A GIFFEN-HATÁS EGY MATEMATIKAI MODELLJE[1]

KOVÁCS GERGELY – VIZVÁRI BÉLA
Modern Üzleti Tudományok Főiskolája, Tatabánya – ELTE, Budapest

A dolgozatban azt vizsgáljuk, milyen elméleti közgazdasági modellben van lehetőség a Giffen-hatásra. A jelenség fellépésének kulcsa a fogyasztó hasznossági függvénye. Megmutatjuk, hogy az irodalomban leggyakrabban szereplő hasznossági függvények mellett a Giffen-hatás nem léphet fel, azonban adhatók olyan függvények, illetve olyan piaci modellek, amikor a Giffen-hatás elméletileg lehetséges. A jelenségben fontos szerepet játszik, hogy a fogyasztónak a túléléshez bizonyos mértékű árut el kell fogyasztania, ahogy ezt a jelenség első felfedezői, Gray és Giffen sejtették.

1 Bevezetés

A Giffen-hatás az a közgazdaságilag paradox helyzet, amikor egy inferior termék ára nő, és ennek ellenére a fogyasztása is nő. (Luxustermék esetén hasonló jelenség felléphet a divat hatására is.) Szabó [10] dolgozatában kimutatta, hogy 1995-ben Magyarországon a burgonya esetében Giffen-hatás fellépett. Ebben az évben a burgonya ára mind nominál-, mind reálértékben jelentősen megdöntötte a történelmi csúcsot, ugyanakkor a reáljövedelemben jelentős visszaesés következett be. Ez az észrevétel azért is érdekes, mert a Giffen-hatást emellett csak az alacsony jövedelmű rétegeknél figyelték meg, például Kínában a rizs és a tészta esetén [2].

A burgonya szerepe körül néha félreértés van az irodalomban. A [8] dolgozat alapján sokan úgy vélik, a burgonya Giffen-termék volta megcáfoltatott. Fontos hangsúlyozni, hogy [8] csak az írországi nagy éhínséggel foglalkozik, ami 1845-47-ben volt. Fő érve az ellen, hogy akkor a Giffen-hatás fellépett, hogy Írországban nem voltak piaci körülmények, azaz a hiány ellenére a piac nem reagált, és nem szállítottak be máshonnan burgonyát. Ennek fő oka, hogy a népességnek az a része, aki a hiánytól szenvedett, nem képzett fizetőképes keresletet, mert fő termékük éppen a burgonya volt. Tehát nem tudtak más terméket adni cserébe. [2] jól mutatja, hogy az, hogy mi inferior és/vagy Giffen-termék, az helytől és időtől függhet. Ezért [8] elemzése nem vonatkozhat az 1995-ös magyar helyzetre.

Mindezek alapján megfogalmazzuk, hogy mi mit értünk Giffen-hatáson: *Giffen-hatás akkor léphet fel, ha egy inferior termék ára piaci körülmények között nő, ugyanakkor a fogyasztása is nő.*

Úgy gondoljuk, hogy [8] és főként a rá hivatkozó irodalom hozzáállása a lakatosi értelemben tipikusan torzszülött kizáró. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a

[1] Beérkezett: 2006. október 9. E-mail: `kovacs.gergely@mutf.hu`, `vizvari@math.elte.hu`.

Giffen-hatás a hagyományos közgazdasági gondolkodás szempontjából "torzszülött", zavarja az összképet. A jelen dolgozat szerzői úgy gondolják, hogy Lakatos Imrének van igaza, aki lényegében azt fogalmazza meg, hogy mindent el kell fogadni, ami a definíciót kielégíti [4], a torzszülötteket nem szabad kizárni, így a piaci torzszülötteket sem.

Marshall monumentális művében [5] olyan megjegyzést tesz, miszerint a jelenség felfedezése Giffentől származik. Meg kell jegyezni, hogy már jóval korábban Gray [1] ugyancsak leírta a jelenséget. Mind Gray, mind Giffen azt a magyarázatot fűzték hozzá, hogy az inferior termék árának növekedése azt eredményezi, hogy a túléléshez szükséges inferior termék fogyasztása elvonja a szegény fogyasztó jövedelmét más termékektől és így a fogyasztó kénytelen azokat az inferior termékkel helyettesíteni. A Giffen-hatás a legutóbbi évek közgazdasági irodalmában is élénk érdeklődést váltott ki. Jó összefoglaló az utóbbi évek terméséből [7]. A már említett [2] szintén sok irodalmi hivatkozást tartalmaz.

2 A közgazdasági alapmodell

A mikroökonómia a fogyasztó magatartását hagyományosan a következő modellel írja le. A fogyasztást a költségvetési korlát befolyásolja, ami rögzített árak mellett egy lineáris feltétel. Így a lehetséges fogyasztások halmazát a

$$\begin{aligned} p^T y &\leq m \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

derékszögű szimplex határozza meg, ahol

y	a fogyasztás vektora,
p	az árak vektora,
m	a fogyasztó jövedelme.

A fogyasztó hasznossági függvényének megfelelően egy olyan fogyasztói kosarat választ, amely számára a legkedvezőbb. A továbbiakban a fogyasztó hasznossági függvényének jele $u(.)$.

Tehát a fogyasztó a

$$\begin{aligned} &\max u(y) \\ p^T y &\leq m \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

feladatot oldja meg.

3 Homogén, homotetikus és iránytartó hasznossági függvények a fogyasztásra vonatkozó alsó korlátok nélküli esetben

Ebben a szakaszban elméletileg vizsgáljuk a hasznossági függvényeket azon feltételezés mellett, hogy a 0 vektor is megengedett fogyasztói kosár.

Ha egy feladatban a költségvetési korlát m értéke megváltozik, akkor változik ugyan a megengedett megoldásokat leíró derékszögű szimplex, de a korábbihoz geometriai értelemben hasonló lesz. Egyes hasznossági függvények ezt a hasonlóságot az optimális megoldás elhelyezkedésére vonatkozóan is megőrzik. Az alábbiakban ezeket fogjuk iránytartó hasznossági függvényként definiálni.

Meg fogjuk mutatni, hogy ennél speciálisabb függvények a k-adrendű homogén, illetve homotetikus hasznossági függvények. Ezek pontos matematikai megfogalmazásai az alábbiak.

1. Definíció ([11]). *Egy u hasznossági függvény (Euler-féle) k-adrendű homogén, ha teljesíti a következő tulajdonságot:*

$$u(\lambda y) = \lambda^k u(y)$$

minden $\lambda \geq 0$ esetén, ahol $k \geq 0$ rögzített szám.

A Cobb-Douglas-féle hasznossági függvényt

$$u(y) = \prod_j (y_j)^{c_j}$$

alakban írjuk fel, ahol az összes c_j pozitív. Közismert, hogy a Cobb-Douglas-féle hasznossági függvény $\sum_{i=1}^n c_i$-adrendű homogén.

Egy másik nevezetes hasznossági függvény a Leontief-féle. Ennek lényege, hogy az egyes termékeket csak meghatározott arányban tudjuk felhasználni. Ha az egyik termékből a másikhoz viszonyítva több van, mint amennyinek ezen arány szerint lennie kellene, akkor ez a többlet nem növeli meg a hasznosság értékét, azaz $u(y) = \min\{c_i y_i\}$, ahol c_i-k megfelelő pozitív együtthatók. Szintén közismert, hogy a Leontief-féle hasznossági függvény elsőrendű homogén.

2. Definíció ([11]). *Egy u hasznossági függvény homotetikus, ha $u(y) = g(h(y))$ alakú, ahol h egy elsőrendű homogén függvény, g pedig szigorúan monoton növekvő.*

3. Állítás. *$k > 0$ esetén, ha az u függvény nemnegatív értékű és k-adrendű homogén, akkor homotetikus.*

Bizonyítás. Ha u egy k-adrendű homogén függvény, akkor $u(\lambda y) = \lambda^k u(y)$. Legyen $h(y) = \sqrt[k]{u(y)}$. Ez értelmezett, mivel u egy nemnegatív értékű függvény. Ha u k-adrendű homogén, akkor a belőle kapott h elsőrendű homogén. Ha emellett $g(x) = x^k$, ami monoton növekvő a pozitív tartományban, akkor $u(y) = g(h(y))$ valóban homotetikus. □

4. Következmény. *A Cobb-Douglas-féle, és a Leontief-féle hasznossági függvények is homotetikusak.*

A továbbiakban feltesszük, hogy a fogyasztó preferencia-relációja rendelkezik a gyenge monotonitás és a lokális telítetlenség tulajdonságával, amiből következik, hogy az optimális fogyasztás(ok) a költségvetési korláton van(nak).

5. Definíció. *Tekintsük a megengedett megoldások* (1) *szimplexét két különböző jövedelem esetén. Legyen* y_1 *az egyik szimplex optimális fogyasztói kosara. Azt mondjuk, hogy az* u *hasznossági függvény iránytartó, ha van olyan* y_2*, ami a másik szimplexben optimális és emellett az* y_1 *és az* y_2 *vektorok párhuzamosak.*

A definíció egyszerű következménye, hogy y_1 és y_2 hosszának aránya éppen a derékszögű szimplexek hasonlósági arányával egyezik meg.

6. Állítás. *Ha egy* u *hasznossági függvény homotetikus, akkor iránytartó.*

Bizonyítás. Legyen $u(y) = g(h(y))$ homotetikus és m_1 költségvetés mellett legyen y_1^* optimális megoldás. Ekkor minden más megengedett y_1-re

$$u(y_1) \leq u(y_1^*) \ ,$$

azaz

$$g(h(y_1)) \leq g(h(y_1^*)) \ .$$

A módosított feladatban, ahol a költségvetés m_2, minden megengedett y_2 kosár megfelel az eredeti feladatból egy y_1 kosárnak a szimplexek hasonlósága miatt. Mivel h elsőrendű homogén, és g szigorúan monoton növekvő:

$$u(y_2) = g(h(y_2)) = g\left(h\left(\frac{m_2}{m_1}y_1\right)\right) = g\left(\frac{m_2}{m_1}h(y_1)\right) \leq g\left(\frac{m_2}{m_1}h(y_1^*)\right) = \\ = u\left(\frac{m_2}{m_1}y_1^*\right) \ ,$$

azaz $y_2^* = \frac{m_2}{m_1}y_1^*$ optimális a módosított feladatban. □

7. Következmény. *A Cobb-Douglas-féle, és a Leontief-féle hasznossági függvények is iránytartók.*

Dolgozatunk egyik fő elméleti eredménye az alábbi tétel:

8. Tétel. *Ha egy hasznossági függvény iránytartó, akkor a kitüntetett termék árának emelkedése és a többi termék árának változatlansága mellett nem léphet fel Giffen-hatás.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az első termék ára nőtt, és áremelkedés előtt a költségvetési korlát

$$\sum_{i=1}^{n} p_{1i}y_i = m$$

alakú, áremelkedés után pedig

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_i = m \, .$$

Persze itt $p_{1i} = p_{2i}$ minden 1-nél nagyobb i-re. Az $i = 1$ esetben pedig $p_{11} < p_{21}$ teljesül a feltételnek megfelelően. Az első eset optimális megoldása y_1^*, a másodiké pedig y_2^*.

1. ábra. A Giffen-hatás elemzése két változó esetén

Tegyük fel továbbá, hogy teljesül a Giffen-hatás, vagyis $y_{11}^* < y_{21}^*$. Legyen

$$m_3 := \sum_{i=1}^{n} p_{1i} y_{2i}^* \, . \tag{3}$$

Ekkor nyilván $m_3 < m$ teljesül a $p_{11} < p_{21}$ feltétel miatt. Tekintsük most azt a feladatot, amelyben az árak az eredeti árakkal egyeznek meg, csak a költségvetési korlátja

$$\sum_{i=1}^{n} p_{1i} y_i \leq m_3 \tag{4}$$

alakú. Az m_3 (3) definíciója miatt y_2^* kielégíti a (4) feltételt. Legyen $y_3^* = \lambda y_1^*$, ahol λ a két feladat szimplexeinek hasonlósági aránya, azaz

$$\lambda = \frac{m_3}{m} < 1 \, . \tag{5}$$

Az iránytartó tulajdonság miatt a (4) feltételű feladatban y_3^* optimális megoldás. Emiatt $y_{31}^* = \lambda y_{11}^* < y_{11}^* < y_{21}^*$, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indirekt feltevés. Tehát $y_3^* \neq y_2^*$ és az optimalitás miatt $u(y_3^*) \geq u(y_2^*)$. Megmutatjuk, hogy y_3^* a második, módosított árú feladatnak szigorúan megengedett megoldása, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{3i}^* < m \ .$$

Ebbe az $y_3^* = \lambda y_1^*$ egyenletet behelyettesítve, majd az (5) képletet beírva

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i}(\lambda(y_{1i}^*)) = \sum_{i=1}^{n} p_{2i} \frac{m_3}{m} y_{1i}^* < m$$

adódik. A nevezővel beszorozva:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{1i}^* m_3 < m^2 \ .$$

Figyelembe véve, hogy a többi ár változatlan:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{1i}^* = \sum_{i=1}^{n} p_{1i} y_{1i}^* + (p_{21} - p_{11}) y_{11}^* = m + (p_{21} - p_{11}) y_{11}^*$$

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{2i}^* + (p_{11} - p_{21}) y_{21}^* = m + (p_{11} - p_{21}) y_{21}^*$$

adódik. Ezeket a fentibe helyettesítve

$$m^2 + m(p_{21} - p_{11})(y_{11}^* - y_{21}^*) - (p_{21} - p_{11})^2 y_{11}^* y_{21}^* < m^2 \ .$$

Ezt egyszerűsítve és átrendezve:

$$m(y_{11}^* - y_{21}^*) < (p_{21} - p_{11}) y_{11}^* y_{21}^* \ .$$

Ez pedig nyilvánvalóan teljesül, hiszen feltételezésünk szerint $y_{11}^* < y_{21}^*$, azaz az egyenlőtlenség bal oldala negatív, jobb oldala pozitív.

Ha y_3^* szigorúan megengedett az áremelkedés utáni feladatban, akkor abban a feladatban nem lehet optimális a gyenge monotonitás és a lokális telítetlenség miatt. Ez viszont $u(y_3^*) \geq u(y_2^*)$ miatt ellentmond annak, hogy y_2^* optimális. □

9. Következmény. *Sem a Cobb-Douglas-féle, sem a Leontief-féle hasznossági függvények esetén nem léphet fel Giffen-hatás, amennyiben a kitüntetett termék ára emelkedik és a többi termék ára változatlan.*

Ez a következmény azt jelenti, hogy a magyar fogyasztók hasznossági függvénye különösen az élelmiszerpiacon, ezen belül is a burgonya és helyettesítő termékei esetében nem rendelkezhet az iránytartó tulajdonsággal. Következésképpen a fogyasztók hasznossági függvénye nem lehet Cobb-Douglas-féle. A [3] dolgozat modellje pedig pont ezt tételezi fel.

4 Törésponttal rendelkező hasznossági függvények

Létezik azonban olyan hasznossági függvény, aminél a Giffen-hatás felléphet, például [6] ad ilyen függvényt. A példa lényege, hogy a hasznossági függvény két részből áll, mégpedig úgy, hogy a pozitív síknegyedet két részre osztjuk, és a két részben más-más a hasznossági függvény képlete. Természetesen ezt úgy kell megkonstruálni, hogy a végső függvény teljesítse a hasznossági függvényekre vonatkozó alapvető tulajdonságokat. Az elválasztó görbe [6]-ban egy S alakú görbe, Giffen-hatás pedig pont akkor lép fel, amikor a költségvetési egyenes metszi a görbe két „kanyar" közötti ívét. Konstruálható azonban olyan példa is, ahol a Giffen-hatás (elméletileg) nem csak egy szűk tartományban jelentkezik. Ebben a szakaszban [9] példáját tárgyaljuk egyszerűsített formában. Itt az elválasztó görbe egy egyenes. Az általános esetben a hasznossági függvényt nem képlettel adjuk meg, hanem közömbösségi görbéinek geometriai elrendezésével.

A fejezetben az egyszerűség kedvéért kétváltozós feladatokkal foglalkozunk. Az eredeti feladat árai: p_{11}, p_{12}. Így a költségvetési egyenes meredeksége:

$$q_1 = -\frac{p_{11}}{p_{12}} \ .$$

Emellett a módosított, $p_{11} < p_{21}$ és $p_{12} = p_{22}$ feladatban a költségvetési egyenes meredeksége:

$$q_2 = -\frac{p_{21}}{p_{22}} < q_1 \ ,$$

azaz utóbbi a meredekebb. Tekintsünk egy olyan egyenest, amelynek q_3 meredeksége q_2-nél kisebb, és emellett a pozitív síknegyedben metszi mindkét költségvetési egyenest. (Ilyenből természetesen végtelen sok létezik.) Ez utóbbi egyenes a síkot két részre osztja úgy, hogy modellünkben ezen a két részen a hasznossági függvény más és más, de a kettő együtt megfelel a hasznossági függvény követelményeinek. A konstrukcióban a közömbösségi görbék két félegyenesből állnak, ahol a félegyenesek a q_3 meredekségű e egyenesen érintkeznek. A félegyenesek meredekségeit úgy választjuk, hogy az e egyenestől jobbra a meredekség 0 és q_1 közötti rögzített érték, az e egyenestől balra pedig q_2 és q_3 közötti ugyancsak rögzített érték. Ezzel a modellel minden síkbeli pont pontosan egy félegyenesen van.

Így elérhető, hogy bármely olyan költségvetési egyenesre, amely az e-n átmegy, a hasznosság-optimalizáló feladat megoldása a költségvetési egyenes és az e metszéspontja lesz, ugyanis az az a pont, ahol egy fenti módon definiált törött közömbösségi görbe „érinti" a költségvetési egyenest: egy közös pontjuk van, ugyanakkor minden további pont a költségvetési egyenesnek ugyanazon, nem megengedett oldalán van.

2. ábra. A $(0.2; 0.8)$ ponton átmenő közömbösségi görbe két ága f_1 és g_1, míg a $(0.4; 0.2)$ ponton átmenő közömbösségi görbe két ága f_2 és g_2.

Példa. Az e egyenlete legyen $3y_1 + y_2 = 1.4$. Ekkor ennek meredeksége: $q_3 = -3$. A hasznossági függvény legyen a következő:

$$u(y_1, y_2) = \begin{cases} f(y_1, y_2) = 12y_1 + 5y_2\,, & \text{ha } 3y_1 + y_2 \leq 1.4; \\ g(y_1, y_2) = 0.5y_1 + y_2 + 5.6\,, & \text{ha } 3y_1 + y_2 \geq 1.4. \end{cases}$$

Ekkor a félegyenesek pont az e egyenesen metszik egymást. Az árak a következők: $p_{11} = 1 < p_{21} = 2$ és $p_{12} = p_{22} = 1$, a rendelkezésre álló összeg 1. Így $q_1 = -1$, $q_2 = -2$. Ekkor az első feladat megoldása a költségvetési egyenesének és az e-nek metszete, azaz a $(0.2; 0.8)$ pont, míg a második feladaté a $(0.4; 0.2)$ pont, vagyis az első változóra a Giffen-hatás fennáll.

Geometriailag a fenti konstrukció általánosítható. Természetesen nem szükséges az e egyenesből félegyenesekből álló közömbösségi görbéket indítani, hanem bármilyen más monoton csökkenő görbék is megfelelnek, amelyek eltolásával a nemnegatív síknegyed egyszeresen fedhető le. A lényeg, hogy az egyenesen lévő pontokra a közömbösségi görbékhez húzott érintők meredekségei 0 és q_1 között, illetve a másik oldalon q_2 és q_3 közötti legyenek.

5 A hasznossági függvény kisimítása a töréspontnál

$q_1 > q_2$ miatt azonban az e egyenesen lévő pontokban a közömbösségi görbék deriváltjai nem léteznek. Ennek orvoslására ad eljárást [6], azonban ott csak elméletileg igazolják, hogy adható folytonosan differenciálható hasznossági függvény, de konkrét képlettel nincs meghatározozva.

Mi ezt egy egyszerű esetben meg is konstruáljuk. Az ötlet a következő: a fentiekben egy közömbösségi görbe két félegyenesből áll. Két félegyenesből képzett egyenesekhez húzható akármilyen közel egy hiperbola. A hiperbola azon ága, mely az eredeti két félegyeneshez tartozik, lesz a közömbösségi görbe az új modellben.

Tekintsünk egy (A, B) pontot a fent említett e egyenesről. Ehhez a ponthoz létezik egy-egy félegyenes mindkét oldalon. Az egyszerűbb számítások miatt feltesszük, hogy a bal oldali meredeksége -1, a jobb oldalié 0. Ekkor az A, B ponton átmenő két félegyenesből képzett egyenesekhez mint aszimptotához simuló hiperbola a

$$(y_2 - B + y_1 - A)(y_2 - B) = \varepsilon^2$$

képlettel írható le. Az e egyenes egyenlete legyen: $y_2 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}y_1$. Ennek az egyenesnek -1-nél meredekebbnek kell lennie az előző fejezet szerint, amihez $b < 1$ szükséges, ezt feltesszük. Mivel az (A, B) pont az egyenesen van, $A = a - bB$ és a fenti hiperbola

$$(y_2 + y_1 - a - (1 - b)B)(y_2 - B) = \varepsilon^2$$

alakba írható. Vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőlegesen választott (y_1, y_2) párhoz hány olyan (A, B) pár tartozik, ami kielégíti a fenti összefüggést. Ez rögzített (y_1, y_2) értékekre a B-re egy másodfokú egyenlet:

$$(1 - b)B^2 + (-y_1 - (2 - b)y_2 + a)B + (y_2^2 + y_1y_2 - ay_2 - \varepsilon^2) = 0\,.$$

Ennek megoldása

$$B_{1,2} = \frac{(2 - b)y_2 + y_1 - a \pm \sqrt{D}}{2(1 - b)}$$

alakú, ahol D a diszkrimináns:

$$\begin{aligned} D &= (-(2 - b)y_2 - y_1 + a)^2 - 4(1 - b)(y_2^2 + y_1y_2 - ay_2 - \varepsilon^2) = \\ &= b^2y_2^2 + y_1^2 + 2by_2y_1 - 2bay_2 - 2ay_1 + a^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2 = \\ &= (y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2\,. \end{aligned}$$

Így

$$B = \frac{(2 - b)y_2 + y_1 - a \pm \sqrt{(y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2}}{2(1 - b)}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy egy (y_1, y_2) páron két hiperbola megy át, ahol az ezekhez tartozó csúcspontok legyenek (A_1, B_1) és (A_2, B_2). Megmutatjuk, hogy $B_1 < y_2$, azaz

$$B_1 = y_2 + \frac{by_2 + y_1 - a - \sqrt{(y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2}}{2(1 - b)} < y_2\,.$$

Ez akkor fog teljesülni, ha a tört negatív. Ez pedig teljesül, mivel a nevező pozitív $1 > b$ miatt. Hasonlóan

$$B_2 = y_2 + \frac{by_2 + y_1 - a + \sqrt{(y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1-b)\varepsilon^2}}{2(1-b)} > y_2 \ ,$$

mivel a tört nevezője és számlálója itt is pozitív. A fentiek szerint $B_1 < y_2 < B_2$, ami azt jelenti, hogy a B_1 ponthoz tartozó hiperbolának felső, konvex ágán van y_2, a B_2 hiperbolának viszont az alsó, konkáv ágán. Eszerint a feladat szempontjából nekünk csak a B_1-re van szükségünk, mivel az eredeti félegyenesekhez ez tartozik. Ezzel azt is megmutattuk, hogy mindegyik (y_1, y_2) ponthoz egyértelműen meghatározható egy B_1 érték, amihez tartozó egyértelmű hiperbola felső, konvex ágán az (y_1, y_2) pont szerepel, azaz ezek a hiperbola ágak rögzített ε-ra teljesen lefedik a síkot, és így megfelelnek közömbösségi görbének. A hiperbolát meghatározó félegyenesek alakjából következően, ha egy (y_1, y_2) pár tetszőleges koordinátáját megnöveljük, magasabban fekvő hiperbola ágra lépünk, ahhoz pedig e alakja miatt magasabb B_1 érték tartozik. Így viszont az $(y_1, y_2) \mapsto B_1$ megfeleltetés választható hasznossági függvénynek.

Példa (folytatás). A fenti hasznossági függvénnyel $B = 2 - 2A$, azaz $a = 1$ és $b = 0.5$, illetve $\varepsilon = 0.01$ választása mellett tekintsük a következő feladatot: $p_{11} = 0.5 < p_{21} = 0.6$ és $p_{12} = p_{22} = 1$, a rendelkezésre álló összeg 1. A megoldások pedig: $(0.6733; 0.6633)$, illetve $(0.7172; 0.5697)$, azaz teljesül a Giffen-hatás.

6 Módosított modell kötelező minimális fogyasztás mellett

A fogyasztást a költségvetési korláton és a hasznossági függvényen kívül más is befolyásolhatja. A fogyasztó —feltételezésünk szerint— bizonyos dolgokból, amelyek nem feltétlenül azonosak a piacon megjelenő termékekkel, de amelyeket ezek hordoznak, meghatározott mennyiségnél nem fogyaszthat kevesebbet, mert ez a létfenntartásához szükséges. Például az élelmiszerpiac esetén ilyen lehet az elfogyasztott kalória, fehérje, C-vitamin stb. mennyisége. Látható, hogy ezek a közvetlenül termékként meg nem jelenő dolgok egymástól elkülönülnek, azaz egy-egy termék külön-külön tartalmazhat belőlük meghatározott mennyiséget. Ezért a termékek egy súlyozott összegének kell nagyobbnak lenni, mint a minimális kötelező fogyasztás minden egyes említett tényező esetében.

Tehát a modell a költségvetési feltételen kívül annyi, azzal bizonyos értelemben ellentétes irányú lineáris egyenlőtlenséget tartalmaz, ahány tényezőre a minimális fogyasztást figyelembe vesszük. Így matematikailag a lehetséges fogyasztások (2) halmazát a

$$\begin{array}{rcl} p^T y & \le & m \\ a_1^T y & \ge & b_1 \\ & \vdots & \\ a_k^T y & \ge & b_k \\ y & \ge & 0 \end{array} \tag{6}$$

feltételrendszer szűkíti le, ahol

b_i az i tényezőből kötelezően fogyasztandó minimális mennyiség,
a_{ij} pedig azt adja meg, hogy a j termék egy egysége az i tényezőből mennyit tartalmaz.

10. Definíció. *A továbbiakban fogyasztási poliédernek nevezzük a*

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ kielégíti (6)-ot } \}$$

poliédert.

Feltételezésünk szerint a fogyasztó a hasznossági függvényének megfelelően a következő stratégiát követi. Ha valaki csak a kötelező minimális szinten fogyaszt, akkor ezzel valójában nem tudott jólétet teremteni magának, csak létet. Jólétének mértékét az határozza meg, hogy a kötelező minimális fogyasztáson felül mit tud fogyasztani. Ezért saját fogyasztását egy olyan minimális fogyasztói kosárhoz fogja mérni, amely még éppen benne van a fogyasztási poliéderben. Tehát a saját fogyasztói kosarának hasznossági értékét ezen minimális fogyasztáshoz mért többlete adja.

A továbbiakban y-nal jelöljük a fogyasztó teljes fogyasztói kosarát, x-szel pedig azt a fogyasztói kosarat, amihez képest a többletet méri. Hasonló feltételezéssel élt [3] is. Ekkor a fogyasztó a következő feladatot oldja meg:

$$\begin{array}{c} \max u(y-x) \\ y \in \Pi \\ x \in \Pi \\ y - x \ge 0\,. \end{array} \tag{7}$$

Megjegyzendő, hogy a (6) poliéder a [3] dolgozat poliéderének általánosítása. Ott azonban a Π poliédert a költségvetési korláton kívül a termékek fogyasztandó mennyiségeire vonatkozó egyedi alsó korlátok határozták meg, és így létezett egy egyértelmű minimális kötelező fogyasztás. A [3] dolgozat modellje úgy értelmezhető, mint a (7) probléma azon részfeladata, ahol x rögzített kosár. A fogyasztási poliédert és egy optimális megoldáspárt mutat a 3. ábra két termék esetén. Az, hogy a [3] dolgozat poliéderénél általánosabb (6) poliéder létezik a gyakorlatban, a már említett C-vitamin példáján látható be egyszerűen. Mivel nem tudunk róla, hogy kimutatható mértékben skorbutos esetek Magyarországon előfordultak volna, a fogyasztó elegendő C-vitaminhoz jut, de ennek csak egy töredékét veszi be közvetlenül vitaminként.

3. ábra.

Nyilvánvaló, hogy a hasznossági függvényekre tett korábbi feltételezések mellett az (x^*, y^*) optimális megoldásra teljesül, hogy $x^* \in \Pi$, és minden $x \leq x^*$, $x \neq x^*$ esetén $x \notin \Pi$.

7 Iránytartó függvények és a minimális fogyasztás

Amennyiben a fogyasztó tényleges y fogyasztását az x kötelező minimális fogyasztáshoz hasonlítja, akkor y benne lesz abban az n-dimenziós derékszögű szimplexben, aminek egyik lapja a költségvetési korlátra esik, a többi lapja pedig a $w_i = 0$ egyenlőseggel megadott hipersíkokkal párhuzamos és a derékszögnél lévő csúcsa éppen x. Nyilvánvaló, hogy az összes ilyen n-dimenziós szimplex a szó geometriai értelmében hasonló egymáshoz. Így értelmezhető rá a korábban látott iránytartó definíció, de azzal a megkötéssel, hogy az x_1 és x_2 pontokhoz tartozó derékszögű szimplexekben most az $y_1 - x_1$ és az $y_2 - x_2$ vektorok párhuzamosak.

Az iránytartó tulajdonság azért fontos különösen, mert mint ahogy ezt az alábbi tétel kimondja, igen erősen leszűkíti a (7) feladat optimális megoldásaiban szóba jöhető x minimális fogyasztások halmazát.

11. Tétel. *Egy iránytartó hasznossági függvény esetén mindig van olyan optimális (x^*, y^*) pár, amelynek x^* pontja valamely n számú lineárisan független minimális fogyasztási feltétel metszetében van, feltételezve, hogy a fogyasztási poliéder belseje nem üres.*

Megjegyzés. Az állításban az x^* pont fekvésére megfogalmazott feltétel

—mint közismert— ekvivalens azzal, hogy x^* a Π fogyasztási poliéder extremális pontja.

Bizonyítás. Az iránytartó tulajdonság miatt annál nagyobb a hasznosság, minél nagyobb megfelelő derékszögű szimplexet tudunk elhelyezni a poliéderben. Ha annak x csúcsa nem extremális pontban lenne, akkor az x ponttal el tudunk mozdulni a feltételtéren belül legalább két ellentétes megengedett irányba (ha élen van, akkor pontosan kettőbe). Ekkor valamelyik irányban biztosan nem csökken az új x^* pontból származtatott szimplex nagysága, vagy ami ezzel ekvivalens, az x pontnak a költségvetési korláttól való távolsága. Abba az irányba akkorát lépünk, amekkorát csak lehet. Az így kapott pontra már eggyel több lineárisan független minimális fogyasztási feltétel teljesül egyenlőséggel. Ez az algoritmus pedig egy extremális pontba vezet. □

Természetesen az x^* elhelyezkedése csak a minimális fogyasztási feltételek és a költségvetési korlát állásától függ, ha a hasznossági függvény iránytartó.

12. Tétel. *Ha egy hasznossági függvény iránytartó, akkor a kitüntetett termék árának emelkedése és a többi termék árának változatlansága mellett nem léphet fel Giffen-hatás a (7) modellben.*

Bizonyítás. A bizonyítás a korábban látott 8. Tétel bizonyításához hasonló abban az esetben, ha a minimális fogyasztás elhelyezkedése az árváltozás hatására nem változik, azaz ha $x_1^* = x_2^*$. Amennyiben az x^* is változik az árváltozás után, akkor a költségvetési korlát meredekségének változása miatt az első koordinátájában nem nőhet. Tegyük fel ugyanis, hogy $x_{21}^* > x_{11}^*$. Az, hogy az eredeti feladatban x_1^* tartozott a megoldáshoz, az az előző bizonyítás alapján azt jelenti, hogy a hozzá tartozó derékszögű szimplex nem kisebb az x_2^*-hoz tartozó derékszögű szimplexnél. Ezek a szimplexek annál nagyobbak, minél több pénzük marad a minimális x megvásárlása után. Eszerint az első esetben, p_{11} ár mellett:

$$m - p_{11}x_{11}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{1i}^* \geq m - p_{11}x_{21}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{2i}^* \,.$$

A második esetben viszont x_2^*-hoz tartozó poliéder legalább akkora, mint az x_1^*-hoz tartozó:

$$m - p_{12}x_{11}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{1i}^* \leq m - p_{12}x_{21}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{2i}^* \,.$$

A két egyenlőtlenséget egymásból kivonva

$$p_{12}x_{11}^* - p_{11}x_{11}^* \geq p_{12}x_{21}^* - p_{11}x_{21}^*$$

adódik, ami $p_{12} > p_{11}$ miatt ellentmond $x_{21}^* > x_{11}^*$-nek. Ezzel beláttuk, hogy ha x^* változik, akkor az első koordinátája nem nőhet.

Tegyük fel, hogy az új x_2^*, y_2^* megoldásra teljesül a Giffen-hatás, azaz $y_{11}^* < y_{21}^*$. Legyen az eredeti feladatban az x_2^*-hoz tartozó megoldás y_4^*.

Mivel rögzített x-re nem teljesül a Giffen-hatás, ezért $y^*_{21} \leq y^*_{41}$. Ezt a fenti indirekt feltevéssel összevetve $y^*_{11} < y^*_{41}$. Azonban mivel $x^*_{21} \leq x^*_{11}$, és az eredeti feladatban x^*_2-hoz legfeljebb akkora derékszögű szimplex tartozik, mint x^*_2-hoz, így az iránytartás miatt legfeljebb akkora a benne lévő megoldás első koordinátája is, ez pedig ellentmond $y^*_{11} < y^*_{41}$-nek. □

13. Következmény. *Sem a Cobb-Douglas-féle, sem a Leontief-féle hasznossági függvények esetén nem léphet fel Giffen-hatás a minimális fogyasztás modelljében sem, amennyiben a kitüntetett termék ára emelkedik és a többi termék ára változatlan.*

8 Tömeges árváltozás

Elméletileg előfordulhat a Giffen-hatás, ha a kitüntetett termék ára nő, de a többié nem nő (azaz itt a változatlanság és az olcsóbbá válás megengedett). Erre mutat példát a következő két tétel. Persze ezek az esetek nem adnak magyarázatot a magyar burgonyapiacon megfigyelt jelenségekre, hiszen semelyik helyettesítő termék ára nem csökkent abban az időszakban.

14. Tétel. *Ha a fogyasztók hasznossági függvénye Cobb-Douglas-féle a (7) modellben és a kitüntetett termék ára nő, de a többié nem, akkor a Giffen-hatás pontosan akkor teljesül, ha*

$$\frac{m - \sum\limits_{i=1}^{n} p_{2i} x^*_i}{p_{21}} \geq \frac{m - \sum\limits_{i=1}^{n} p_{1i} x^*_i}{p_{11}} ,$$

ahol x^* a (7) feladat optimális megoldásának x része, és feltesszük, hogy az árváltozások hatására az x^* értéke nem változott.

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasználjuk azt a mikroökonómiában közismert tényt, hogy a Cobb-Douglas-féle hasznossági függvény esetén a fogyasztó az egyes termékekre pontosan

$$\frac{c_i}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

mértékben költ, azaz

$$\frac{c_i}{p_i \sum_{i=1}^n c_i}$$

mennyiséget vásárol. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, hiszen ez a lényegen nem változtat. Ekkor a két feladatban a kitüntetett termék fogyasztása:

$$y^*_{11} = x^*_1 + \frac{c_1(m - \sum_{i=1}^n p_{1i} x^*_i)}{p_{11}} ,$$

illetve

$$y^*_{21} = x^*_1 + \frac{c_1(m - \sum_{i=1}^n p_{2i} x^*_i)}{p_{21}} .$$

Ebből pedig egyszerűen következik az állítás. □

15. Tétel. *Ha a fogyasztók hasznossági függvénye Leontief-féle a (7) modellben, mégpedig*

$$\max_j c_j(y_j - x_j)$$

alakú és a kitüntetett termék ára nő, de a többié nem, akkor a Giffen-hatás pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{m - \sum_{i=1}^n p_{1i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{1i}}{c_i}} \geq \frac{m - \sum_{i=1}^n p_{2i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{2i}}{c_i}},$$

ahol ismét feltesszük, hogy az árváltozások hatására x^* értéke nem változott.

Bizonyítás. Ebben az esetben abból indulunk ki, hogy a Leontief-féle hasznossági függvényhez tartozó optimális fogyasztói kosarak az

$$x^* + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} e_i$$

egyenletű félegyenesen vannak, ahol e_i az i-edik egységvektor. Eszerint

$$y_{11}^* = x_1^* + \frac{m - \sum_{i=1}^n p_{1i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{1i}}{c_i}} \frac{1}{c_1},$$

illetve

$$y_{21}^* = x_1^* + \frac{m - \sum_{i=1}^n p_{2i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{2i}}{c_i}} \frac{1}{c_1}.$$

Azaz Giffen-hatás pontosan akkor teljesül, ha az állítás igaz. □

9 Maximális hasznossági függvény

A maximális hasznossági függvény a Leontief-függvény megfordítása. Csak az a jószág számít, amiből több van. Két jószág esetén a Giffen hatás feltétele a következő:

Legyen a hasznossági függvény $u(a, b) = \max\{f(a); b\}$, vagyis a minimális fogyasztás modelljében: $u(y_1, y_2) = \max\{f(y_1 - x_1); y_2 - x_2\}$. Az ennek alapján definiált reláció, miszerint (x_1, x_2) gyengén preferált (y_1, y_2)-höz képest, ha $u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2)$, valóban egy preferenciareláció [11], hiszen teljes, reflexív, tranzitív és folytonos. Emellett teljesíti a lokális telítetlenség és a gyenge monotonitás tulajdonságait is.

Az optimális megoldás minden helyzetben valamilyen szélsőség – csak az egyik jószágból fogyaszt az x-en felül a fogyasztó. Feltehető, hogy $p_{12} = p_{22} = 1$, $p_{11} < p_{21}$, illetve, hogy az x a feladat során nem változik. A Giffen-hatás szélsőséges fogyasztásnál azt jelenti, hogy az első esetben csak a 2. jószágból választ pluszban a fogyasztó:

$$f(\frac{m - p_{11}x_1 - p_{12}x_2}{p_{11}}) < \frac{m - p_{11}x_1 - p_{12}x_2}{p_{12}},$$

míg az 1. termék áremelkedése után csak az 1. termékből:

$$f(\frac{m - p_{21}x_1 - p_{12}x_2}{p_{21}}) > \frac{m - p_{12}x_1 - p_{12}x_2}{p_{12}}.$$

Könnyen konstruálható olyan példa, ahol ezek a feltételek teljesülnek, pl. $f(a) = \sqrt{a}$ megfelelő választás lehet.

Ha $m = 200$, $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $p_{11} = 3$, $p_{21} = 6$, $p_{12} = 20$, akkor az $u(a, b) = \max\{\sqrt{a}; b\}$ függvénnyel az első esetben a minimálfogyasztás 104-be kerül, a maradékon jobb csak 5.65 egységnyi második jószágot venni, és csak 23.04 egységnyi elsőt. Míg a második esetben az alap fogyasztás 128-ba kerül, és a maradékon érdemes 12.96 egységnyi első jószágot venni, 3.46 egységnyi második helyett.

A következő valós probléma megoldása lehet a fenti feladat: Egy diák 200 forintot szán ceruzák és festékek vásárlására. Az iskolai előírások miatt legalább 8-féle festéket és 4-féle ceruzát kell vennie. A maradék pénzén további ceruzákat és festékeket vásárol, azonban ekkor az a célja, hogy az egyik eszközből a lehető legtöbb színnel rendelkezzen, a festék esetén egy gyökfüggvénnyel leírható kiértékelés szerint. Így az első esetben 5 további ceruzát, a másodikban 3 további festéket fog vásárolni.

Irodalom

1. Simon Gray, *The Happiness of States*, 1815.
2. Robert Jensen, Nolan Miller, *Giffen Behavior: Theory and Evidence*, Harvard University, Faculty Research Working Papers Series, 2002, RWP02-014
3. Kotász Gyuláné, A lakosság kereseleti struktúrájának elemzése a LES és AIDS módszerekkel, *Statisztikai Szemle*, 1985. július, 667. oldal
4. Lakatos Imre, *Bizonyítások és cáfolatok*, Gondolat, Budapest, 1981., 81. oldal, 2. szabály
5. Alfred Marshall, *Principles of Economics*, Macmillan, London, 1895.
6. Peter G. Moffatt, Is Giffen behaviour compatible with the axioms of consumers theory? *Journal of Mathematical Economics*, 2002, 259–267.
7. Krystina Ng, *A Literature review of Giffen Goods*, ADMN 544 Final Paper
8. Sherwin Rosen, Potato Paradoxes, *Journal of Political Economy*, 1999, 214–313.
9. Peter Norman Sörensen, *Simple Utility Functions with Giffen Demand*, 2005, http://www.econ.ku.dk/sorensen
10. Szabó István, *Az élelmiszer-árrugalmasság elemzése*, VI. Nemzetközi Agrárökonómiai Tudományos Napok, Gyöngyös, 1998. március 24-25., 4. kötet, 84–89.
11. Varian, H. R., *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton & Company, New York, 3. kiadás, 1992.

A MATHEMATICAL MODEL OF GIFFEN BEHAVIOUR

In this paper we ...