OSZTOZKODÁSI JÁTÉKOK[1]

TASNÁDI ATTILA
Budapesti Corvinus Egyetem

Egy osztozkodási játékban a szereplők egy jószágból már rendelkezésre álló mennyiséget osztanak el egymás között, meghatározott szabályok szerint. Érdekes feladat olyan osztozkodási játékok konstruálása, amelyek egy a szereplők számára bizonyos igazságossági kritériumoknak eleget tevő elosztást biztosítanak.

Kétszereplős osztozkodási problémára egy megoldás a közismert ,,az egyik felez, a másik választ" eljárás, amely szerint az egyik szereplő saját értékítélete szerint két egyenlő részre osztja az elosztandó mennyiséget, majd a másik szereplő választhat egyet a két rész közül. Már Hésiodos (kb. i.e. VII. évszázad) ,,Theogonia" eposzában Prométheusz és Zeusz az egyik felez másik választ eljárással osztozkodtak a közösen elfogyasztandó húson. Steinhaus [16] általánosította az eljárást három szereplőre és tanítványai, Banach és Knaster, pedig tetszőleges n-re. Az általuk adott eljárások egy úgynevezett arányos eredményt garantálnak, ami alatt az értendő, hogy bármely szereplő a többi szereplő cselekedeteitől függetlenül képes az arányos részesedését biztosítania. Egy osztozkodási játék megoldásával szembeni erősebb igazságossági elvárás az irigységmentesség, amely követelmény szerint saját értékítélete alapján mindenki úgy érzi, hogy ő járt a legjobban. Ebben a dolgozatban áttekintjük az arányos és az irigységmentes osztozkodási eljárásokat, továbbá ismertetünk néhány érdekes nyitott kérdést.

1 Osztozkodási játék

Kezdjük az általunk vizsgálandó *osztozkodási problémával.* Jelölje a továbbiakban N az osztozkodásban résztvevő szereplők véges halmazát, - az egész elosztandó tárgyat (a továbbiakban *tortát*), $\mathcal{A}$ a lehetséges tortaszeletek halmazát (egy - fölötti algebra), $\mu_i : \mathcal{A} \to [0,1]$ az $i \in N$ személy tortaszelet értékelő függvényét (egy $\mathcal{A}$ fölötti normált végesen additív mérték). A továbbiakban csak folytonos osztozkodási problémákkal foglalkozunk: minden $i \in N$ szereplő esetén minden $A \in \mathcal{A}$ szeletnek van bármely $\lambda \in [0,1]$ arányú $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$ és $\mu_i(B) = \lambda\mu_i(A)$ részszelete. Feltesszük még, hogy a szereplők csak saját értékelő függvényeiket ismerik.

Egy *osztozkodási eljárás* a szereplőket meghatározott szabályok szerint felszólíthatja vágások végrehajtására és tortaszeletek kiértékelésére. Az előbbi

[1]Beérkezett: 2006. október 10. A szerző kifejezi köszönetét egy anonim bíráló hasznos megjegyzéseiért. A kutatás a Bolyai János Kutatási ösztöndíj támogatásával készült. E-mail: `attila.tasnadi@uni-corvinus.hu`. URL: `www.uni-corvinus.hu/~tasnadi`.

egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz megadását jelenti, míg az utóbbi a megkérdezett i szereplő $\mu_i(A)$ értékelésének megismerésére irányul. Az elvégzett vágások, illetve válaszok függvényében az eljárás újabb vágások és értékelések elvégzésére szólítja fel a szereplőket, amíg még van elosztandó tortaszelet. Egy eljárás véges, ha az említett lépések véges sokszor történő végrehajtása után felosztja a tortát tetszőleges osztozkodási probléma esetén. Egy osztozkodási eljárás segítségével meghatározható a torta egy $(A_i)_{i \in N}$ (ahol $A_i \in \mathcal{A}$) *felosztása*, amely az - torta egy partíciója. Adott osztozkodási probléma mellett egy adott osztozkodási eljárás egy olyan játékot határoz meg, amelyben a szereplők (játékosok) akciói a vágások és az értékelések, és amelynek kimenetele a torta egy partíciója a vele járó értékelésekkel.

Az osztozkodási eljárásokat számos kritérium segítségével jellemezhetjük. Mivel egy alkalmazott eljárás számára ismeretlenek az egyes szereplők tortaszelet értékelő függvényei, ezért elvárjuk, hogy az eljárások *igazmondásra ösztönözzenek*, azaz egy tortaszelet kiértékelése esetén a szereplők valódi értékítéleteiket adják meg, továbbá egy adott $\alpha \in (0,1)$ méretű vágás megkövetelése esetén a felszólított szereplő saját értékítélete szerint valóban egy α méretű szeletet vágjon le. Az igazmondásra ösztönzést azzal érheti el egy eljárás, hogy minden egyes szereplő ,,hazudozásával" csak önmagának árthat. Egy nagyon egyszerű igazmondásra ösztönző eljárás a ,,diktatórikus", azaz amelyik az egész tortát egy előre kiszemelt személynek adja. Mi a ,,diktatórikus" eljárással szemben valamilyen igazságossági kritériumnak is eleget tevő eljárásokat keresünk. A legegyszerűbb igazságossági kritérium az *arányosság* kritériuma, amely megköveteli, hogy minden egyes szereplő megfelelő döntések esetén garantálni tudja önmaga számára (a többi szereplő cselekedeteitől függetlenül) saját értékítélete szerint a torta arányos részét (n szereplő esetén egy $1/n$-ed értékű részt). Ennél erősebb igazságossági kritérium az *irigységmentesség* kritériuma, amely azt követeli meg, hogy minden egyes szereplő saját értékítélete szerint a torta egyik legértékesebb részét kapja ($\forall i, j \in N : \mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j)$, ahol $(A_i)_{i \in N}$ a torta egy felosztása).

2 Arányos osztozkodási eljárások

Ebben a szakaszban három arányos és véges osztozkodási eljárást; továbbá egy arányos, de nem véges eljárást ismertetünk.

2.1 Fink eljárása

Talán Fink eljárása [11] áll szellemében a legközelebb ,,az egyik felez, a másik választ" kétszemélyes eljáráshoz. Két személy esetén ,,az egyik felez, a másik választ" eljárás alkalmazandó. Három személy esetén kérjük meg az A személyt a torta felezésére, majd B-t a két szelet közül a nagyobbik kiválasztására. Ezek után kérjük meg külön-külön A-t és B-t a saját szeletük felharmadolására. Végül C mindkét részből választhat egy-egy harmadot. Ekkor C mint utolsó választó garantálhatja magának (saját értékítélete szerint)[2] a torta 1/3-át. Ha A és B a saját felét valóban harmadolta, akkor a torta felének kétharmada garantált számukra, ehhez persze az is kell, hogy az elején A valóban felezzen, majd B a nem kisebbik felet válassza. Tehát az eljárás igazmondásra ösztönöz, arányos és véges.

Az eljárást az n szereplős esetre rekurzívan definiáljuk. Tegyük fel, hogy $n-1$ szereplő már arányosan elosztotta a tortát az $n-1$ személyes Fink-eljárással. Kérjük most az $n-1$ személyt arra, hogy az általuk legalább $1/(n-1)$-re értékelt részüket n egyenlő részre osszák. Ezek után válasszon az n-edik személy minden egyes személy részéből egy szeletet. Mint utolsó választó számára garantált az arányos része; továbbá, ha az első $n-1$ személy valóban n egyenlő részre vágta az addigi saját részét, akkor garantált számára a torta $\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$ része.

Fink eljárásának előnye, mint ez a rekurzív definícióból látható, hogy egy az osztozkodáshoz később csatlakozó személy nem okoz problémát az eljárás számára. Megjegyzendő még, hogy Fink eljárása $n!-1$ vágást igényel, ha a már jelenlevő személyek minden egyes szeletüket i egyenlő részre osztják az i-edik személy ($i=2,\ldots n$) ,,érkezésekor”. Egy hasonló nagyságrendű vágást igénylő egyszerű arányos eljárást illetően lásd [17]. Fink eljárásának vágásigénye csökkenthető azzal, hogy az i-edik személy megjelenésekor a már jelenlevő $i-1$ személy (külön-külön) az addigi részesedését osztja i egyenlő részre. Ekkor $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ vágás szükséges.

2.2 Banach és Knaster eljárása

Az első n személyes arányos osztozkodási eljárást Banach és Knaster (lásd Steinhaus [16]) adta. Az $n=2$ esetre az eljárás az egyik felez és a másik választ eljárást használja. Ha $n>2$, akkor első lépésként 1 levág egy szeletet a tortából, majd tovább adja a levágott szeletet 2-nek. 2 megnézi a szeletet, és ha úgy gondolja, a szeletet egy vágással kiigazíthatja. Döntésétől függően az eredeti kiigazítatlan vagy a kiigazított szeletet adja tovább 3-nak. Az eljárás így ismétlődik, amíg egy szelet n-hez nem ér. Ekkor n eldöntheti, hogy elfogadja-e a szeletet vagy elutasítja. Ha n elfogadja, akkor n távozik a szelettel és $1,\ldots,n-1$ osztozkodnak az összes megmaradt részen. Ha n elutasítja a szeletet, akkor a szeletet annak kell elvinnie, aki legutoljára vágott. A legutolsó vágó távozik, míg a többi $n-1$ személy osztozkodik a megmaradt összes tortaszeleten.

Még azt kell meggondolnunk, hogy Banach és Knaster eljárása valóban mindenkinek garantálja az arányos részét. Az $n=2$ esetben ez nyilván igaz. Tegyük fel, hogy Banach és Knaster eljárása $n-1$ személy esetén mindenki számára biztosítja a tortából az arányos részesedést. Az n személyes esetet vizsgálva kezdőlépésként 1-nek saját értékítélete alapján legalább a torta n-ed részét kell levágnia, mivel ha $1/n$-nél kisebb részt vág, megkockáztatja, hogy az $1/n$-nél kisebb szeletet neki kelljen elvinnie, hiszen az utolsó vágó szerepébe kerülhet. Ha pedig 1 egy $1/n$-nél nagyobb részt vág le, akkor előfordulhat,

[2] A továbbiakban nem írjuk ki, hogy egy adott hányadot mindig az adott személy értékítélete szerint értjük.

hogy az utolsó vágó vagy n egy, az 1 értékítélete szerint $1/n$-nél nagyobb szeletet visz el. Ekkor viszont 1 egy olyan $n-1$ személyes osztozkodásban fog részt venni, amelyben számára már csak a torta $\frac{1}{n-1}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ részénél kisebb hányada biztosított. Az 1-re vonatkozó érvelést ismételve a többi szereplőnek is le kell vágnia a hozzá kerülő darabból a saját értékítélete szerinti $1/n$ értékű szeletet, ha az szerinte $1/n$-nél többet ér. Az első kör után egy személy eltávozik legalább $1/n$-nel, és visszamarad egy, a többiek által külön-külön legalább $(n-1)/n$-re értékelt rész, amelyet már egy $n-1$ személyes eljárással osztanak el egymás között.

Banach és Knaster eljárása első körében legfeljebb $n-1$-en vágnak. Ezek után a második körben már csak $n-1$-en osztozkodnak a megmaradt részen, ami a legrosszabb esetben $n-2$ vágáshoz vezethet. Most már csak $n-2$-en vesznek részt a megmaradt részek elosztásában. Ezt a gondolatmenetet folytatva adódik, hogy legfeljebb $(n-1)n/2$ vágás szükséges, ami nyilván kedvezőbb Fink módszerénél.

2.3 Even és Paz eljárása

Az ismert véges osztozkodási eljárások közül a nagyságrendileg legkevesebb vágást igénylő eljárást Even és Paz [10] adta meg, amely az oszd meg és uralkodj elven alapul. Az $n = 2$ esetben ,,az egyik felez és a másik választ" eljárást alkalmazza, míg az $n = 3$ esetre Banach és Knaster eljárását.

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy a tortát csak párhuzamos vágásokkal oszthatjuk föl. Képzeljünk mondjuk egy téglalap alakú tortát és térjünk rá a négyszemélyes esetre. Kérjünk fel három személyt arra, hogy párhuzamos vágásokkal külön-külön osszák fel két egyenlő részre. Nevezzük a medián vágónak[3] azt a személyt, aki a középső vágást végezte el. Kérjük meg a negyedik, mondjuk i, személyt arra, hogy jelölje meg a középső vágástól balra és jobbra lévő részek közül a számára értékesebbet. Ha i a bal oldali részt választja, akkor a bal oldali részen a medián vágótól balra vágó személlyel osztozkodik, míg a jobb oldali részen a fennmaradó két személy osztozkodik. Mindkét részen a két-két személy ,,az egyik felez és a másik választ" eljárással osztozkodik. Hasonlóan járhatunk el, ha i a jobboldali részt választja.

Ha mindenki igazmondó, akkor könnyen látható, hogy mind a négy személy számára biztosított a torta egynegyede. A negyedik személy nyilván igazmondó, azaz kijelöli a számára értékesebb oldalt. A három felező személy hamis felezőpont megadásával úgy kerülhet a medián vágó szerepébe, hogy ezek után egy a számára csak a torta felénél kevesebbet érő tortarészen kelljen majd osztozkodnia. Tehát egy ,,hazudozó" személy megkockáztatja az arányos részesedésének elvesztését.

Az ötszemélyes eset a négyszemélyes eljárás kisebb módosítását igényli. Most négy személyt arra kérünk fel, hogy balról jobbra nézve osszák fel a tortát párhuzamos vágásokkal 2 : 3 arányban. Nevezzük most medián vágónak azt a személyt, aki balról jobbra nézve a második vágást végezte el. Az ötödik, mondjuk i, személytől megkérdezzük, hogy a medián vágástól

[3] Ha a medián vágó személye nem egyértelmű, akkor válasszuk valamelyiküket.

balra lévő rész ér-e számára 2/5-öt. Ha igen, akkor a medián vágótól balra vágó személlyel osztozkodjanak a medián vágástól bal oldali részen; különben pedig a medián vágótól jobbra lévő részen osztozkodjon a medián vágótól jobbra vágó két személlyel. A fennmaradó részen a maradék három, illetve két személy osztozkodjon. A négyszemélyes esethez hasonlóan ellenőrizhető, hogy az eljárás igazmondásra ösztönöz és arányos.

A páros szereplős eset a négyszemélyes esethez hasonlóan megadható. Nevezetesen, egy szereplő kivételével mindenki felez, majd a nem felező szereplő kijelöli a medián vágás által elválasztott két rész közül az értékesebbiket. Ezek után két fele annyi szereplős osztozkodás végzendő el. A páratlan szereplős eset az ötszereplős esettel analóg. Ha $n = 2k + 1$, akkor $2k$ személy párhuzamos vágásokkal felosztja a tortát balról jobbra nézve $k : k+1$ arányban. A $2k + 1$-edik személy pedig eldönti, hogy a medián vágó által meghatározott két rész melyikének osztozkodásában kíván részt venni $k - 1$, illetve k személlyel.

Bizonyítható, hogy Even és Paz eljárásának a vágásigénye $n \log_2 n$ nagyságrendben növekszik. Sgall és Woeginger [14] igazolta, hogy az olyan arányos osztozkodási eljárások körében, amelyek az egyes szereplőknek egymás melletti intervallumokat juttatnak, nem található nagyságrendileg $n \log_2 n$-nél kevesebb vágást igénylő eljárás. *Nyitott kérdés* azonban, hogy ha a szereplők nem szomszédos szeleteket is kaphatnak, akkor konstruálható-e olyan véges arányos eljárás, amely nagyságrendileg kevesebb vágással is beéri.

2.4 Dubins és Spanier mozgó késes eljárása

Dubins és Spanier eljárása [9] az eddig ismertetett eljárásokkal ellentétben egy nem véges arányos elosztási eljárás, ugyanis a szereplőknek egy a torta fölött balról jobbra mozgó kés elhelyezkedésének bármely pillanatában ki kell értékelniük a késtől balra elhelyezkedő tortaszeletet.

Kezdetben helyezzünk el egy kést a torta bal szélén, amelyet elindítunk a torta jobb széle felé. A kést az osztozkodásban résztvevő n személy bármelyike megállíthatja, és ekkor a kés levágja a torta bal szélétől a pillanatnyi elhelyezkedéséig terjedő szeletet, amelyet a kést megállító személy köteles elvinni. A visszamaradó szeleten már csak $n - 1$ személy osztozkodik az eljárást ismételve, elindítva a kést a megmaradt szelet bal szélétől. Az eljárás addig ismétlődik, amíg már csak egy személy marad hátra.

Dubins és Spanier eljárása arra ösztönöz egy személyt, hogy pontosan akkor állítsa meg a kést, amikor eléri az arányos részesedését. Nyilván nem érdemes a kést az arányos részesedés előtt megállítani, hiszen ekkor az arányos részesedésnél kevesebb jut a kést leállító személynek. Ha az arányos részesedésénél tovább engedi egy személy a kést, akkor pedig megkockáztatja, hogy valaki más előtte megállítja a kést, és így egy $(n - 1)/n$-nél kisebb szeleten kénytelen osztozkodni $n - 1$ személlyel. Ezek után már könnyen látható, hogy az eljárás általában is arányos.

Dubins és Spanier eljárása nyilván csak $n - 1$ vágást igényel, ami kedvezőbb az Even és Paz eljárásánál említett $n \log_2 n$ nagyságrendnél. Ez a javulás azonban csak úgy érhető el, hogy a szereplők kontinuum sok kiértékelést végeznek.

3 Irigységmentes osztozkodási eljárások

Ebben a szakaszban egy véges három személyes irigységmentes eljárást és egy nem véges irigységmentes eljárást ismertetünk.

3.1 Selfridge és Conway eljárása

Selfridge és Conway [4] eljárása háromszemélyes osztozkodási problémákra szolgáltat egy irigységmentes felosztást.

Kérjük föl A-t arra, hogy harmadolja el a tortát. Jelöljük a három adódó I, J és K szeletet úgy, hogy $\mu_B(I) \geq \mu_B(J) \geq \mu_B(K)$, azaz B számára I a legértékesebb, J a második legértékesebb és K a harmadik legértékesebb szelet. Kérjük fel B-t arra, hogy igazítsa le I-t J-vel azonos értékűre. Jelölje L a leigazított szeletet és $M = I \setminus L$ a levágott darabot.[4] Válasszon most a három személy a J, K és L szeletek közül a C, B, A sorrendben, ahol ha C nem L-et választja, akkor B köteles L-et elvinnie.[5] Két esetet különböztetünk meg.

(a) Ha B vitte el L-et, akkor C-t megkérjük arra, hogy ossza fel M-et három egyenlő részre. Ezek után válasszon a három személy a három szelet közül a B, A, C sorrendben.

(b) Ha C vitte el L-et, akkor B-t kérjük meg arra, hogy harmadolja el M-et. Majd C, A és B válasszanak egymás után a három szelet közül.

Belátjuk, hogy a Selfridge–Conway-eljárás egy irigységmentes elosztást szolgáltat. Nézzük az (a) esetet. Az A a B-t nem irigyelheti, hiszen B az I-nek csak egy részét kapta. Az A a C-t sem irigyelheti, mivel az első körben C-vel azonos értékű szelethez jutott és a második körben C előtt választhat. B senkit sem irigyelhet, mivel az első körben az egyik legnagyobb szeletet vitte el és a második körben pedig elsőnek választhatott. C sem irigyelhet senkit, mert az első körben először választhat és a második kör három egyenlő szeleteinek egyikét kapta. A (b) eset hasonlóan igazolható. Továbbá nem nehéz belátni, hogy az eljárás igazmondásra ösztönöz.

Selfridge és Conway eljárása egy véges irigységmentes eljárás, amely nem terjeszthető ki több személyre. Ismertek ugyan többszemélyes irigységmentes véges eljárások is, ezek azonban *nem korlátosak* (lásd [4] és [13]), ami alatt az értendő, hogy rögzített számú szereplő esetén is konstruálhatók tetszőlegesen sok vágást igénylő osztozkodási problémák.

[4] $M = \emptyset$, ha B számára I és J azonos értékű.

[5] Az $M = \emptyset$ esetben már itt véget ér az eljárás.

3.2 Brams, Taylor és Zwicker eljárása

Brams, Taylor és Zwicker [5] eljárása egy négyszemélyes irigységmentes korlátos mozgó-késes eljárás, amely Austin [1] kétszemélyes mindkét fél számára pontosan 50%-ot juttató eljárására, valamint a Selfridge és Conway eljárásában rejlő gondolatokra épít.

Austin eljárásánál az egyik szereplő, mondjuk A, két párhuzamos kést mozgat folyamatosan balról jobbra úgy, hogy a két kés közötti terület számára mindig a torta felét érje. Induláskor a bal oldali kés a torta bal szélénél helyezkedik el, míg a jobb oldali kés A felezőpontja fölött.[6] Abban a pillanatban, amikor B megállítja a két kést, A elvégzi a kések által kijelölt helyeken a két vágást. Ezek után sorsolással (mondjuk érmedobással) eldöntendő, hogy melyik szereplő kapja a középső szeletet. Ekkor a másik szereplőnek megmarad a két szélső szelet. Ha B nem állítaná meg a késeket még mielőtt a jobb oldali kés elérné a torta jobb szélét, akkor A a bal oldali késsel elfelezi a tortát, majd érmedobással eldöntik a szeletek sorsát. Nyilván A-nak végig ügyelnie kell arra, hogy a két kés közötti szelet a torta felét érje számára. B-nek, akkor kell megállítania a késeket, amikor A-val egyezik az értékítélete. Kérdéses még, hogy van-e ilyen pillanat. Ha B értékítélete, a két fél tortát illetően, induláskor megegyezik A értékítéletével, akkor már is találtunk egy ilyen pillanatot. Különben B számára a két kés közötti szelet (i) értékesebb vagy (ii) értéktelenebb a másik szeletnél. Ha B elengedné a jobb oldali kést a torta jobb oldali végpontjáig, akkor a két kés közötti szelet (i) értéktelenebb vagy (ii) értékesebb lesz a másik szeletnél. Folytonossági megfontolásból létezik egy olyan közbülső pillanat, amikor B számára a két kés közötti szelet azonos értékű a két szélső szelettel.

Térjünk most rá Brams, Taylor és Zwicker eljárására. Először Austin eljárásának kétszeri alkalmazásával A és B elnegyedeli a tortát. A kapott X_1, X_2, X_3 és X_4 részekre ekkor $\mu_A(X_i) = \mu_B(X_j)$ minden $i, j = 1, 2, 3, 4$-re. Tegyük fel, hogy $\mu_C(X_1) \geq \mu_C(X_2) \geq \mu_C(X_3) \geq \mu_C(X_4)$. Ossza fel C az X_1 részt Y_1 és Y_2 részekre úgy, hogy $\mu_C(Y_1) = \mu_C(X_2)$. Válasszanak az Y_1, az X_2, az X_3 és az X_4 részek közül a D, C, B, A sorrendben, azzal a kikötéssel, hogy ha D nem Y_1-et választotta, akkor C köteles Y_1-et elvinni. Az első (választási) kör után senki sem irigyel senkit, mivel D az első választó, C általa ítélt két legnagyobb rész egyikét vitte el, és A, B számára maradt két $1/4$ értékű rész.

Nézzük azt az esetet, amikor D viszi el Y_1-et. Ossza ekkor B és C az Y_2 részt az Austin-féle eljárással négy egyenlő részre. A kapott Z_1, Z_2, Z_3 és Z_4 részekre tehát $Y_2 = \cup_{i=1}^4 Z_i$, $\mu_B(Z_i) = \mu_B(Y_2)/4$ és $\mu_C(Z_i) = \mu_C(Y_2)/4$ minden $i = 1, 2, 3, 4$-re. Ezek után a szereplők a D, A, C, B sorrendben választanak a Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 részek közül. Bármelyikük csak az előttük választót irigyelhetné, továbbá B és C senkit sem irigyel, mivel Y_2-t négy azonos értékű részre osztották. Végül A nem irigyli D-t, mert D egy legfeljebb X_1 értékű részhez juthat.

---

[6] Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nincsenek A és B számára nulla értékű tortaszeletek.

A másik eset, amikor C viszi el Y_1-et, hasonló. Ossza ekkor B és D az Y_2-t az Austin-féle eljárással négy egyenlő részre. A szereplők most a C, A, D, B sorrendben választanak. Bármelyikük csak az előttük választót irigyelhetné, továbbá B és D senkit sem irigyel, mivel Y_2-t négy azonos értékű részre osztották. Végül A nem irigyli C-t, mert C X_1-nek egy részszeletét kapja.

Megjegyzendő, hogy négynél több személyre csak $\varepsilon > 0$ közelítő vagy nem korlátos irigységmentes eljárások ismertek (lásd [4]-ben és [13]-ban).

4 Összefoglalás

Megismerkedtünk néhány arányos és irigységmentes osztozkodási eljárással. A tárgyalt eljárásokon kívül további eljárások találhatók [4]-ben és [13]-ban.

A dolgozatban három nyitott kérdést említettünk:

1. Található-e Even és Paz eljárásánál hatékonyabb véges osztozkodási eljárás?

2. Található-e négyszemélyes véges és korlátos irigységmentes eljárás?

3. Található-e ötszemélyes korlátos mozgó-késes irigységmentes eljárás?

A mozgó-késes eljárásokra vonatkozó frissebb eredményeket illetően lásd [3]. Az osztozkodási problémák esetén enyhíthető például a folytonos oszthatóság feltétele vagy az azonos mértékű követelések feltétele (lásd [4]-ben és [13]-ban). A tortaszelet értékelő függvények véges additivitásának gyengítésével (telítődés) foglalkozik [8] és [12]. Más igazságossági kritériumokat (pl. a legrosszabbul járó járjon a lehető legjobban) vizsgál [6], [7] és [15]. [18] igazolja, hogy nem található egyszerre Pareto hatékony és irigységmentes kétszemélyes eljárás. Hatékony, illetve irigységmentes elosztások létezésével foglalkozik [2].

Irodalom

1. Austin A. K., Sharing a Cake, *Mathematical Gazette*, 66 (1982) 212–215.
2. Barbanel J. B., Taylor A. D. *The Geometry of Efficient Fair Division* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 2005).
3. Barbanel J. B., Brams S. J., Cake division with minimal cuts: envy-free procedures for three persons, four persons, and beyond, *Mathematical Social Sciences*, 48 (2004) 251–269.
4. Brams S. J., Taylor A. D., *Fair Division: From Cake Cutting to Dispute Resolution* (Cambridge University Press, Cambridge UK, 1996).
5. Brams S. J., Taylor A. D., Zwicker W. S., A moving-knife solution to the four-person envy-free cake division problem, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125 (1997) 547–554.
6. Dall'Aglio, M., The Dubins-Spanier optimization problem in fair division theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 130 (2001) 17–40.

7. Dall'Aglio, M., Hill, T. P., Maximin share and minimax envy in fair-division problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 281 (2003) 346–361.
8. Dall'Aglio, M., Maccheroni, F., Fair division without additivity. *American Mathematical Monthly*, 112 (2005) 363–365.
9. Dubins L. E., Spanier E. H., How to Cut a Cake Fairly, *American Mathematical Monthly*, 68 (1961) 1–17.
10. Even S., Paz A., A Note on Cake Cutting, *Discrete Applied Mathematics*, 7 (1984) 285–296.
11. Fink A. M., A Note on the Fair Division Problem, *Mathematics Magazine*, 37 (1964) 341–342.
12. Maccheroni, F., Marinacci, M., How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations, *Social Choice and Welfare* 20 (2003) 457–465.
13. Robertson J., Webb W., *Cake-cutting algorithms: be fair if you can* (A K Peters, Ltd., Natick, 1998).
14. Sgall J., Woeginger G. J., A Lower Bound for Cake Cutting, *Lecture Notes in Computer Science*, 2832 (2003) 459–469.
15. Shishido H., Zeng D., Mark-Choose-Cut Algorithms For Fair And Strongly Fair Division, *Group Decision and Negotiation*, 8 (1999) 125–137.
16. Steinhaus H., The Problem of Fair Division, *Econometrica*, 16 (1948) 101-104.
17. Tasnádi A., A new proportional procedure for the n-person cake-cutting problem, *Economics Bulletin*, 4/33 (2003) 1–3.
18. Taylor A. D., A paradoxical Pareto frontier in the cake-cutting context, *Mathematical Social Sciences*, 50 (2005) 227–233.

GAMES OF FAIR DIVISION

In this survey we presented several proportional and envy-free cake-cutting algorithms. We also mentioned some interesting open problems.