhatók, amelyek a NAM-ot implementálják. Amennyiben ilyen véges büntetés nincs, akkor Rubinstein (1982) váltakozó ajánlattételes alkumodelljének megfelelő adaptációjával megmutatjuk, hogy ez a modell ugyanúgy, mint a NAM-ot, az LNAM-ot is aszimptotikusan implementálja.

2 Poliedrikus lehetséges tartomány

Legyen $C(\alpha) = (F, -\alpha\mathbf{r})$ egy kétszemélyes alkuprobléma, ahol $\mathbf{r} > \mathbf{0}$, $\alpha>0$. Az $F \subset I\!R^2_+$ a lehetséges kimenetelek konvex, kompakt halmaza, $\mathbf{r}$ az egyet nem értési (disagreement) irány, α az egyet nem értés büntetésének mértéke. Minden α-ra, a $C(\alpha)$ alkuproblémához tartozó *Nash-féle alkumegoldásnak* (NAM) nevezzük a $\mathbf{b}(\alpha) \in I\!R^2_+$ kimenetelt, ha $\mathbf{b}(\alpha)$ az egyetlen megoldása az alábbi problémának:

$$P(\alpha): \qquad (x_1 + \alpha r_1)(x_2 + \alpha r_2) \to \max$$
$$(x_1, x_2) \in F\ .$$

Legyen

$$M = \max_{(x_1,x_2)\in F} (r_1 x_2 + r_2 x_1)\ .$$

M a feltételek miatt mindig létezik. Tekintsük most a következő problémát (amely nem függ α-tól):

$$
\begin{aligned}
Q: \qquad & r_2^2 x_1^2 + r_1^2 x_2^2 \to \min \\
& (x_1, x_2) \in F \\
& r_1 x_2 + r_2 x_1 = M \ .
\end{aligned}
$$

Q-nak egyetlen megoldása van, amelyet *L-Nash alkumegoldásnak* nevezünk. (Az L betű a *limit* szóra utal). Az LNAM fogalom először Forgó (1983)-ban szerepel, részletes elemzése és különböző tulajdonságai pedig Forgó és Szidarovszky (2003)-ban találhatók meg. Ugyanitt szerepel a következő tétel, amely a $P(\alpha)$ és a Q feladat megoldásai között létesít kapcsolatot:

2. Tétel. *Ha* $\mathbf{b}(\alpha)$ *a* $C(\alpha)$ *alkuprobléma NAM-ja, akkor* $\lim_{\alpha\to\infty} \mathbf{b}(\alpha) = \mathbf{z}$, *ahol* $\mathbf{z}$ *az LNAM (a* Q *feladat megoldása).*

Megjegyezzük, hogy Forgó és Szidarovszky (2003)-ban általánosabban szerepel ez a tétel (n-személyes alkuproblémára), de ebben a cikkben csak a kétszemélyes alkuproblémákkal foglalkozunk.

Fontos speciális eset, amikor az F politóp. Ez a helyzet például akkor, amikor F-et egy bimátrix játékból vagy egy többkritériumú döntési problémából származtatjuk (lásd az 1. és 2. példákat később).

Forgó és Szidarovszky (2003)-ban erre vonatkozik a következő tétel:

3. Tétel. *Ha* F *politóp, akkor van olyan* $\alpha_0 \geq 0$*, hogy minden* $\alpha > \alpha_0$ *esetén* $\mathbf{b}(\alpha) = \mathbf{z}$*, vagyis a NAM megegyezik az LNAM-mal.*

Ez a tétel akkor fontos, ha az LNAM-ot olyan nemkooperatív alkujátékokkal akarjuk ezen játékok NEP-jeként előállítani, amelyeket a NAM-ra dolgoztak ki. Ha azonban az LNAM nemkooperatív alkujátékként való realizációjára ezt az utat akarjuk követni, akkor az alkuprobléma primer adataiból előre kell tudnunk becsülni azt az α_0 küszöbértéket, amely fölé emelve az egyet nem értés büntetésének mértékét, a NAM már nem változik.

A 3. Tétel bizonyítása Forgó és Szidarovszky (2003)-ban lényegében egzisztencia bizonyítás és így ebből közvetlenül nem tudunk α_0-ra becslést (felső korlátot) adni. Kétszemélyes alkuprobléma esetében azonban viszonylag egyszerűen, a probléma primer adataiból tudunk ilyen becslést konstruálni. Ezt fogjuk most megtenni.

Tegyük fel, hogy az F politóp csúcspontjai $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k$ és $\mathbf{z}$ az LNAM (a Q feladat megoldása). A $P(\alpha)$ feladat célfüggvénye így is írható:

$$x_1 x_2 + \alpha(r_1 x_2 + r_2 x_1) + \alpha^2 r_1 r_2 \to \max$$

Legyen $\mathbf{p} = (p_1, p_2), \mathbf{q} = (q_1, q_2)$ az F két Pareto-optimális csúcspontja. Mivel a NAM mindig Pareto-optimális felületen van (ez az egyik axióma!), ezért a $P(\alpha)$ feladat megoldása vagy Pareto-optimális csúcspontban, vagy két ilyen csúcspont által meghatározott szakaszon van, amelyet *Pareto-optimális szakasznak* fogunk nevezni. Legyen

$$T = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q},\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

a **p** és **q** pontok által meghatározott szakasz. A Nash-szorzat ($P(\alpha)$ célfüggvénye) a konstans tag elhagyása után a T szakaszon a következő:

$$f(\lambda) = (\lambda p_1 + (1-\lambda)q_1)(\lambda p_2 + (1-\lambda)q_2) + \alpha r_1(\lambda p_2 + (1-\lambda)q_2) + \\ + \alpha r_2(\lambda p_1 + (1-\lambda)q_1)\ .$$

Ha a NAM a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz belsejébe esik, akkor ott

$$f'(\lambda) = 2(p_1-q_1)(p_2-q_2)\lambda + (p_1-q_1)q_2 + (p_2-q_2)q_1 + \\ + \alpha(r_1(p_2-q_2) + r_2(p_1-q_1)) = 0\ . \tag{1}$$

Ez csak akkor állhat fenn minden elég nagy α-ra, és ezáltal minden $\alpha \geq 0$-ra, ha

$$r_1(p_2-q_2) + r_2(p_1-q_1) = 0\ . \tag{2}$$

Ez azt jelenti, hogy abban az esetben, amikor az LNAM egy Pareto-optimális szakasz belsejébe esik, akkor $\alpha_0 = 0$. Mivel $r_1, r_2 > 0$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ és $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ Pareto-optimális szakasz, ezért $(p_1-q_1)(p_2-q_2) < 0$. Így minden elég nagy α-ra a NAM csak akkor eshet a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz belsejébe, ha a

$$0 < -\frac{(p_1-q_1)q_2 + (p_2-q_2)q_1}{2(p_1-q_1)(p_2-q_2)} < 1 \tag{3}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha (2) és (3) fennállnak, akkor a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakaszt *elfogadhatónak* nevezzük. Ha a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz elfogadható, akkor a $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}$ pontot, ahol

$$\lambda = -\frac{(p_1-q_1)q_2 + (p_2-q_2)q_1}{2(p_1-q_1)(p_2-q_2)}$$

a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz *kritikus pontjának* nevezzük. Könnyű látni, hogy ebből legfeljebb egy van. Legyen K a Pareto-optimális csúcspontok és a legfeljebb egy Pareto-optimális elfogadható szakasz kritikus pontjának véges halmaza.

Az előbbiek alapján világos, hogy az LNAM a K halmaz pontjainak egyike és meghatározható az alábbi egyszerű algoritmussal:

Számoljuk ki az $r_1x_2 + r_2x_1$függvény értékét az F csúcspontjaiban. Ha a maximum csak egyetlen pontban vétetik fel, akkor ez az LNAM. Ha kettő pontban (ennél több nem lehet, mivel két dimenzióban vagyunk), akkor ezen két pont által meghatározott szakasznak a kritikus pontja az LNAM, amennyiben ez létezik, vagy pedig a két csúcspont közül az, amelyikben a Q feladat célfüggvényértéke kisebb.

A NAM meghatározására Kaneko (1992) adott egyszerű és hatékony véges algoritmust.

Ezeket az eredményeket is fel fogjuk használni arra, hogy egy felső becslést adjunk arra az α_0 értékre, amelyre fennáll, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ esetén a NAM és az LNAM egybeesik.

A fentiek alapján a K halmazból most már kihagyhatjuk a kritikus pontot (maradnak az F Pareto-optimális csúcspontjai), mivel arra már megvan az egzakt $\alpha_0 = 0$ alsó korlát.

Legyen $\mathbf{b}(\alpha)$ a NAM az α paraméter függvényében, $\mathbf{z}$ az LNAM és tegyük fel, hogy $\mathbf{b}(\alpha) \neq \mathbf{z}$. Ekkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$M = r_1 z_2 + r_2 z_1 \geq r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha)$$

$$z_1 z_2 + \alpha(r_1 z_2 + r_2 z_1) = z_1 z_2 + \alpha M < b_1(\alpha) b_2(\alpha) + \alpha(r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha)) \, .$$

A második egyenlőtlenség azért szigorú, mert bármely $\alpha > 0$-ra a NAM az egyetlen maximalizálója a Nash szorzatnak. Ezekből az egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

$$\alpha(M - (r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha)) < b_1(\alpha) b_2(\alpha) - z_1 z_2 \, . \tag{4}$$

$g(\mathbf{b}(\alpha)) := M - (r_1 b_2(\alpha) + r_2 b_1(\alpha))$ nem lehet 0, mert akkor a jobb oldalnak pozítívnak kellene lenni, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{z}$ a Q feladat egyetlen megoldása.

Ha $\mathbf{b}(\alpha) \in K$, akkor legyen

$$s = \min_{\mathbf{y} \in K, g(\mathbf{y}) > 0} (M - (r_1 y_2 + r_2 y_1)) > 0 \, ,$$

$$S = \max_{\mathbf{y} \in K} y_1 y_2 \, .$$

Ekkor (4)-ből az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\alpha < \frac{S - z_1 z_2}{s} \leq \frac{S}{s} \, , \tag{5}$$

mivel $\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$.

Nézzük most azt az esetet, amikor $\mathbf{b}(\alpha) \notin K$. Ez akkor fordulhat elő, ha

$$C := r_1(p_2 - q_2) + r_2(p_1 - q_1) \neq 0 \, .$$

(Ha $C = 0$, akkor azt már láttuk, hogy ha (3) nem áll fenn, akkor a NAM a $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ szakasz egyik végpontjába esik, ezek pedig definíció szerint benne vannak a K halmazban.)

Legyen $A = 2(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)$, $B = (p_1 - q_1)q_2 + (p_2 - q_2)q_1$. Ekkor az (1) egyenlőség így néz ki:

$$A\lambda + B + C\alpha = 0 \, .$$

Ebből

$$\alpha = \frac{-A\lambda - B}{C} \, .$$

Mivel azt már láttuk, hogy $A < 0$ és $0 < \lambda < 1$, ezért

$$\alpha = \frac{-A\lambda - B}{C} < \frac{-A + |B|}{|C|} \, .$$

Ezt (5)-tel összevetve azt kapjuk, hogy ha a NAM és az LNAM különböznek, akkor abban az esetben, ha $C \neq 0$, és $\mathbf{b}(\alpha) \in [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$, akkor

$$\alpha < \max \left\{ \frac{S}{s}, \frac{-A + |B|}{|C|} \right\} \, ,$$

ha pedig $C = 0$, akkor

$$\alpha < \frac{S}{s} \, .$$

Ha tehát

$$\frac{-A^* + |B^*|}{|C^*|}$$

a $\frac{-A+|B|}{|C|}$ értékek maximuma az F Pareto-optimális szakaszain ($C \neq 0$), és

$$\alpha_0 = \begin{cases} \max\left\{\frac{S}{s}, \frac{-A^*+|B^*|}{|C^*|}\right\}, & C \neq 0 \\ \frac{S}{s}, & C = 0 \end{cases}$$

akkor $\alpha > \alpha_0$ esetben a NAM egybeesik az LNAM-mal.

Láthattuk, hogy α_0 kiszámításához csak eredeti adatok, F csúcspontjai, valamint az $\mathbf{r}$ egyet nem értési irány szükségesek. Ha a problémát egy bimátrix játékból származtatjuk, akkor az F csúcspontjai kifizetéspárosokból kerülnek ki és eleve rendelkezésre állnak.

1. Példa. Tekintsük a közismert *Gyáva nyúl* bimátrix játéknak azt a változatát, amelyben a játékosok aszimmetriája abban nyilvánul meg, hogy az egyet nem értés az egyiknek ötször jobban „fáj”, mint a másiknak. Az A és B játékos kifizetőmátrixa a „kitér, nem tér ki” tiszta stratégiapárosokra az alábbi:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

A kimenetelek síkján három Pareto-optimális pont van:

$$\mathbf{p} = (1,7),\ \mathbf{q} = (6,6),\ \mathbf{t} = (7,1)$$

és két Pareto-optimális szakasz: $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ és $[\mathbf{q},\mathbf{t}]$. Tegyük fel, hogy az egyet nem értési irány: $\mathbf{r} = (5,1)$. Ekkor a Pareto-optimális csúcspontokban az $r_1x_2 + r_2x_1$ függvény értéke rendre $36, 36$ és 12. Sem a $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ sem a $[\mathbf{q},\mathbf{t}]$ szakaszon nincs kritikus pont. A $[\mathbf{p},\mathbf{q}]$ szakasz esetében $C = 0$, így csak az S és s értékeket kell kiszámolni. Ezek az értékek rendre: $S = 36$, $s = 24$, amelyből az $\alpha_0 = 1.5$ értéket kapjuk. A $[\mathbf{q},\mathbf{t}]$ szakasz esetében $C = 24$, $A = -10$, $B = 34$, amiből $\frac{-A+|B|}{|C|} = 1.83$. Így az α_0-ra a $\max\{1.5, 1.83\} = 1.83$ értéket kapjuk. Ez elég jó becslés, mert a legkisebb α_0, amely mellett a NAM és LNAM egybeesik, 0.

2. Példa. A többkritériumú döntési problémát (TKDP) el lehet helyezni játékelméleti környezetben is (lásd Forgó (1983), Forgó és Szidarovszky (2003). Ekkor az egyes kritériumokhoz rendeljük a játékosokat, akik választanak egyet az alternatívák közül. Kifizetés csak akkor van, ha mindenki ugyanazt az alternatívát választotta, ellenkező esetben a kifizetés tart a $-\infty$-hez, egy adott egyet nem értési irány mentén. Mint azt Forgó és Szidarovszky (2003) bebizonyította, a többkritériumú döntési probléma, amennyiben az egyes kritériumokat pozitív súlyokkal látjuk el és lineáris súlyozás alapján választjuk ki a legjobb alternatívát, ekvivalens a hozzárendelt játék LNAM-jának meghatározásával, ahol az egyet nem értési irány komponensei az egyes súlyok reciprokai. Ha a lineáris súlyozás alapján több alternatíva között holtverseny alakul ki, akkor közülük a Q feladat megoldásával választjuk ki a TKDP megoldását. Nagyon sok esetben az egyes kritériumokat egyének és/vagy szervezetek testesítik meg, akiknek az alkuja révén alakul ki a kompromisszumos megoldás. Természetes módon adódik, miután a súlyokból kiszámoltuk az egyet nem értési irányt, hogy kiszámítsunk az előbbiek szerint egy felső korlátot arra a küszöbértékre, amelyen felül az így kapott egyet nem értési pontot használva a nem-kooperatív Nash alkumodellek egyensúlypontként állítják elő a TKDP egyszerű súlyozással kiválasztott „megoldását". Mi most is természetesen csak a kétszemélyes (két kritériumú) esettel foglalkozunk.

Nézzünk egy egyszerű esetet, ahol az egyes alternatívákat az alábbi vektorok jellemzik:

$$\mathbf{a} = (2,3),\ \mathbf{b} = (1,6),\ \mathbf{c} = (3,2)$$

A kritériumokhoz a $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ súlyvektort rendeljük, amely azt jelenti, hogy a játékelméleti modellben az egyet nem értési irány $\mathbf{r} = (2,3)$, az F halmaz csúcspontjai pedig $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Ezekből $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ Pareto-optimális pontok, a $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ szakasz pedig az egyetlen Pareto-optimális szakasz. Az LNAM a $\mathbf{z} = b$ pont. Most $C = 2 \neq 0$, $A = -16$, $B = 8$, $S = 6$, $s = 8$ és így $\alpha_0 = \frac{-A+|B|}{|C|} = 12$. A legkisebb α_0, amely mellett a NAM és LNAM egybeesik, 4.

3 Sima Pareto-határ

Ha a lehetséges kimenetelek halmaza nem poliedrikus, akkor nem feltétlenül van olyan α_0 , hogy minden $\alpha > \alpha_0$-ra a NAM és az LNAM egybeesik. Az alábbi alkuprobléma egy példa erre az esetre.

3. Példa. Legyen az $F = \{(x,y) \in I\!R^2_+ : x^2 + y^2 \leq 1\}$ a lehetséges kimenetelek halmaza, az $\mathbf{r} = (1,3)$ pedig az egyet nem értési irány. Az LNAM a $3x + y$ lineáris függvény maximumpontja, ami a $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ pont. Rögzített $\alpha > 0$ egyet nem értési büntetés mérték mellett a NAM az

$$(x+\alpha)(y+3\alpha) \to \max$$
$$(x,y) \in F$$

feladat megoldása. Mivel a NAM az $x^2 + y^2 = 1$ által meghatározott Pareto-határon van, a fenti feladat ekvivalens az

$$(x+\alpha)(y+3\alpha) \to \max$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

Lagrange-feladattal. Könnyű belátni, hogy a $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$ pont semmilyen λ Lagrange-multiplikátor érték mellett sem elégíti ki az

$$y + 3\alpha - 2\lambda x = 0$$
$$x + \alpha - 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

elsőrendű feltételeket egyetlen $\alpha \geq 0$ mellett sem.

Mint ebből a példából látszik, az LNAM implementálásához vagy a NAM implementálásait kell módosítani, vagy esetleg teljesen újakat konstruálni abban az esetben, amikor nincs olyan α_0, hogy minden $\alpha > \alpha_0$-ra a NAM és az LNAM egybeesik.

Mi a következőkben Rubinstein *váltakozó ajánlattételes* (VA) modelljét, Rubinstein (1982), használjuk fel kiindulópontnak az LNAM implementálására az alkuproblémák egy speciális osztályának esetében.

Legyen $C(\alpha) = (F, -\alpha\mathbf{r})$ egy kétszemélyes alkuprobléma, ahol $\mathbf{r} > \mathbf{0}$ az egyet nem értési irány, $\alpha > 0$ az egyet nem értés büntetésének mértéke, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y \leq g(x)\}$ a lehetséges kimenetelek halmaza. Feltesszük, hogy $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő, folytonosan differenciálható, szigorúan konkáv függvény. Az így definiált alkuprobléma osztályt (α minden lehetséges értékére) nevezzük röviden C alkuproblémának.

Az F halmaz így konvex, kompakt, és az $y = g(x)$ által meghatározott Pareto-határa „sima". Legyen $a = g^{-1}(0)$, $b = g(0)$ (g^{-1} létezik g monotonitása miatt). Az F-et így az alábbi egyenlőtlenség rendszer lehetséges megoldásaiként is lehet definiálni:

$$\begin{aligned} 0 \leq x &\leq a \\ 0 \leq y &\leq b \\ y &\leq g(x) . \end{aligned} \tag{6}$$

$C(\alpha)$-nak minden α-ra létezik NAM-ja, amelyet az $(x + \alpha r_1)(y + \alpha r_2)$ Nash szorzat egyértelmű maximumpontjaként kapunk. Ezeknek a határértéke, ha $\alpha \to \infty$ az LNAM, amelyet viszont az $r_2 x + r_1 y$ lineáris függvény szintén egyértelmű maximumpontjaként nyerhetünk. Az egyértelműséget a g függvény szigorú konkávitása biztosítja. Mivel mind a NAM, mind az LNAM a Pareto határon van, ezért (6)-ban az $y = g(x)$-szel lehet az $y \leq g(x)$ egyenlőtlenséget helyettesíteni, és így mind a NAM, mind az LNAM meghatározásakor a $[0, a]$ zárt intervallumon egy egyváltozós függvényt kell maximalizálni. Adott α-ra a NAM-ot az

$$\begin{gathered} f(x) = (x + \alpha r_1)(g(x) + \alpha r_2) \to \max \\ 0 \leq x \leq a \end{gathered} \tag{7}$$

feladat megoldásával kapjuk. A célfüggvény első deriváltja:

$$f'(x) = g(x) + x g'(x) + \alpha(r_1 g'(x) + r_2)$$

$$f'(0) = g(0) + \alpha(r_1 g'(0) + r_2) .$$

Ha $g'(0) < -\frac{r_2}{r_1}$ és $\alpha > \alpha_0 = -\frac{g'(0)}{r_1 g'(0) + r_2}$, akkor $f'(0) < 0$, és így a (7) feladat megoldása $x = 0$, $y = g(0)$, ami egyúttal az LNAM is.

Vegyük most a célfüggvény deriváltját az $x = a$ pontban

$$f'(a) = g(a) + a g'(a) + \alpha(r_1 g'(a) + r_2) = a g'(a) + \alpha(r_1 g'(a) + r_2) .$$

Ha $f'(a) > 0$, akkor $x = a$ a (7) feladat optimális megoldása. Ez tetszőlegesen nagy α-ra akkor és csak akkor állhat fenn, ha $r_1 g'(a) + r_2 > 0$. Ekkor, ha

$$\alpha > \alpha_0 = \frac{-ag'(a)}{r_1 g'(a) + r_2} ,$$

akkor a NAM és az LNAM egybeesnek. Ezt az eredményt tétel formájában is megfogalmazzuk.

4. Tétel. *Ha a C alkuprobléma osztályra fennáll, hogy vagy $g'(0) < -\frac{r_2}{r_1}$, vagy pedig $g'(a) > -\frac{r_2}{r_1}$, akkor van olyan véges α_0, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ esetében az LNAM egybeesik a NAM-al.*

Következmény. Ha a 4. Tétel feltételei fennállnak, akkor minden olyan implementáció, amely előállítja a NAM-ot, kellően nagy egyet nem értési ,,büntetés" mellett az LNAM-ot is előállítja.

A továbbiakban tehát csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a C-be tartozó alkuproblémák LNAM-ja a Pareto-felület (relatív) belső pontja. Ekkor az LNAM az

$$\begin{gathered} r_2 x + r_1 y \to \max \\ y = g(x) \end{gathered}$$

Lagrange-feladat megoldása. Ha $(x^*,\ y^*)$ az LNAM, akkor az elsőrendű feltételből a következő egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= -\frac{r_2}{r_1} \\ y^* &= g(x^*)\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása egyértelmű (mivel g' monoton csökkenő), és az pontosan x^*.

A VA modell diszkrét idővel dolgozik: $t = 1, 2, \ldots$. *Ajánlatnak* nevezzük az F egy pontját. A játékosok felváltva tesznek ajánlatokat, minden páratlan időpontban az első játékos, minden páros időpontban a második. Ha az egyik játékos ajánlatát a másik elfogadja, akkor ez lesz a kifizetés, és a játéknak vége. Ha nem, akkor $\delta > 0$ valószínűséggel az alkufolyamat megszakad, a játéknak vége, a játékosok rendre a $-\alpha r_1$ és $-\alpha r_2$,,büntető" kifizetéseket kapják. Az alkufolyamat $1-\delta$ valószínűséggel folytatódik, és újabb ajánlatot tesz valaki, aki éppen soron van.

Ebben a játékban egy stratégia az a terv (függvény), amely bármely időpontban egy ajánlatot rendel a korábbi ajánlatok alkotta bármely lehetséges történethez. A NEP-et és a részjáték tökéletes NEP-et ebben a játékban a szokásos módon definiáljuk. Azt a speciális stratégiát, amelyben az ajánlattételek nem függnek (konstansok) a korábbi történettől, *stacioner stratégiának* nevezzük.

Rubinstein alapvető tétele a következő, amelyet rögzített egyet nem értési pont (α rögzített) esetére bizonyított.

5. Tétel (Rubinstein (1982), Osborne és Rubinstein (1994)). *A VA játéknak egyetlen részjáték tökéletes NEP-je van, amely stacioner stratégiákból áll.*

Így a játék lefolyása, ha a játékosok az egyetlen (x^*, y^*) stacioner stratégiát játsszák, igen rövid. Az első játékos a $t = 1$ időpontban megteszi az (x^*, y^*) ajánlatát, amit a második játékos elfogad, megtörténnek a kifizetések és a játék véget ér. Jegyezzük meg, hogy (x^*, y^*) függ a δ valószínűségtől.

Számunkra fontos még a következő tétel is.

6. Tétel (Rubinstein (1982), Osborne és Rubinstein (1994)). *Ha $\delta > 0$, akkor a VA játék egyetlen stacioner stratégiájában a kifizetések tartanak a NAM-hoz, ha $\delta \to 0$.*

A VA játék tehát a NAM aszimptotikus implementációja és így ha δ-t elég kicsinek választjuk, akkor tetszőlegesen közel kerülhetünk a NAM-hoz.

Mi a helyzet az LNAM-al? Ha olyan aszimptotikus implementációt szeretnénk, amely a 6. Tételen nyugszik, akkor az α és δ paraméterek értékét egyszerre kellene a végtelenhez illetve a nullához tartatni, és még a két konvergencia egymáshoz való viszonyával is törődni kell. Ezt úgy csináljuk meg, hogy veszünk egy $0 < \beta < 1$ paramétert, és definiálunk egy olyan VA játékot, amelyben a büntetés mértéke $\alpha = \frac{1}{\beta}$, a tárgyalások megszakadásának valószínűsége pedig $\delta = \beta^2$. Az ezekkel a paraméterekkel definiált VA játékot jelöljük VA(β)-val.

7. Tétel. *Bármely $\lambda > 0$ számhoz van olyan β_0, hogy minden $0 < \beta < \beta_0$ esetén a VA(β) játék egyetlen részjáték tökéletes NEP-jének kifizetésvektora λ-nál kisebb távolságra van az LNAM-tól.*

Bizonyítás. Rögzített β esetén az 5. Tétel értelmében a VA(β) játéknak van egyértelműen meghatározott részjáték tökéletes NEP-je. Könnyű belátni (lásd például Forgó et al. (1999), hogy ennek az egyensúlypontnak olyan stacioner stratégiákból kell állni, hogy bármelyik játékos számára közömbös legyen, hogy a másik ajánlatát elfogadja-e vagy visszautasítja-e.

Ha tehát (x^1, y^1) az első játékos ajánlata, akkor a második játékos (x^2, y^2) ajánlatára fenn kell állni az alábbi egyenlőségeknek:

$$\begin{aligned} y^1 &= g(x^1) \\ y^2 &= g(x^2) \\ x^2 &= \delta(-\alpha r_1) + (1-\delta)x^1 \\ y^1 &= \delta(-\alpha r_2) + (1-\delta)y^2 \ . \end{aligned}$$

Egyensúlyban $x^1 = x^2$, $y^1 = y^2$. Az indexeket elhagyva azt kapjuk, hogy $(x, y) \in F$ akkor és csak akkor egyensúlyi ajánlat, ha x kielégíti a

$$g(x) + \delta\alpha r_2 - (1-\delta)g(-\delta\alpha r_1 + (1-\delta)x) = 0$$

egyenletet. Ha rögzítjük az x^* egyensúlyi ajánlatot, és $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\delta = \beta^2$, akkor $\beta > 0$-ra a következő egyenletet kapjuk:

$$f(\beta) = g(x^*) + \beta r_2 - (1-\beta^2)g(-\beta r_1 + (1-\beta^2)x^*) = 0 \ .$$

Mindkét oldal β szerinti deriváltját véve kapjuk a

$$f'(\beta) = r_2 + 2\beta g(-\beta r_1 + (1-\beta^2)x^*) + (1-\beta^2)g'(-\beta r_1 + (1-\beta^2)x^*) = 0$$

egyenletet, ami szintén minden $\beta > 0$ esetén fennáll. Rögzített β-ra a fenti egyenletnek egyetlen $x(\beta)$ megoldása van (lásd Forgó et al. (1999), 310. oldal). Minden $\beta > 0$-ra $x(\beta) \in F$, és mivel F kompakt, g' folytonos, így minden $\{\beta_i\}$ nullsorozatra $\{x(\beta_i)\}$ minden torlódási pontja kielégíti az

$$f'(0) = r_2 + r_1 g'(x) = 0$$

egyenletet. A g' függvény monoton csökkenő, ezért a

$$g'(x) = -\frac{r_2}{r_1}$$

egyenletnek egyetlen megoldása van, ami (8) miatt megegyezik az x^*-gal, ami pontosan az első játékos kifizetése az LNAM-ban.

A 7. Tétel állítását úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a VA játék aszimptotikus implementációja az LNAM-nak, az adott feltételek mellett.

4 Összefoglalás

Megmutattuk, hogy kétszemélyes játékok esetében az LNAM megoldást aszimptotikusan elő lehet állítani a Rubinstein-féle VA játék részjáték tökéletes NEP-jeként mind sima, mind szakaszonként lineáris (a lehetséges kimenetelek halmaza politóp) Pareto-határ esetében. Politóp lehetséges kimenetelek halmaza és bizonyos nem-politóp esetben az alkuprobléma primer adataiból becsülve tudunk olyan α_0 számot megadni, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ esetén az LNAM megoldás egybeesik az α büntetés-mértékű Nash-féle alkuprobléma megoldásával. Ezekben az esetekben minden olyan implementáció, amely előállítja a NAM-ot, egyúttal az LNAM-ot is előállítja, ha az α „büntető" paraméter elég nagy.

Az eredmények kétszemélyes alkuproblémákra vonatkoznak. A kiterjesztés n-személyes alkuproblémákra nem triviális, és további kutatást igényel.

Irodalom

1. Binmore, K., Osborne, M. J. és Rubinstein, A. (1992): Noncooperative models of bargaining, in Aumann, R. J. and Hart, S. (ed): *Handbook of Game Theory*, Vol 1. North-Holland, Amsterdam, 179–225.
2. Dasgupta, A., Chiu, Y. S. (1998), On implementation via demand commitment games, *International Journal of Game Theory*, 27, 161–189.
3. Forgó, F. (1983): A game theoretic approach for multicriteria decision making, in Wierzbicky, J. (ed): *Interactive Decisions* in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 229. Springer Verlag, Berlin, 1–15.
4. Forgó, F., Szép, J., Szidarovszky, F. (1999): *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods, Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London
5. Forgó, F., Szidarovszky, F. (2003): On the relation between the Nash bargaining solution and the weighting method, *European Journal of Operations Research*, 147, 108–116.

6. Kaneko, M. (1992): The ordered field property and a finite algorithm for the Nash bargaining solution, *International Journal of Game Theory*, 20, 227–236.
7. Howard, J. V. (1992): A social choice rule and its implementation in perfect equilibrium, *Journal of Economic Theory*, 56, 142–159.
8. Moulin, H. (1984): Implementing the Kalai-Smorodinsky bargaining solution, *Journal of Economic Theory*, 33, 32–45.
9. Nash, J. F. Jr. (1950): The bargaining problem, *Econometrica*, 18, 155–162.
10. Nash, J. F. Jr. (1953): Two-person cooperative games, *Econometrica*, 21, 128–140.
11. Osborne, M. J., Rubinstein, A. (1994): *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts
12. Peleg, B. (1997): A difficulty with Nash's program: A proof of a special case, *Economics Letters*, 55, 305–308.
13. Rubinstein, A. (1982): Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, 50, 97–109.
14. Serrano, R. (2005): Fifty years of the Nash program, 1953-2003, *Investigaciones Económicas*, XXIX (2), 219–258.

ON IMPLEMENTING THE L-NASH SOLUTION IN TWO-PERSON BARGAINING GAMES

According to the ,,Nash program" every axiomatically determined cooperative solution to a game should also be obtained as a noncooperative Nash outcome of a reasonable noncooperative bargaining game. The L-Nash solution defined by Forgó (1983) can be characterized as the limiting point of the Nash bargaining solution when the disagreement point goes to negative infinity in a fixed direction. In Forgó and Szidarovszky (2003), the L-Nash solution was related to the solution of multiciteria decision making problems and two different axiomatizations of the L-Nash solution were also given in this context. In this paper, finite bounds are established for certain special two-person bargaining problems, making it possible to apply all the implementation models designed for the Nash bargaining problem to obtain the L-Nash solution as well. For another set of problems where this method does not work, a version of Rubinstein's alternative offer game is shown to asymptotically implement the L-Nash solution.