DINAMIKUS COURNOT MODELLEK ÉS KITERJESZTÉSÜK[1]

FEUER GÁBOR – SZIDAROVSZKY FERENC
Feuer Ges.m.b.H. – Arizonai Egyetem

A dolgozatban oligopol modelleket tárgyalunk realisztikus feltételek mellett. A piaci árfüggvény változását, termékmennyiség növelési költségét, környezetszennyezés csökkentését, valamint a különböző termelők költség-kölcsönhatásait az eddigiekben tárgyalt modellekben nem, vagy csak ritkán vették figyelembe. Ezeknek a tényezőknek a figyelembevételével a modellek bonyolultabbá válnak és az aszimptotikus tulajdonságaik is lényegesen megváltoznak.

1 Bevezetés

A matematikai közgazdaságtani irodalomban az oligopol modellek központi szerepet játszanak. Cournot (1838) munkája nyomán intenzív kutatás indult meg ezen a területen. Először az egyensúlypont létezése és egyértelműsége volt a központi kérdés, majd az egyensúlypontok kiszámítási módszerei kerültek előtérbe. Ezzel egy időben a klasszikus Cournot modell különféle kiterjesztéseit és általánosításait vezették be. Így került sor a differenciált termékű, a többtermékes, alkalmazott-tulajdonú és piac-megosztási modellek bevezetésére és tanulmányozására. A korábbi modellek és eredmények jó összefoglalását adja meg Okuguchi (1976) könyve, majd ezek többtermékes modellek esetére való kiterjesztéseit és az oligopol modellek többféle alkalmazásait tárgyalja az Okuguchi és Szidarovszky (1999) monográfia. Az 1960-as évek elejétől kezdve számos kutató foglalkozott dinamikus oligopol modellekkel. Theocharis (1959) cikke volt az első eredmény, amelyet ezután többben kiterjesztettek és általánosítottak. Dinamikus modellek esetén a rendszer aszimptotikus viselkedése jelenti a központi problémát. Ha az egyensúlypont lokális stabilitásának a vizsgálata a kérdés, akkor az a szokásos módszerekkel (linearizálással és a Jacobi mátrix sajátértékeinek a megbecslésével) történik. Globális stabilitási kérdések részben a Lyapunov függvények segítségével, vagy a diszkrét esetben a kontrakciós fixpont tétel alapján dönthetők el. Nemlineáris modellekkel és azok aszimptotikus vizsgálatával a Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky (2005) monográfia foglalkozik részletesen.

A korábbi modellek csak nagyon ritkán és csak speciális esetekben vették figyelembe olyan körülményeket, amelyekkel a modellek realitástartalma lényegesen megnövekedett volna. Nem vették ugyanis figyelembe a piaci árfüggvény időbeni változását, a kapacitásmennyiség növelésének egyéb költ-

[1]Beérkezett: 2006. október 30. E-mail: `ferenc.forgo@uni-corvinus.hu`.

ségeit, környezetvédelmi kérdéseket, valamint a különböző termelők költségkölcsönhatásait, hogy csak a legfontosabbakat említsük. Jelen dolgozatunkban kísérletet teszünk arra, hogy ezeket a tényezőket a klasszikus Cournot modellbe bevezessük, és ezek hatásait a rendszerek aszimptotikus viselkedésére nézve megvizsgáljuk. A matematikai egyszerűség kedvéért vizsgálataink a klasszikus Cournot modellre vonatkoznak, a modellek, módszerek és eredmények a modell különféle kiterjesztései esetére hasonlóan vizsgálhatók és kezelhetők. Ezeknek részleteiről egy következő dolgozatban fogunk beszámolni.

2 A klasszikus Cournot modell

Tegyük fel, hogy N termelő azonos terméket állít elő, vagy azonos szolgáltatást ajánl ugyanazon a piacon. Jelölje x_k a k-adik termelő által előállított és árult mennyiséget, és tegyük fel, hogy, minthogy L_k kapacitáskorláttal rendelkezik, $x_k \in [0, L_k]$. Feltesszük azt is, hogy a piaci egységár az együttesen piacra ajánlott termékmennyiségtől függ: $p\left(\sum_{l=1}^N x_l\right)$, és az egyes termelők költségfüggvényei csak a saját termékmennyiségtől függenek: $c_k(x_k)$. Ezek alapján a k-adik termelő profitja:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p\left(\sum_{l=1}^{N} x_l\right) - c_k(x_k). \tag{1}$$

Ily módon egy N-személyes nem-kooperatív játékot definiáltunk, ahol az N termelő adja a játékosokat, a $[0, L_k]$ intervallum a k-adik játékos stratégiahalmazát és φ_k a k-adik játékos kifizetőfüggvényét. A játék Nash-egyensúlypontja egy olyan termelési vektor $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ amelyre

$$\text{(i)} \qquad x_k^* \in [0, L_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)\ ;$$

és

$$\text{(ii)} \qquad \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k, x_{k+1}^*, \ldots, x_N^*) \le \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_N^*) \tag{2}$$

tetszőleges $x_k \in [0, L_k]$ esetén. Az (i) feltétel az egyensúlyi stratégiák megengedhetőségét követeli meg, míg a (ii) feltétel azt biztosítja, hogy egyetlen játékos sem növelheti profitját, ha egyoldalúan eltér az egyensúlytól feltéve, hogy a többi játékos megmarad az egyensúlypontnál.

Az oligopol probléma irodalmában általában felteszik, hogy a p és c_k függvények $(k = 1, 2, \ldots, N)$ kétszer folytonosan differenciálhatók, valamint

(A) $p' < 0, \quad c_k' > 0$;

(B) $p' + x_k p'' \le 0$; és

(C) $p' - c_k'' < 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ stratégiaválasztás mellett.

Az (A) feltétel azt jelenti, hogy p szigorúan csökken, ha a piacra bocsátott termékmennyiség nő, valamint a termelők költsége növekszik, ha többet termelnek. (A), (B) és (C) feltételek biztosan fennállnak, ha az árfüggvény konkáv és a költségfüggvények konvexek. Megjegyezzük, hogy a (B) és (C) feltételek megengednek gyengén konvex és gyengén konkáv költségfüggvényeket is.

Vegyük észre, hogy az (1) kifizetőfüggvény az x_k változón kívül csak a többi termelő együttes termékmennyiségétől függ, amit az $s_k = \sum_{l \neq k} x_l$ szimbólummal jelölünk majd.

Tehát az (1) kifizetőfüggvény átírható a következőképpen:

$$\varphi_k = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k)] \,. \tag{3}$$

Adott s_k értékek mellett a legkedvezőbb x_k érték, $x_k = R_k(s_k)$, adja a k-adik játékos *válaszfüggvényét*, amely a fenti feltételek mellett mindig egyértelmű, és a következőképpen kapható meg:

$$R_k(s_k) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k) - c_k'(0) \leq 0 \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(L_k + s_k) + p(L_k + s_k) - c_k'(L_k) \geq 0 \\ z_k, & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{4}$$

ahol z_k a

$$z_k p'(z_k + s_k) + p(z_k + s_k) - c_k'(z_k) = 0 \tag{5}$$

egyenlet egyértelmű megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban. Minthogy az (5) egyenlet bal oldala szigorúan csökkenő a z_k változóban, R_k szakaszonként folytonosan differenciálható. A (4) első két esetében $R_k' = 0$, a derivált pedig a harmadik esetben implicit differenciálással kapható meg:

$$R_k' p' + z_k p''(R_k' + 1) + p'(R_k' + 1) - c_k'' R_k' = 0 \,,$$

amelyből

$$R_k' = -\frac{p' + z_k p''}{2p' + z_k p'' - c_k''} \,. \tag{6}$$

Könnyen látható, hogy a fenti feltételek mellett

$$-1 < R_k' \leq 0 \,. \tag{7}$$

Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy bármely termelő növeli termelését, ha a többi termelő együttes termékmennyisége csökken, de a növelés elég lassú.

Az egyensúlypont definíciója a válaszfüggvények segítségével is megfogalmazható. Egy termelési vektor $\underline{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ Nash-egyensúlypontot szolgáltat, ha $k = 1, 2, \ldots, N$ esetén

$$\text{(i)} \qquad x_k^* \in [0, L_k]$$

és

$$\text{(ii)}' \qquad x_k^* = R_k\left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} x_l^*\right) .$$

A (ii)′ feltétel azt követeli meg, hogy mindegyik játékos egyensúlyi stratégiája egyben legjobb választás is (amely egyébként a (2) egyenlőtlenséggel is kifejezhető).

Ismeretes, hogy az (A)–(C) feltételek mellett az N-személyes, nem-kooperatív játék pontosan egy egyensúlyponttal rendelkezik. Ha egy adott időpontban a játék állapota az egyensúlypont, akkor (2) következtében egyik játékos sem változtat stratégiáján, így a rendszer állapota az egyensúly marad minden további időpont esetén is. Ha az állapot nem egyensúlypont, akkor (2) nem teljesül legalább egy játékos esetére, így legalább egy játékos érdeke az, hogy változtasson stratégiáján. Ha az új állapot egyensúlypont, akkor az állapot nem változik ezután, ha nem az egyensúlypont, akkor valamelyik játékos újból változtat stratégiáján, és így tovább. Ily módon tehát egy dinamikus rendszer keletkezik.

Tegyük fel először, hogy az időskála diszkrét. Jelölje $t = 0, 1, 2, \dots$ az időpontokat. A t-edik időpont után minden játékos tudja, hogy mennyi volt a többiek termékmennyisége $x_k(t)$ $(l \neq k)$, így könnyen ki tudja számítani, hogy mi a számára legkedvezőbb termelési program: $R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right)$. Azonban a t-edik és $(t+1)$-edik időpontok közötti rövid időszakban nem képes jelentősebb mennyiségnövelést elérni a szükséges beruházások, új munkaerő felvétele stb. következtében, így azt tételezzük fel, hogy a k-adik játékos $x_k(t)$ értékét $R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right)$ irányába mozdítja el, azaz termékmennyisége az

$$x_k(t+1) = x_k(t) + K_k\left(R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right) - x_k(t)\right) \tag{8}$$

dinamikát követi. A (8) egyenletrendszer $k = 1, 2, \dots, N$ esetére egy N-dimenziós diszkrét rendszert definiál. A K_k együtthatókról feltesszük, hogy a $(0, 1]$ intervallumba esnek. Nagyobb K_k érték azt jelent, hogy a k-adik termelő agresszívabban követi a válaszfüggvényét.

A folytonos időskála feltételezése mellett hasonlóan gondolkodhatunk. Ilyenkor az egyes játékosok a legjobb stratégia felé mutató irányt követik, az pedig a következő differenciálegyenlettel írható le:

$$x_k'(t) = K_k\left(R_k\left(\sum_{l\neq k} x_l(t)\right) - x_k(t)\right) , \tag{9}$$

ahol $K_k > 0$ egy játékostól függő állandó.

Ismert az irodalomból (lásd Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2006), hogy a (8) rendszer aszimptotikusan stabilis, ha

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{K_k r_k}{-K_k(r_k+1)+2} > -1 , \tag{10}$$

és amennyiben szigorúan ellentétes egyenlőtlenség áll fenn, akkor a rendszer instabil. A rendszer nemlineáris, így egyenlőség esetén semmilyen konkrét állítás nem adható. A folytonos (9) rendszer az (A)–(C) feltétek mellett mindig aszimptotikusan stabilis.

A (8) és (9) dinamikák nagy hiányossága az, hogy nem vesznek figyelembe olyan tényezőket, amelyek minden gazdaságban természetszerűen előfordulnak. A dolgozat további részeiben néhány ilyen tényezőt vonunk be az oligopol modellekbe, és megvizsgáljuk ezek hatását a rendszerek aszimptotikus viselkedésére. Diszkrét modellekkel foglalkozunk csak, a folytonos dinamikák hasonlóan tárgyalhatók.

3 Árfüggvények időbeli kölcsönhatása

Számos termék élettartama hosszabb, mint egy időperiódus, úgyhogy a korábban értékesített termékek a piacot telíthetik, így a korábbi igények és értékesítések befolyásolhatják és gyakran befolyásolják is az árfüggvényt. Hasonló a helyzet, amikor korábbi fogyasztások eredményeképpen a vásárlók ízlése változik, bizonyos termékek fogyasztása szokássá válik stb. Matematikailag feltesszük, hogy a korábbi értékesítések összhatása egy időtől függő Q változóval írható le, amely a diszkrét esetben egy

$$Q(t+1) = H\left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t)\right) \tag{11}$$

dinamikával változik. Például, a piac telítődése egy

$$Q(t+1) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t) + \alpha Q(t) \tag{12}$$

lineáris dinamikával jellemezhető, ahol α az egy periódus után is működőképes, használható termékarányt jelenti.

A H függvény értelmezési tartománya $\left[0, \sum_{k=1}^{N} L_k\right] \times R$.

Feltesszük továbbá, hogy az árfüggvény nemcsak az értékesített összterméktől függ, hanem Q aktuális értékétől is, úgyhogy a k-adik termelő kifizetőfüggvénye:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N, Q) = x_k p(x_k + s_k, Q) - c_k(x_k)\ . \tag{13}$$

Feltesszük most, hogy

(A) $p' < 0\,, \quad c_k' > 0\,;$

(B) $p' + x_k p_{xx}'' \leq 0\,;$

(C) $p_x' - c_k'' < 0\,;$

(D) $p_Q' + x_k p_{xQ}'' \leq 0\,;$

minden megengedett $x_1, \dots, x_N$ és Q mellett. Megjegyezzük, hogy a (B) és (C) feltétel lényegében azonos a klasszikus Cournot modellnél bevezetett hasonló feltételekkel. Hasonlóan a (4) relációhoz, a k-adik játékos válaszfüggvénye a következő:

$$R_k(s_k, Q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s_k, Q) - c_k'(0) \le 0 \\ L_k, & \text{ha } L_k p'(L_k + s_k, Q) + p(L_k + s_k, Q) - C_k'(L_k) \ge 0 \\ z_k, & \text{egyébként,} \end{cases} \tag{14}$$

ahol z_k a

$$p(z_k + s_k, Q) + z_k p'(z_k + s_k, Q) - c_k'(z_k) = 0 \tag{15}$$

egyenlet egyetlen megoldása a $(0, L_k)$ intervallumban.

Implicit deriválással (6)-hoz hasonlóan látható, hogy

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p_x' + x_k p_{xx}''}{2p_x' + x_k p_{xx}'' - c_k''} \in (-1, 0] \tag{16}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial Q} = -\frac{p_Q' + x_k p_{xQ}''}{2p_x' + x_k p_{xx}'' - c_k''} \in (-\infty, 0]. \tag{17}$$

Hasonlóan a (8) dinamikához, a diszkrét esetben most az

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= x_k(t) + K_k \left(R_k \left(\sum_{l \ne k} x_l(t), Q(t) \right) - x_k(t) \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ Q(t+1) &= H \left(\sum_{k=1}^{N} x_k(t), Q(t) \right) \end{aligned} \tag{18}$$

$(N+1)$-dimenziós diszkrét rendszer adódik. A következőkben az egyensúly stabilitását vizsgáljuk meg és a stabilitási feltételeket összehasonlítjuk a Cournot modellel. A lokális aszimptotikus stabilitást a Jacobi-mátrix alapján végezhetjük el, ebben az esetben

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - K_1 & K_1 r_1 & \cdots & K_1 r_1 & K_1 \check{r}_1 \\ K_2 r_2 & 1 - K_2 & \cdots & K_2 r_2 & K_2 \check{r}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_N r_N & K_N r_N & \cdots & 1 - K_N & K_N \check{r}_N \\ h & h & \cdots & h & \hat{h} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

ahol

$$h = \frac{\partial H}{\partial s} \qquad \text{és} \qquad \hat{h} = \frac{\partial H}{\partial Q}$$

és valamennyi deriváltat az egyensúlypontban számolunk. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a szimmetrikus esetet, amikor

$$r_1 = \ldots = r_N = r, \quad \check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r} \quad \text{és} \quad K_1 = \ldots = K_N = K\,.$$

Ekkor a (19) sajátérték-egyenlete nagymértékben leegyszerűsödik:

$$(1-K)u_k + Kr\sum_{l\neq k} u_l + K\check{r}v = \lambda u_k \qquad (k=1,2,\ldots,N) \tag{20}$$

$$h\sum_{k=1}^{N} u_k + \hat{h}v = \lambda v\ . \tag{21}$$

Vezessük be az $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$ változót. Ekkor (20) átírható a

$$KrU + K\check{r}v + (1-K-Kr-\lambda)u_k = 0 \tag{22}$$

alakba is. Tegyük fel először, hogy $\lambda = 1-K(1+r)$. Ez a sajátérték az egységkörben van, ha

$$K < \frac{2}{1+r}\ . \tag{23}$$

Különben $u_1 = \ldots = u_N = u$ és így

$$\begin{aligned} (1-K+(N-1)Kr-\lambda)u + K\check{r}v &= 0 \\ Nhu + (\check{h}-\lambda)v &= 0\ . \end{aligned} \tag{24}$$

Nemtriviális megoldás akkor és csak akkor létezik, ha

$$\det\begin{pmatrix} 1-K(1+(1-N)r)-\lambda & K\check{r} \\ Nh & \hat{h}-\lambda \end{pmatrix} = 0\ ,$$

azaz ha λ megoldása következő másodfokú egyenletnek:

$$\lambda^2 + \lambda(-1-\hat{h}+Kz) + (\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r}) = 0 \tag{25}$$

ahol $z = 1+(1-N)r > 0$. Ismeretes a következő eredmény (ld. például Bischi, Chiarella, Kopel és Szidarovszky, 2006):

1. Lemma. *A $\lambda^2+\lambda p+q=0$ másodfokú egyenlet (p, q valós együtthatók) gyökei az egységkörben akkor és csak akkor vannak, ha*

$$q<1\ ,\quad q-p+1>0 \quad \text{és} \quad q+p+1>0\ .$$

Ez alapján a (25) egyenlet gyökei akkor vannak az egységkörben, ha

$$\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r} < 1 \tag{26}$$

$$\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r}+1+\hat{h}-Kz+1 > 0 \tag{27}$$

$$\hat{h}-K\hat{h}z-NhK\check{r}-1-\hat{h}+Kz+1 > 0\ . \tag{28}$$

Természetes feltevés, hogy $h>0$ és $-1<\hat{h}<1$ azaz H növekszik s-ben és nem nagyon változik, ha Q értéke nő vagy csökken. Ekkor a következő eseteket kell tekintenünk:

(a) Ha $\hat{h}z + Nh\check{r} < 0$, akkor (26) feltétele az, hogy

$$K < \frac{\hat{h} - 1}{\hat{h}z + Nh\check{r}}.$$

A (28) reláció biztosan teljesül, a (27) feltétele pedig az, hogy

$$K < \frac{2(1 + \hat{h})}{z(1 + \hat{h}) + Nh\check{r}} \,. \tag{29}$$

Ebben az esetben a rendszer akkor lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha K értéke elég alacsony. Ez pedig azt jelenti, hogy a termelők nem nagyon agresszívak abban, ahogy válaszfüggvényüket követik lépésről lépésre.

(b) Ha $\hat{h}z + Nh\check{r} \geq 0$, akkor (26) nyilvánvalóan teljesül, valamint (28) is. A (27) fennállásának pedig az a feltétele, hogy (29) teljesüljön. Ebben az esetben is akkor lokálisan aszimptotikusan stabilis a rendszer, ha K értéke elég kicsi. Tehát a következő eredményt kaptuk.

1. Tétel. *A* (18) *rendszerdinamikával a szimmetrikus eset egyensúlypontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha K értéke elég kicsi, azaz eleget tesz a* (29) *feltételnek.*

Könnyen összehasonlíthatjuk a fenti stabilitási feltételeket a klasszikus Cournot modellel, amikor $p'_Q = p''_{xQ} = h = \hat{h} = \check{r} = 0$. Ekkor a sajátértékek: $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = 1 + \hat{h} - Kz = 1 - K(1 + (1 - N)r)$.

Az első sajátérték nyilvánvalóan az egységkörben van, a második akkor van az egységkörben, ha

$$K < \frac{2}{1 + (1 - N)r} = \frac{2}{z}. \tag{30}$$

Egyszerű számítással belátható, hogy

$$\frac{2}{z} \leq \frac{2(1 + \hat{h})}{z(1 + \hat{h}) + Nh\check{r}} \,,$$

ami azt mutatja, hogy az árfüggvény időbeli kölcsönhatása a fenti feltételek mellett stabilizáló hatással van a rendszerre, hiszen a megengedett K tartományt növeli.

4 Termékmennyiség növelési költségek figyelembe vétele

Tegyük most fel, hogy a termékmennyiség növelésének költségét is figyelembe veszik a termelők az optimális termékmennyiség meghatározásakor. A $(t+1)$-edik időperiódusban eszerint a k-adik játékos kifizetőfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N \mid x_k(t)) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) - A_k(x_k - x_k(t)) \,, \tag{31}$$

ahol A_k a termékmennyiség növelési költségfüggvénye. Tegyük most fel, hogy

(A) $p' < 0, \quad c_k' \geq 0, \quad A_k' \geq 0,$

(B) $p' + x_k p'' \leq 0$

(C) $p' - c_k'' < 0 \quad$ és $\quad A_k'' > 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ és $x_k(t)$ értékek mellett. Vegyük észre, hogy φ_k szigorúan konkáv x_k-ban, és így a válaszfüggvény a (14)-hez hasonló módon adódik, valamint implicit differenciálással

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c_k'' - A_k''}$$

és

$$\check{r}_k = \frac{\partial R_k}{\partial x_k(t)} = -\frac{A_k''}{2p' + x_k p'' - c_k'' - A_k''} \ .$$

Az (A)–(C) feltételek mellett

$$-1 < r_k \leq 0 \leq \check{r}_k < 1 \quad \text{és} \quad -1 < r_k - \check{r}_k \ . \tag{32}$$

A (8) dinamikus modell ebben az esetben a következőképpen módosul:

$$x_k(t+1) = x_k(t) + K_k \left(R_k \left(\sum_{l \neq k} x_l(t), x_k(t) \right) - x_k(t) \right) \quad (k = 1, 2, \ldots N) \ . \tag{33}$$

A rendszer stabilitását vizsgáljuk meg ismét, és az eredményeket összehasonlítjuk a klasszikus Cournot modellel.

A rendszer Jacobi-mátrixa:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - K_1(1 - \check{r}_1) & K_1 r_1 & \cdots & K_1 r_1 \\ K_2 r_2 & 1 - K_2(1 - \check{r}_2) & \cdots & K_2 r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_N r_N & K_N r_N & \cdots & 1 - K_N(1 - \check{r}_N) \end{bmatrix} . \tag{34}$$

Tegyük fel ismét az egyszerűség kedvéért, hogy a játék szimmetrikus, azaz $K_1 = \ldots = K_N = K$, $r_1 = \ldots = r_N = r$ és $\check{r}_1 = \ldots = \check{r}_N = \check{r}$. A $\mathbf{J}$ mátrix sajátérték-egyenlete nagymértékben leegyszerűsödik:

$$(1 - K(1 - \check{r}))u_k + Kr \sum_{l \neq k} u_l = \lambda u_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \ . \tag{35}$$

Legyen ismét $U = \sum_{k=1}^{N} u_k$, ekkor

$$KrU + (1 - K(1 - \check{r}) - Kr - \lambda)u_k = 0 \ . \tag{36}$$

Ha $\lambda = 1 - K(1 - \check{r}) - Kr$, akkor ez a sajátérték akkor van az egységkörben, ha

$$K < \frac{2}{r - \check{r} + 1} \ , \tag{37}$$

különben $u_1 = \ldots = u_N = u$, így (35) a következőképpen egyszerűsödik:

$$(1 - K(1 - \check{r}) + Kr(N-1) - \lambda)u = 0 \ ,$$

és nemtriviális megoldásának a feltétele az, hogy

$$\lambda = 1 - K(1 - \check{r}) + Kr(N-1) = 1 - K(1 - \check{r} + r - rN) \ .$$

Vegyük észre, hogy K szorzója

$$1 + (r - \check{r}) - rN$$

mindig pozitív, így a rendszer lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha

$$K < \frac{2}{1 + (r - \check{r}) - rN} \ , \tag{38}$$

azaz ha K értéke elég kicsi. Minthogy $r \leq 0$, (38) szigorúbb egyenlőtlenség, mint (37), azért (38) a stabilitási feltétel. Tehát a következőt igazoltuk.

2. Tétel. *A* (33) *rendszerdinamikával a szimmetrikus eset egyensúlypontja lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha* K *eleget tesz a* (38) *feltételnek, azaz elég kicsi értékű.*

A klasszikus Cournot modell esetében $\check{r} = 0$, így a stabilitási feltétel (30) teljesülése. Minthogy a (38) egyenlőtlenségben $\check{r} \geq 0$, (38) jobb oldala nagyobb, mint (30) jobb oldala. Tehát a termékmennyiség növelési költségeinek figyelembe vétele is stabilizáló tényező.

5 Ipari szennyeződés csökkentésének figyelembe vétele

Tegyük most fel, hogy a termelők közös telepen tisztítják az általuk produkált ipari szennyeződést, és a költséget a termékmennyiségek arányában osztják fel egymás között. Ekkor a k-adik játékos kifizetőfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) - x_k \frac{T(x_k + s_k)}{x_k + s_k} \ , \tag{39}$$

ahol T a szennyeződés tisztítási költségfüggvénye. Ha bevezetjük a

$$P(x_k + s_k) = p(x_k + s_k) - \frac{T(x_k + s_k)}{x_k + s_k}$$

függvényt, akkor (39) formálisan is a klasszikus Cournot modell profitfüggvényének alakjaként írható át:

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k P(x_k + s_k) - c_k(x_k) \ . \tag{40}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen

$$g(x_k + s_k) = \frac{T(x_k + s_k)}{x_k + s_k} ,$$

és tegyük fel, hogy g is kétszer folytonosan differenciálható a $\left[0, \sum_{k=1}^{N} L_k\right]$ zárt intervallumon. Ekkor a k-adik játékos válaszfüggvényének a deriváltja (6) alapján

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{P' + x_k P''}{2P' + x_k P'' - c_k''} , \tag{41}$$

és a lokális aszimptotikus stabilitás feltétele a (10) egyenlőtlenség. Minthogy (10) bal oldala r_k-nak növekvő függvénye, a szennyeződés tisztításának figyelembevétele stabilizáló hatású, ha

$$-\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c_k''} < -\frac{p' - g' + x_k(p'' - g'')}{2p' - 2g' + x_k p'' + x_k g'' - c_k''} . \tag{42}$$

Ezt az összefüggést a következőképpen írhatjuk:

$$x_k(p'g'' - g'p'') < c_k''(g' + x_k g'') , \tag{43}$$

ha feltesszük, hogy a p és c_k függvények kielégítik a klasszikus Cournot modellnél tett feltételeket. Ezekből azonban nem következik a (43) reláció teljesülése, így a stabilizáló hatás nem garantált általában.

6 Költségkölcsönhatások figyelembevétele

Az egyes termelők közös munkaerőpiacról és közös termelési tényező piacról szerzik be a termelésükhöz szükséges munkaerőt, anyagokat, energiát stb., így termelési költségüket a többi termelő termelési mennyisége is befolyásolja a beszerzési árakon keresztül. Hasonló a helyzet, ha a termelők kutatást is folytatnak, hogy termelésüket még gazdaságosabbá tegyék. Kutatási eredményeiket a többi termelő is hasznosíthatja, és minthogy a kutatásra fordított összegek magasabbak nagyobb termelési volumenek esetén, a többi termelő költsége implicit módon függ a kutatást végző termelő termékmennyiségétől. Amennyiben az összes termelő folytat kutatást, az összes költségfüggvény függhet az összes termelő termékmennyiségétől. Ezt a körülményt a legegyszerűbben úgy modellezhetjük, hogy feltesszük, hogy a k-adik termelő költségfüggvénye x_k-n kívül s_k-tól is függ, azaz profitfüggvénye

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k, s_k) \tag{44}$$

alakú. Könnyen látható, hogy

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = p + x_k p' - c_{kx}'$$

és

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_k^2} = 2p' + x_k p'' - c''_{kxx} \ ,$$

így, ha feltesszük, hogy

(A) $p' < 0; \quad c'_{kx} > 0$;

(B) $p' + x_k p'' \leq 0$;

(C) $p' - c''_{kxx} < 0$

minden megengedett $x_1, \ldots, x_N$ mellett, akkor φ_k szigorúan konkáv x_k-ban, így a válaszfüggvény egyértelmű, valamint implicit differenciálással könnyen kimutatható, hogy

$$r_k = \frac{\partial R_k}{\partial s_k} = -\frac{p' + x_k p'' - c''_{kxs}}{2p' + x_k p'' - c''_{kxx}} \ , \tag{45}$$

ahol a nevező mindig negatív. Összehasonlítva ezt az egyenlőséget (10)-zel, azonnal láthatjuk, hogy amennyiben

$$c''_{kxs} < 0 \tag{46}$$

és (45) számlálója negatív, költségkölcsönhatások figyelembevétele stabilizálja a rendszert. Ha $c''_{kxs} > 0$, akkor pedig destabilizáló hatású.

A (46) feltétel azt jelenti, hogy a c'_{kx} derivált csökken s_k-ban. Ez pedig azt jelenti, hogy a c'_k marginális költség csökken, ha a többi termelő együttes termékmennyisége növekszik. Ez a feltétel reálisnak tűnik, ha a többi termelő kutatási eredménye csökkenő hatással van a k-adik termelő marginális költségére.

7 Következtetések

Ebben a dolgozatban dinamikus oligopol modelleket vizsgáltunk a klasszikus Cournot modellnél reálisabb feltételek mellett. Nemcsak a modelleket fogalmaztuk meg, hanem azok stabilitási feltételeit is összehasonlítottuk a klasszikus Cournot modell esetével. Feltételeket vezettünk le, amelyek garantálják, hogy a modellek kibővítése stabilizáló hatással is bír a nagyobb realitástartalom mellett.

Négy konkrét esetet vizsgáltunk meg egymástól függetlenül diszkrét időskála feltételezése mellett. A folytonos eset, valamint a különböző tényezők együttes figyelembevétele egy következő dolgozat tárgya lesz.

Irodalom

1. Cournot, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie de Richesses.* Hachette, Paris (Angol fordítás (1960): *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* Kelley, New York.)

2. Okuguchi, K. (1976): *Expectations and Stability in Oligopoly Models.* Springer-Verlag, Berlin, New York.
3. Okuguchi, K. és F. Szidarovszky (1999): *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms.* Springer-Verlag, Berlin, New York.
4. Bischi, G-I., C. Chiarella, M. Kopel és F. Szidarovszky (2006): *Nonlinear Oligopolies: Stability and Bifurcations.* Elsevier (megj. alatt).
5. Theocharis, R. D. (1959): On the Stability of the Cournot Solution on the Oligopoly Problem. *Review of Econ. Studies*, **27**, 133–134.

DYNAMIC COURNOT MODELS

In this paper we . . .

AZ ESZKÖZÁRAZÁS MÁSODIK ALAPTÉTELE[1]

MEDVEGYEV PÉTER
Corvinus Egyetem

A dolgozatban röviden bemutatjuk az eszközárazás második alaptételét. A bizonyítás során felhasználjuk a Dalang–Morton–Wilinger tétel bizonyításában használt állításokat.

A dolgozat a korábban megjelent[2], a Dalang–Morton–Willinger tétellel foglalkozó dolgozat szerves folytatása, kiegészítése. A jelen dolgozat az eszközárazás második alaptételét és az úgynevezett árazási formulát tárgyalja. A dolgozatban szereplő állítások és igazolásaik szorosan összefüggnek a Dalang–Morton–Willinger tétellel, amelyet szokás az eszközárazás első alaptételének nevezni. A két alaptétel mögötti közös modellben $t = 0, 1, \ldots, T < \infty$ számú diszkrét időperiódus és minden időperiódusban m számú eszköz áll rendelkezésre. Egy tetszőleges t időszakban az eszközök árat az $S(t)$ m-dimenziós vektor tartalmazza. Az $S(t)$ minden t-re valószínűségi változó. A modellben szereplő bizonytalanságot leíró (- , $\mathcal{A}, \mathbf{P}$) valószínűségi mezőre semmilyen megkötést nem teszünk. Befektetési stratégián egy

$$(\theta(t))_{t=1}^{T}$$

valószínűségi változókból álló m-dimenziós T hosszú vektorsorozatot értünk. A modell további külső adottsága egy $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}$ filtráció. Az S folyamatról feltesszük, hogy adaptált, vagyis minden t időpontban az $S(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára nézve. A θ előrejelezhetőek, vagyis hogy minden t időpontban a $\theta(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_{t-1}$ σ-algebrára nézve. A két folyamat időben eltérő időpontokban kerül ,,meghatározásra", és éppen ez az időben való eltérés reprezentálja a modell közgazdasági tartalmát: A $t-1$ időpontban eldöntésre kerül a $[t-1, t)$ időszakra érvényes portfolió. A döntés időpontjában az eszközök ára csak a $t-1$ időpontig ismert. Az eszközök S árai a $(t-1, t)$ időperiódusban megváltozhatnak. A $t-1$ időpontban hozott döntésünk következménye, hogy a t időpontban a portfoliónk értékében[3]

$$\langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle$$

értékváltozás fog bekövetkezni. A teljes időperiódus alatt a θ befektetési

[1] Beérkezett: 2006. október 30. E-mail: `medvegyev@math.bke.hu`.

[2] V.ö.: [10]. A dolgozat a Corvinus Egyetemen tartott pénzügyi matematikai előadásaim anyagára támaszkodik. Lásd: www.medvegyev.uni-corvinus.hu/finance

[3] $\langle a, b\rangle$ jelöli az a és b vektorok skaláris szorzatát.

stratégia által eredményezett értékváltozás éppen[4]

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \ .$$

Az eszközárazás első és második alaptétele a lehetséges értékváltozások terének matematikai alaptulajdonságait tisztázza.

1 Az eszközárazás első alaptétele

Az első és második alaptétel bizonyításához három egymásra épülő lemmára van szükség[5]. Ezek mindegyike értelemszerűen bemutatásra került a Dalang–Morton–Willinger tétel igazolása során, de a teljesség kedvéért felidézzük őket. A diszkrét idejű, de tetszőleges véletlen állapottérrel rendelkező pénzügyi modellek matematikai tárgyalásának kulcsa a következő kompaktsági lemma:

1.1 Lemma (Kabanov–Stricker). *Legyen (η_n) tetszőleges, $\mathbb{R}^m$ értékű, mérhető függvények sorozata, és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre az (η_{σ_k}) sorozat minden kimenetelre konvergens. Másrészről, ha $\sup_n \|\eta_n\| = \infty$, akkor van olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre $\lim_{k\to\infty} \|\eta_{\sigma_k}\| = \infty$ minden kimenetelre.*

A kompaktsági lemma a Bolzano–Weierstrass tétel kézenfekvő általánosítása. Mivel az $(\eta_n(\omega))$ sorozat minden ω kimenetelre a lemma feltétele miatt korlátos, ezért minden ω kimenetelre triviális módon található olyan, az ω kimeneteltől függő $(\sigma_k(\omega))$ részindex sorozat, amelyre az $\left(\eta_{\sigma_k(\omega)}(\omega)\right)_k$ sorozat konvergens. A lemma lényege, hogy a $\sigma_k(\omega)$ függvények választhatók mérhetőnek.

A következő lemma az előző következménye és az egy időszak alatt keletkező portfolióváltozások alterének zártságát állítja[6].

1.2 Lemma (Stricker). *Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ tetszőleges, valamely $\mathcal{A}$ σ-algebra szerint mérhető függvények. Tegyük fel, hogy $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ és tekintsük*

[4] Érdemes hangsúlyozni, hogy pénzügyi szempontból az összeg tulajdonképpen értelmetlen, ugyanis nem azonos időszakhoz tartozó értékadatokat adunk össze. Mivel a diszkontálás kérdését nem vizsgáljuk az alábbi állítások mindegyikében az eszközök S ára és nem az $\overline{S}$ diszkontált árfolyamok szerepelnek. Ha diszkontált összegeket akarunk vizsgálni és szeretnénk használni az alábbi „sztochasztikus integrál” formulát, akkor be kell vezetni az önfinanszírozó portfólió fogalmát és meg kell mutatni, hogy minden önfinanszírozó portfólió értékfüggvénye felírható „sztochasztikus integrálként”.

[5] A dolgozat célja annak hangsúlyozása, hogy a kompaktsági lemma, illetve az L tér ebből következő zártsága nem csak az első, hanem a második alaptétel igazolásában is kulcsszereppel bír.

[6] Emlékeztetünk, hogy $L^0(- \ , \mathcal{G})$ téren a $\mathcal{G}$-mérhető valószínűségi változók terét értjük, konvergencián pedig a sztochasztikus konvergenciát értjük.

az

$$L \circeq \left\{ h : h = \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i, \varphi_i \in L^0(\mathcal{G}, \mathbf{P}) \right\}$$

lineáris teret[7]*. Az L lineáris tér zárt az $L^0(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben.*

A lemma kiterjeszthető tetszőleges véges időhorizontra. Ennek igazolásához felhasználtuk a nincs arbitrázs feltételt:

1.3 Definíció. *Legyen*

$$R \circeq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\},$$

ahol $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ tetszőleges előrejelezhető stratégia. Legyen

$$A \circeq R - L_+^0(-, \mathcal{A}, \mathbf{P}) .$$

Azt mondjuk, hogy a modellben nincsen arbitrázs, ha

$$A \cap L_+^0(-, \mathcal{A}, \mathbf{P}) = \{0\} .$$

A nincsen arbitrázs feltétel következménye a következő:

1.4 Lemma (Kabanov–Stricker). *Ha nincsen arbitrázs*[8]*, akkor a T-hosszú előrejelezhető befektetési stratégiák eredményeként előálló lehetséges portfolió értékváltozások*

$$\begin{aligned} R &\circeq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\} \circeq \\ &\circeq \left\{ H : H = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} \left(S_i(t) - S_i(t-1) \right) \theta_i(t) \right\} \end{aligned}$$

altere zárt az $L^0(-, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben.

Az előző dolgozat legfontosabb eredménye a következő tétel volt:

1.5 Tétel (Dalang–Morton–Willinger). *A következő állítások ekvivalensek:*

1. $A \cap L_+^0 = \{0\}$.
2. $A \cap L_+^0 = \{0\}$ *és* $A = \mathrm{cl}(A)$.
3. $\mathrm{cl}(A) \cap L_+^0 = \{0\}$.
4. *Megadható olyan $\mathbf{Q}$ valószínűség, amely ekvivalens az eredeti $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékkel, amelyre a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym derivált korlátos, és amely mellett az S m-dimenziós martingál.*

---

[7]Nyilvánvalóan az L elemei $\mathcal{A}$-mérhetőek, de a φ_i súlyok $\mathcal{G}$-mérhetőek.

[8]Valójában az R zártságához nem szükséges a nincs arbitrázs feltétel. V.ö.: [2].

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \geq 0 \ ,$$

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Másképpen fogalmazva, az első pont szerint nincsen arbitrázs.

2 A piac teljessége, az eszközárazás második alaptétele

A származtatott termékek árazásával kapcsolatos igen fontos fogalom a teljesség fogalma. A teljesség fogalma azt jelenti, hogy a jövőbeli követelések kivétel nélkül fedezhetőek:

2.1 Definíció. *Azt mondjuk, hogy az S eszközár folyamat által definiált piac a $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ időhorizonton teljes, ha tetszőleges H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változóhoz található olyan*

$$(\theta_i(t))_{i=1}^{m}, \quad t = 1, \ldots, T$$

előrejelezhető stratégia és λ valós szám, hogy

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle$$

ahol az egyenlőség valószínűségi változók között érvényes, vagyis majdnem minden kimenetelre teljesül.

Ezt követően térjünk rá az eszközárazás második alaptételére:

2.2 Tétel (Az eszközárazás második alaptétele). *Tegyük fel, hogy az*

$$(S_i(t))_{i=1}^{m}, \quad t = 0, \ldots, T$$

eszközár folyamat által definiált piacon nincsen arbitrázs. A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték[9] *az $(-\ , \mathcal{F}_T)$ téren egyértelmű.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása két részből áll.

1. Tegyük fel, hogy a piac teljes és legyenek $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ két különböző martingálmérték. Mivel a két mérték különböző, ezért van olyan $F \in \mathcal{F}_T$, hogy $\mathbf{Q}(F) \neq \mathbf{R}(F)$. A feltételezett teljesség miatt van olyan $(\varphi(t))_{t=1}^{T}$ m-dimenziós előrejelezhető stratégia, hogy

$$\chi_F = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \varphi(t) \rangle \ . \tag{1}$$

[9] Emlékeztetünk, hogy martingálmérték alatt egy olyan az $(-\ , \mathcal{F}_t)$ téren értelmezett $\mathbf{Q}$ valószínűségi mértéket értünk, amelyre nézve az S eszközár folyamat martingál.

A bizonyítás alapgondolata, hogy mind a két oldalon alkalmazzuk a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mértékek szerinti várható érték operátorokat. A gondolatmenet kulcsa, hogy tetszőleges $\mathbf{P}$ martingálmérték esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T}\langle S(t)-S(t-1),\varphi(t)\rangle\right)=0\ , \tag{2}$$

amiből

$$\mathbf{Q}(F)=\lambda=\mathbf{R}(F)\ ,$$

ami lehetetlen. A (2) sor igazolásában gondot jelent, hogy mivel a φ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, ezért sem a kiemelési szabályt, sem az integrál additivitását nem tudjuk közvetlenül használni. A fő probléma abból ered, hogy az (1) sorban szereplő összeg nem feltétlenül martingál, csak lokális martingál. Diszkrét és véges időhorizonton a lokális martingálok struktúrája azonban viszonylag egyszerű: Miként a következő pontban meg fogjuk mutatni[10], diszkrét és véges időhorizont esetén ha valamely lokális martingál utolsó értéke integrálható, akkor a folyamat martingál. Mivel a χ_F változó triviálisan integrálható, ezért a (2) sorban szereplő kifejezés martingál, így a sorban szereplő egyenlőség teljesül.

2. Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. A feltétel szerint a piacon nincsen arbitrázs, így van olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely mellett az S folyamat minden koordinátája martingál. Definíció szerint legyen

$$L \mathrel{\hat{=}} \left\{\lambda+\sum_{t=1}^{T}\langle S(t)-S(t-1),\varphi(t)\rangle\right\}\ ,$$

ahol θ tetszőleges előrejelezhető portfólió és λ tetszőleges valós szám. Mivel a piac nem teljes, ezért $L \neq L^0(- ,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$. Legyen H_T egy olyan követelés, amely nem állítható elő. Mivel csak véges sok valószínűség változó szerepel a modellben a valószínűségi mérték mindig kicserélhető úgy, hogy a modellben szereplő összes változó integrálható legyen. Ehhez elegendő a $\mathbf{P}$ helyett a

$$\mathbf{P}'(A) \mathrel{\hat{=}} C\int_A \exp\left(-\left\|\eta\right\|\right)\, d\mathbf{P}$$

mértéket venni, ahol az η az S folyamatot alkotó változókból és a H_T változóból álló vektor[11]. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{P}'$ ekvivalensek[12], így a tétel feltételei nem módosulnak, ha a $\mathbf{P}$ helyett a $\mathbf{P}'$ valószínűségi mértéket vesszük. Emlékeztetünk, hogy az első alaptételben az arbitrázs hiánya miatt létező martingálmérték Radon–Nikodym deriváltja választható korlátosnak. Így feltehető, hogy nem csak az $(S(t))_{t=1}^{T}$ oszlopai, hanem a H_T is integrálható a $\mathbf{Q}$ martingálmérték alatt.

[10] V.ö.: 3.6 Állítás.

[11] A C konstanst úgy kell meghatározni, hogy a $\mathbf{P}'$ szintén valószínűségi mérték legyen.

[12] Vagyis a két mérték szerint a nullmértékű halmazok megegyeznek.

Megmutatjuk, hogy az L zárt az $L^1(- \ ,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$ térben. Emlékeztetünk, hogy az

$$R \circeq \left\{ \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\}$$

az L^0 egy zárt altere. A Markov-egyenlőtlenség miatt az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az $R \cap L^1$ zárt altér az L^1-ben. Valószínűségi mértékekről lévén szó $1 \in L^1$, így ha az egyszerűség kedvéért továbbra is L jelöli az L és az L^1 metszetét, akkor az L felírható mint egy zárt R altér és egy egy-dimenziós altér összege. Ha $1 \in R$, akkor készen vagyunk, az L zárt. Ha $1 \notin R$, akkor minden $l \in L$ felírható $l = \lambda 1 + r$ alakban. Ha $l_n \to l_\infty$ az L altérben, akkor egyedül az okozza a problémát, hogy nem tudjuk, hogy az (l_n)-hez tartozó (λ_n) sorozat korlátos, vagy sem. Legyen d az R és az 1 távolsága. Mivel az R zárt és $1 \notin R$, ezért $d > 0$. Az (l_n) sorozat konvergens, így korlátos is. Legyen c az (l_n) sorozat korlátja. Mivel az R altér, ezért ha $r_n \in R$, akkor

$$\left(-\frac{r_n}{\lambda_n} \right) \in R \, ,$$

így

$$c \geq |\lambda_n 1 + r_n| = |\lambda_n| \left| 1 + \frac{r_n}{\lambda_n} \right| = |\lambda_n| \left| 1 - \left(-\frac{r_n}{\lambda_n} \right) \right| \geq |\lambda_n| \, d \, ,$$

amiből felhasználva, hogy $d > 0$,

$$\frac{c}{d} \geq |\lambda_n| \ ,$$

vagyis a (λ_n) sorozat korlátos. Ezért a (λ_n) számsorozatnak van konvergens részsorozata. Erre áttérve feltehető, hogy a $(\lambda_n 1)$ sorozat konvergens. Mivel az összeg konvergens, ezért az (r_n) sorozat is konvergens. Mivel az R zárt, ezért az (r_n) határértéke az R-ben van, és így a $(\lambda_n 1 + r_n)$ egy részsorozatának határértéke az L-ben van. Következésképpen a $(\lambda_n 1 + r_n)$ határértéke is L-ben van.

Mivel a $H_T \notin L$ is integrálható, ezért van olyan eleme az L^1 térnek, amely nincsen benne az L zárt altérben. A Hahn–Banach tétel miatt van olyan $z \in L^\infty(- \ ,\mathcal{F}_T,\mathbf{Q})$, amely elválasztja az L alteret és a H_T változót. Mivel az L altér, ezért az elválasztó síkot megadó $z \in L^\infty$ függvényre

$$\langle z, l \rangle \circeq \int_{-} zl \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(zl) = 0, \quad l \in L \, . \tag{3}$$

Mivel a $\varphi(t) = 0$ és $\lambda = 1$ egy lehetséges előrejelezhető stratégia, ezért

$$\langle z, 1 \rangle \circeq \int_{-} z1 \, d\mathbf{Q} = \int_{-} z \, d\mathbf{Q} = 0 \, .$$

Legyen

$$g \circeq 1 + \frac{z}{2\,\|z\|_\infty} > 0 \, ,$$

és definiáljuk az

$$\mathbf{R}(A) \mathrel{\hat{=}} \int_A g \, d\mathbf{Q}$$

mértéket. A $g = d\mathbf{R}/d\mathbf{Q}$ felülről korlátos és nagyobb vagy egyenlő, mint egy pozitív szám, így a két mérték alatt az integrálható változók megegyeznek. Világos, hogy $g > 0$, és

$$\mathbf{R}(-\ ) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(z)}{2 \left\| z \right\|_\infty} = 1 \ ,$$

tehát az $\mathbf{R}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték. Mivel tetszőleges θ előrejelezhető folyamatra a $\lambda = 0$ mellett

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \in L \ ,$$

ezért ha a θ korlátos, akkor a (3) sor felhasználásával

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) \mathrel{\hat{=}} \\
\mathrel{\hat{=}} \quad & \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \left(1 + \frac{z}{2 \left\| z \right\|_\infty} \right) \right) = \\
= \quad & \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) \ .
\end{aligned}$$

Mivel az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, és a θ előrejelezhető, ezért a jobb oldali kifejezés, tetszőleges korlátos θ esetén nulla, ezért a bal oldal is nulla. Ha a θ azonosan nulla, kivéve a $t-1$ időpontban, ahol az értéke χ_F, ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}} \big((S(t) - S(t-1)) \chi_F \big) = 0 \ ,$$

ami nem más, mint

$$\int_F S(t) \, d\mathbf{R} = \int_F S(t-1) \, d\mathbf{R} \ ,$$

vagyis a feltételes várható érték definíciója alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}} (S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = S(t-1) \ .$$

Tehát az S folyamat az $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$ mérték esetén is martingál, következésképpen a martingálmérték nem egyértelmű. □

3 Lokális martingálok diszkrét és véges idő-horizont esetén

Ebben a pontban teljesség kedvéért röviden felidézzük[13] a diszkrét idejű lokális martingálokra vonatkozó legfontosabb állításokat.

Ha ξ nem negatív valószínűségi változó és $\mathcal{F}$ egy feltételi σ-algebra, akkor mindig értelmes az $\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$ feltételes várható érték[14]. Ilyenkor könnyen igazolható[15], hogy a feltételes várható érték operáció monoton, additív és teljesül rá a toronyszabály. Nem negatív változók körében ugyancsak nyilvánvaló, hogy teljesül a kiemelési szabály. Ha a ξ-nek nincs véges várható értéke, akkor előfordulhat, hogy a feltételes várható érték nem valószínűségi változó, ugyanis végtelen értéket is felvehet. Ez indokolja a következő definíciót:

3.1 Definíció. *Legyen ξ valószínűségi változó, $\mathcal{F}$ feltételi σ-algebra. Ha a ξ^+ és ξ^- változóknak létezik véges értékű feltételes várható értéke, akkor az*

$$\mathbf{E}\left(\xi^+ \mid \mathcal{F}\right) - \mathbf{E}\left(\xi^- \mid \mathcal{F}\right)$$

kifejezést általánosított feltételes várható értéknek mondjuk, és a megszokott

$$\mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F})$$

módon jelöljük.

Könnyen belátható, hogy a feltételes várható értékre vonatkozó szokásos számolási szabályok[16] átvihetők általánosított feltételes várható értékekre is.

3.2 Definíció. *A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ diszkrét idejű sorozatot általánosított martingálnak mondjuk, ha*

1. *minden n-re az $\mathbf{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$ általánosított feltételes várható érték létezik, és*

2. *minden n-re*

$$\mathbf{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) = \xi_n ,$$

[13] V.ö.: [6,8,12].

[14] A feltételes várható érték definíciója nem teljesen egységes az irodalomban. Bizonyos szerzők csak integrálható változók esetén definiálják a feltételes várható értéket, vagyis megkövetelik, hogy a pozitív és a negatív rész integrálja véges legyen. Ugyanakkor nem negatív változók esetén mindig létezik olyan, esetlegesen végtelen értéket is felvevő változó, amely mérhető a feltételi σ-algebra szerint és kielégíti a feltételes várható értéket definiáló integrálegyenletet. [8], 9.14. Állítás, 293. oldal. Ennek oka, hogy a Radon–Nikodym-tételben a deriválandó mérték tetszőleges lehet. [8], 3.46. Tétel, 137. oldal. Éppen ezért célszerű a feltételes várható értéket tetszőleges nem negatív változó esetén is definiálni. Előjeles változók feltételes várható értékének létezéséhez, vagyis olyan a feltételi σ-algebra szerint mérhető függvény létezéséhez, amely kielégíti az integrálegyenletet, elegendő megkövetelni, hogy vagy a változó pozitív része, vagy a negatív része integrálható legyen.

[15] A tulajdonságok karakterisztikus és lépcsős függvényekre teljesülnek és a nem negativitás miatt alkalmazni lehet a monoton konvergencia tételt.

[16] Pl. kiemelési és torony szabály, additivitás stb. V.ö.: [8,12].

ahol az egyenlőség osztályok között, tehát **P** *majdnem mindenhol teljesül*[17].

Hangsúlyozni kell, hogy nem tételezzük fel, hogy a ξ_n változók várható értéke véges, sőt azt sem követeljük meg, hogy legyen a változónak végtelen várható értéke, éppen ez különbözteti meg az általánosított martingált a martingáltól. Megelégszünk avval, hogy a „martingálegyenlőségben" szereplő általánosított feltételes várható érték létezik, és véges.

3.3 Definíció. *Valamely $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ véges, vagy végtelen sorozatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható (τ_k) megállási idők olyan $\tau_k \nearrow \infty$ „lokalizációs" sorozata, amelyre a*

$$\xi_n^{\tau_k} \triangleq \chi(\tau_k > 0)\, \xi_{n \wedge \tau_k}$$

megállított folyamatok mindegyike martingál az eredeti $(\mathcal{F}_n)$ filtrációra nézve.

3.4 Definíció. *A $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ sorozatot martingáltranszformáltnak*[18] *mondjuk, ha létezik olyan*

$$(M_n, \mathcal{F}_n)$$

martingál, és olyan (θ_n) sorozat, hogy minden n-re a θ_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető[19]*, és*

$$\xi_n = \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} \theta_k (M_k - M_{k-1}) \ . \tag{4}$$

A diszkrét idejű lokális martingálok struktúrája igen egyszerű[20]:

3.5 Állítás. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *a (ξ_n) lokális martingál,*
2. *a (ξ_n) általánosított martingál,*
3. *a (ξ_n) felírható (4) martingáltranszformáltként.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy teljesül az 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1. implikáció sorozat.

1. Legyen (ξ_n) lokális martingál, és legyen (τ_k) egy lokalizációs sorozat. A martingál definíciója alapján a $\xi_{n+1}^{\tau_k}$ várható értéke véges, és így a feltételes

[17] Ez úgy is fogalmazható, hogy a ξ_{n+1} változó pozitív, illetve negatív részének $\mathcal{F}_n$ szerinti feltételes várható értéke megegyezik a ξ_n pozitív, illetve negatív részével.

[18] A martingáltranszformáltak tekinthetők diszkrét idejű sztochasztikus integráloknak.

[19] Természetszerűleg $\mathcal{F}_{-1} \triangleq \mathcal{F}_0$.

[20] Az állítás lényegében azt állítja, hogy diszkrét időtartomány esetén a lokális martingálok „rosszul" integrálható martingálok. Folytonos időtartomány esetén ez hangsúlyozottan nincsen így.

várható érték is véges, ezért

$$\begin{aligned}
\infty &> \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}^{\tau_k}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\left|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}\right| \chi\left(\tau_k > 0\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \geq \\
&\geq \mathbf{E}\left(\left|\xi_{(n+1)\wedge\tau_k}\right| \chi\left(\tau_k > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \chi\left(\tau_k > n\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \chi\left(\tau_k > n\right) \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)
\end{aligned}$$

ugyanis mivel a τ_k megállási idő, ezért a $\chi\left(\tau_k > n\right)$ $\mathcal{F}_n$-mérhető minden n-re, és ezért alkalmazható a nem negatív változókra vonatkozó kiemelési szabály. A lokalizációs sorozat definíciója miatt majdnem minden ω kimenetelre, mivel $\tau_k \nearrow \infty$, ha k elég nagy

$$\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) = \chi\left(\tau_k(\omega) > n\right) \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right)(\omega) < \infty \ ,$$

következésképpen majdnem mindenhol $\mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) < \infty$. Nyilvánvalóan $\xi_{n+1}^{\pm} \leq \left|\xi_{n+1}\right|$ és így léteznek és végesek a $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\pm} \mid \mathcal{F}_n\right)$ feltételes várható értékek, így definíció szerint létezik az $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)$ általánosított feltételes várható érték. Természetesen az általánosított feltételes várható értékre nem értelmezhető a feltételes várható értéket definiáló integrálegyenlet. Jelölje $\mathcal{G}_n$ az olyan $F \in \mathcal{F}_n$ halmazokat, amelyekre

$$\int_F \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}\left(\left|\xi_{n+1}\right| \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} < \infty \ .$$

A $\xi_n^{\tau_k}$ martingál, ezért a $\left|\xi_n^{\tau_k}\right|$ szubmartingál, tehát

$$\begin{aligned}
\int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_n\right| d\mathbf{P} &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_n^{\tau_k}\right| d\mathbf{P} \leq \\
&\leq \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_{n+1}^{\tau_k}\right| d\mathbf{P} = \\
&= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P} \ ,
\end{aligned}$$

így, ha $k \to \infty$, akkor a monoton konvergencia tétel miatt

$$\int_F \left|\xi_n\right| d\mathbf{P} \leq \int_F \left|\xi_{n+1}\right| d\mathbf{P} < \infty \ , \tag{5}$$

következésképpen az

$$\begin{aligned}
\int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_n \, d\mathbf{P} &= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_n^{\tau_k} \, d\mathbf{P} = \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_{n+1}^{\tau_k} \, d\mathbf{P} = \\
&= \int_{F\cap\{\tau_k>n\}} \xi_{n+1} \, d\mathbf{P}
\end{aligned}$$

egyenlőség mindkét oldalán használhatjuk a majorált konvergencia tételt, amiből

$$\int_F \xi_n \, d\mathbf{P} = \int_F \xi_{n+1} \, d\mathbf{P}, \quad F \in \mathcal{G}_n \ .$$

Mivel $\mathcal{G}_n$ elemein ξ_n és ξ_{n+1} integrálható, ezért a kiterjesztett feltételes várható érték definíciója alapján minden $F \in \mathcal{G}_n$ halmazra

$$\begin{aligned}
\int_F \xi_{n+1}\, d\mathbf{P} &= \int_F \xi_{n+1}^+ - \xi_{n+1}^-\, d\mathbf{P} = \int_F \xi_{n+1}^+\, d\mathbf{P} - \int_F \xi_{n+1}^-\, d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} - \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} = \\
&= \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^+ \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} - \mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^- \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \\
&\stackrel{\circ}{=} \int_F \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P},
\end{aligned}$$

ahol az utolsó két sorban kihasználtuk, hogy az $\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\pm} \mid \mathcal{F}_n\right)$ kifejezések integrálja az F-re tett megkötés miatt véges, tehát az integrálokat össze lehet vonni. Ebből

$$\int_H \xi_n\, d\mathbf{P} = \int_H \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) d\mathbf{P}, \qquad \forall H \in \mathcal{F}_n, H \subseteq F \in \mathcal{G}_n\ ,$$

következésképpen az $F \in \mathcal{G}_n$ halmazokon

$$\xi_n \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\ .$$

Az $\mathbf{E}\left(|\xi_{n+1}| \mid \mathcal{F}_n\right) < \infty$ miatt az - felbontható megszámlálható $\mathcal{G}_n$-beli halmazra, következésképpen

$$\xi_n \stackrel{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\ ,$$

vagyis a (ξ_n) általánosított martingál.

2. Második lépésként tegyük fel, hogy a (ξ_n) sorozat egy általánosított martingál. Legyen

$$A(n,k) \stackrel{\circ}{=} \left\{k \leq \mathbf{E}\left(|\xi_n - \xi_{n-1}| \mid \mathcal{F}_n\right) < k+1\right\}\ .$$

Mivel a (ξ_n) általánosított martingál, ezért minden fix n esetén az $A(n,k)$ az - egy partíciója, vagyis az $A(n,k)$ halmazok k szerinti egyesítése az - , és két különböző k-ra a halmazok metszete diszjunkt[21]. Vezessük be az

$$u_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^3} \left(\xi_n - \xi_{n-1}\right) \chi_{A(n-1,k)}$$

függvényt. Mivel az $\left(A\left(n-1,k\right)\right)_k$ halmazok partíciót alkotnak, az u_n definíciója értelmes. Nyilvánvaló módon u_n véges és $\mathcal{F}_n$-mérhető.

$$|u_n| \leq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)^3} \left|\xi_n - \xi_{n-1}\right| \chi_{A(n-1,k)}\ .$$

[21]Az egyszerűség kedvéért egy mindenhol véges verziót veszünk.

A két oldalon $\mathcal{F}_{n-1}$ szerint feltételes várható értéket véve és használva a feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tételt és a nem negatív változókra vonatkozó kiemelési szabályt valamint a nem negatív változók körében az additivitást:

$$\mathbf{E}\left(|u_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \le \sum_{k\ge 0} \frac{\chi_{A(n-1,k)}}{(k+1)^3}\mathbf{E}\left(|\xi_n - \xi_{n-1}| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \le \sum_{k\ge 0} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty \,.$$

Ebből következően

$$\mathbf{E}\left(|u_n|\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(|u_n| \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) \le \sum_{k\ge 0} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty \,, \tag{6}$$

vagyis az u_n integrálható. Tetszőleges k-ra az

$$|\xi_n - \xi_{n-1}|\, \chi_{A(n-1,k)}$$

szintén integrálható, és így, kihasználva, hogy integrálható változókra a feltételes várható érték és az általánosított feltételes várható érték egybeesik[22]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left((\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \chi_{A(n-1,k)}\mathbf{E}\left(\xi_n - \xi_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \chi_{A(n-1,k)}\left(\mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \mathbf{E}\left(\xi_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) = \\
&= \chi_{A(n-1,k)}\left(\mathbf{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \xi_{n-1}\right) = 0 \,.
\end{aligned}$$

A feltételes várható értékre vonatkozó majorált konvergencia tétel miatt, kihasználva a (6) sort

$$\mathbf{E}\left(u_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\chi_{A(n-1,k)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0 \,.$$

Ebből következően az (u_n) egy martingáldifferencia sorozat és az

$$M_n \circeq \sum_{k=1}^{n} u_k$$

egy martingál. Ha

$$\theta_n \circeq \sum_{k\ge 0} (k+1)^3 \chi_{A(n-1,k)} \,,$$

[22]Vegyük észre, hogy alább a kiemelési szabály használata nem teljesen evidens. A $\xi_n - \xi_{n-1}$ változónak van kiterjesztett feltételes várható értéke. A pozitív és a negatív rész feltételes várható értékéből a nem negatív $\chi_{A(n-1,k)}$ kivihető a feltételes várható értékből majd a kiemelhető a különbségben. Az alábbi gondolatmenetben kihasználjuk a kiterjesztett feltételes várható érték linearitását is.

akkor a θ_n értelmes és előrejelezhető, ugyanis az $A(n-1,k)$ halmazok $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek és diszjunktak.

$$
\begin{aligned}
&(M_n - M_{n-1})\,\theta_n = u_n\theta_n = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\,(\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^3\,\chi_{A(n-1,k)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}\,(\xi_n - \xi_{n-1})\,\chi_{A(n-1,k)}\,(l+1)^3\,\chi_{A(n-1,l)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{(k+1)^3}\chi_{A(n-1,k)}\,(\xi_n - \xi_{n-1}) = \xi_n - \xi_{n-1}\,.
\end{aligned}
$$

Így a (ξ_n) éppen a (θ_n) előrejelezhető folyamat és az (M_n) martingál által definiált martingáltranszformáció.

3. Végezetül tegyük fel, hogy a (ξ_n) egy martingáltranszformált és tegyük fel, hogy teljesül a (4). Legyen

$$
\tau_k \triangleq \inf\{n \geq 0 : |\theta_{n+1}| > k\}\ .
$$

A konstrukció szerint

$$
\begin{aligned}
\{\tau_k = 0\} &= \{|\theta_1| > k\} \\
\{\tau_k = 1\} &= \{|\theta_1| \leq k\} \cap \{|\theta_2| > k\} \\
\{\tau_k = 2\} &= \{|\theta_1| \leq k\} \cap \{|\theta_2| \leq k\} \cap \{|\theta_3| > k\} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

Ebből következően a τ_k minden k-ra egy megállási idő. Mivel a (θ_n) előrejelezhető és τ_k megállási idő, ezért a $(\theta_n^{\tau_k})_n$ megállított sorozat előrejelezhető marad. Valóban, minden n-re és α számra

$$
\begin{aligned}
\{\theta_n^{\tau_k} < \alpha\} = \big(\{\theta_n < \alpha\} \cap \{\tau_k \geq n\}\big) \cup \big(\{\theta_1 < \alpha\} \cap \{\tau_k = 1\}\big) \cup \ldots \cup \\
\cup \big(\{\theta_{n-1} < \alpha\} \cap \{\tau_k = n-1\}\big)\ .
\end{aligned}
$$

Mivel

$$
\{\tau_k \geq n\} = \{\tau_k < n\}^c = \{\tau_k \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}\ ,
$$

ezért

$$
\{\theta_n^{\tau_k} < \alpha\} \in \mathcal{F}_{n-1}\ ,
$$

így a $(\theta_n^{\tau_k})_n$, miként állítottuk, előrejelezhető. Felhasználva, hogy a megállított martingálok martingálok maradnak, illetve hogy a $\theta_n^{\tau_k}$ változó $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető és korlátos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\xi_{n+1}^{\tau_k} - \xi_n^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbf{E}\left((\xi_{n+1} - \xi_n)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \mathbf{E}\left((\theta_n\,(M_{n+1} - M_n))^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\theta_n^{\tau_k}\,(M_{n+1} - M_n)^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= \theta_n^{\tau_k}\mathbf{E}\left(M_{n+1}^{\tau_k} - M_n^{\tau_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0\ ,
\end{aligned}
$$

tehát a $(\xi_n^{\tau_k})$ martingál, vagyis a (ξ_n) lokális martingál. □

Az állítás segítségével beláthatjuk a második alaptétel bizonyításában használt állítást:

3.6 Állítás. *Ha* $(\xi_n)_{n=0}^T$ *egy martingáltranszformáció és a* ξ_T *integrálható, akkor a* $(\xi_n)_{n=0}^T$ *sorozat martingál.*

Bizonyítás. A 3.5 állításban szereplő 3. ⇒ 2. implikáció szerint

$$\xi_{T-1} = \mathbf{E}\left(\xi_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right) ,$$

ahol az $\mathbf{E}$ természetesen az általánosított feltételes várható értéket jelöli. A ξ_T a feltétel szerint integrálható, ezért a toronyszabály nem negatív változókra való triviális alkalmazásával

$$\mathbf{E}\left(|\xi_{T-1}|\right) = \mathbf{E}\left(|\mathbf{E}\left(\xi_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)|\right) \le \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(|\xi_T| \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right) = \mathbf{E}\left(|\xi_T|\right) < \infty ,$$

tehát a ξ_{T-1} is integrálható. Innen az állítás már nyilvánvaló. □

4 Európai eszközök árazása, nincs diszkontálás

Az eszközárazás első és második alaptétele segítségével az európai típusú származtatott termékek árazása diszkrét és véges időhorizont esetén viszonylag egyszerűen elintézhető: Legyen H_T egy a T időszakban esedékes valamilyen pénzügyi tranzakció. Mivel a H_T a T időszakban esedékes, ezért a H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető. A kérdés az, hogy ha a H_T értékét a $t = 0$ időpontban kell kifizetni, akkor mennyi a H_T ára, vagyis a $t = 0$ időpontban kifizetendő milyen $\pi(H_T)$ összeg tekinthető a H_T árának? Tegyük fel, hogy a piacon nincsen arbitrázs, és tegyük fel, hogy a piac teljes. Ekkor az első és második alaptétel szerint létezik egyetlen martingálmérték. Jelölje $\mathbf{Q}$ ezt a martingálmértéket. A teljesség miatt[23]

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \ . \tag{7}$$

A közgazdasági megfontolásokból a H_T ára alatt azt a $\pi(H_T)$ összeget értjük, amely mellett a H_T bevezetése nem fogja tönkretenni a piac arbitrázs mentességét. Másképpen fogalmazva a H_T bevezetése azt jelenti, hogy a már meglevő m darab

$$S_i(0), S_i(1), \ldots, S_i(T), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

idősor mellé bevezetünk egy $(m+1)$-edik eszközt, amely árfolyamát a

$$\pi(H_T), \ldots, H_T$$

[23]Ha a diszkontálást és az önfinanszírozó portfóliókat is tárgyaltuk volna, akkor az egyenlőségben a diszkontált árfolyamok és a diszkontált kifizetés szerepelt volna.

idősor írja le[24]. Mikor marad az $m+1$ eszközből álló, kibővített piac arbitrázs mentes? Miként azonnal megmutatjuk, az arbitrázs mentesség csak akkor őrizhető meg, ha $\pi(H_T)=\lambda$. Valóban, ha például $\pi(H_T)>\lambda$, akkor a

$$(\theta(1),-1)\,,(\theta(2),-1)\,,\ldots,(\theta(T),-1)$$

$(m+1)$ dimenziós stratégia egy arbitrázs stratégia[25], ugyanis mivel a konstans függvények minden σ-algebra szerint mérhetőek, ezért egyrészt a kibővített stratégia triviálisan előrejelezhető, másrészt az új stratégia nettó eredménye a (7) felhasználásával

$$+\pi(H_T)+\sum_{t=1}^{T}\left(S(t)-S(t-1)\right)\theta(t)-H_T=\pi(H_T)-\lambda>0\,,$$

ami pedig arbitrázs[26].

További kérdés persze, hogy hogyan lehetne a λ számot a $\mathbf{Q}$ mérték segítségével kifejezni? Ehhez fel kell tenni, hogy a H_T integrálható a $\mathbf{Q}$ martingálmérték szerint. A szokásos opciós derivatívák esetén ez triviálisan teljesül, ugyanis ha például $H_T=\max(c,S_1(T))$, akkor az $S_1(T)$ integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint, és így a H_T is integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint. Mivel a $\mathbf{Q}$ martingálmérték és a H_T a $\mathbf{Q}$ szerint integrálható, ezért a $\sum_{t=1}^{T}(S(t)-S(t-1))\theta(t)$ martingáltranszformáció martingál[27], így tartja a várható értéket, vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(S(t)-S(t-1)\right)\theta(t)\right)=0\,.$$

Ebből következően a (7) sorban a $\mathbf{Q}$ mérték szerint várható értéket véve

$$\pi(H_T)=\lambda+0=\lambda+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left(S(t)-S(t-1)\right)\theta(t)\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T\right)\,. \tag{8}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a (8) képlet szempontjából csak az arbitrázs mentességre volt szükség, a teljesség feltételére csak annyiban támaszkodtunk, hogy feltettük, hogy a (7) előállítás lehetséges. Ha a piac nem teljes, akkor a (7) előállítás nem minden H_T esetében lehetséges. Ha valamely H_T-ra azonban az előállítás létezik, akkor az árára a (8) teljesül, függetlenül attól, hogy a $\mathbf{Q}$ melyik a lehetséges martingál mértékek közül. Az olvasó az egyértelműség kapcsán felvetheti, hogy a λ értéke, és így a $\pi(H_T)$ ár egyértelmű-e? Tegyük fel, hogy valamely H_T rendelkezik két olyan előállítással, amelyben $\lambda_1<\lambda_2$. Tekintsük a

$$\left(\theta^{(1)}(1)-\theta^{(2)}(1)\right),\ldots,\left(\theta^{(1)}(T)-\theta^{(2)}(T)\right)$$

[24]Hogy miként alakul a H_T tranzakció ára a köztes időpontokban számunkra érdektelen. A lényeges dolog az, hogy a T időpontban az árat a H_T adja meg.

[25]Mivel a termék drága a tényleges árához képest, ezért el kell adni!

[26]Vegyük észre, hogy a derivatív termékre vonatkozó többi ármozgás, teleszkopikus összegként, kiesik.

[27]V.ö.: 3.6 Állítás.

előrejelezhető stratégiát. Ennek eredménye

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T}(S(t)-S(t-1))\left(\theta^{(1)}(t)-\theta^{(2)}(t)\right) &= (H_T-\lambda_1)-(H_T-\lambda_2)= \\ &= \lambda_2-\lambda_1>0\ ,\end{aligned}$$

ami a nincsen arbitrázs feltétel miatt lehetetlen. Ebből következően, ha nincsen arbitrázs, akkor teljesül az úgynevezett egy ár törvény, vagyis minden H_T pénzügyi tranzakció esetén, amelyre a (7) előállítás létezik, a λ konstans értéke, következésképpen a $\pi(H_T)$ ár is, azonos.

Irodalom

1. Dalang, R. C, Morton, A., Willinger, W., Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model. *Stochastics and Stochastic Reports*, 29, 1990, 185–201.
2. Delbaen, F., Schachermayer, W., *The Mathematics of Arbitrage.* Springer, 2006.
3. Duffie, D., *Security Markets, Stochastic Models.* Academic Press, San Diego, 1988.
4. Elliott, R. J., Kopp, P. E., *Pénzpiacok matematikája.* Typotex kiadó, Budapest, 2000.
5. Elliott, R. J., Kopp, P. E., *Mathematics of Financial Markets.* Springer, New York, 2004.
6. Jacod, J., Shiryaev, A. N., Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case, *Finance and Stochastics*, 2, 1998, 259–273.
7. Kabanov, Yu., Stricker, C., *A teachers' note on no-arbitrage criteria.* Lecture Notes in Mathematics, 1775, 2001, 149–152.
8. Medvegyev Péter, *Valószínűségszámítás.* Aula, Budapest, 2002.
9. Medvegyev Péter, A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele diszkrét idejű modellekben, *Közgazdasági Szemle*, XLIX, 2002, 574–597.
10. Medvegyev Péter, A Dalang-Morton-Willinger-tétel, *Szigma*, 37, 2006, 1-2, 73–85.
11. Schachermayer, W., A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time, *Insurance: Math Econ*, 11, 1992, 1–9.
12. Shiryaev, A. N., *Probability.* Springer, 1996.

THE SECOND FUNDAMENTAL THEOREM OF ASSET PRICING

In the article we summarize the results about the second fundamental theorem of asset pricing.

A GIFFEN-HATÁS EGY MATEMATIKAI MODELLJE[1]

KOVÁCS GERGELY – VIZVÁRI BÉLA
Modern Üzleti Tudományok Főiskolája, Tatabánya – ELTE, Budapest

A dolgozatban azt vizsgáljuk, milyen elméleti közgazdasági modellben van lehetőség a Giffen-hatásra. A jelenség fellépésének kulcsa a fogyasztó hasznossági függvénye. Megmutatjuk, hogy az irodalomban leggyakrabban szereplő hasznossági függvények mellett a Giffen-hatás nem léphet fel, azonban adhatók olyan függvények, illetve olyan piaci modellek, amikor a Giffen-hatás elméletileg lehetséges. A jelenségben fontos szerepet játszik, hogy a fogyasztónak a túléléshez bizonyos mértékű árut el kell fogyasztania, ahogy ezt a jelenség első felfedezői, Gray és Giffen sejtették.

1 Bevezetés

A Giffen-hatás az a közgazdaságilag paradox helyzet, amikor egy inferior termék ára nő, és ennek ellenére a fogyasztása is nő. (Luxustermék esetén hasonló jelenség felléphet a divat hatására is.) Szabó [10] dolgozatában kimutatta, hogy 1995-ben Magyarországon a burgonya esetében Giffen-hatás fellépett. Ebben az évben a burgonya ára mind nominál-, mind reálértékben jelentősen megdöntötte a történelmi csúcsot, ugyanakkor a reáljövedelemben jelentős visszaesés következett be. Ez az észrevétel azért is érdekes, mert a Giffen-hatást emellett csak az alacsony jövedelmű rétegeknél figyelték meg, például Kínában a rizs és a tészta esetén [2].

A burgonya szerepe körül néha félreértés van az irodalomban. A [8] dolgozat alapján sokan úgy vélik, a burgonya Giffen-termék volta megcáfoltatott. Fontos hangsúlyozni, hogy [8] csak az írországi nagy éhínséggel foglalkozik, ami 1845-47-ben volt. Fő érve az ellen, hogy akkor a Giffen-hatás fellépett, hogy Írországban nem voltak piaci körülmények, azaz a hiány ellenére a piac nem reagált, és nem szállítottak be máshonnan burgonyát. Ennek fő oka, hogy a népességnek az a része, aki a hiánytól szenvedett, nem képzett fizetőképes keresletet, mert fő termékük éppen a burgonya volt. Tehát nem tudtak más terméket adni cserébe. [2] jól mutatja, hogy az, hogy mi inferior és/vagy Giffen-termék, az helytől és időtől függhet. Ezért [8] elemzése nem vonatkozhat az 1995-ös magyar helyzetre.

Mindezek alapján megfogalmazzuk, hogy mi mit értünk Giffen-hatáson: *Giffen-hatás akkor léphet fel, ha egy inferior termék ára piaci körülmények között nő, ugyanakkor a fogyasztása is nő.*

Úgy gondoljuk, hogy [8] és főként a rá hivatkozó irodalom hozzáállása a lakatosi értelemben tipikusan torzszülött kizáró. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a

[1]Beérkezett: 2006. október 9. E-mail: `kovacs.gergely@mutf.hu, vizvari@math.elte.hu`.

Giffen-hatás a hagyományos közgazdasági gondolkodás szempontjából "torzszülött", zavarja az összképet. A jelen dolgozat szerzői úgy gondolják, hogy Lakatos Imrének van igaza, aki lényegében azt fogalmazza meg, hogy mindent el kell fogadni, ami a definíciót kielégíti [4], a torzszülötteket nem szabad kizárni, így a piaci torzszülötteket sem.

Marshall monumentális művében [5] olyan megjegyzést tesz, miszerint a jelenség felfedezése Giffentől származik. Meg kell jegyezni, hogy már jóval korábban Gray [1] ugyancsak leírta a jelenséget. Mind Gray, mind Giffen azt a magyarázatot fűzték hozzá, hogy az inferior termék árának növekedése azt eredményezi, hogy a túléléshez szükséges inferior termék fogyasztása elvonja a szegény fogyasztó jövedelmét más termékektől és így a fogyasztó kénytelen azokat az inferior termékkel helyettesíteni. A Giffen-hatás a legutóbbi évek közgazdasági irodalmában is élénk érdeklődést váltott ki. Jó összefoglaló az utóbbi évek terméséből [7]. A már említett [2] szintén sok irodalmi hivatkozást tartalmaz.

2 A közgazdasági alapmodell

A mikroökonómia a fogyasztó magatartását hagyományosan a következő modellel írja le. A fogyasztást a költségvetési korlát befolyásolja, ami rögzített árak mellett egy lineáris feltétel. Így a lehetséges fogyasztások halmazát a

$$\begin{aligned} p^T y &\leq m \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

derékszögű szimplex határozza meg, ahol

y	a fogyasztás vektora,
p	az árak vektora,
m	a fogyasztó jövedelme.

A fogyasztó hasznossági függvényének megfelelően egy olyan fogyasztói kosarat választ, amely számára a legkedvezőbb. A továbbiakban a fogyasztó hasznossági függvényének jele $u(.)$.

Tehát a fogyasztó a

$$\begin{aligned} &\max u(y) \\ p^T y &\leq m \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

feladatot oldja meg.

3 Homogén, homotetikus és iránytartó hasznossági függvények a fogyasztásra vonatkozó alsó korlátok nélküli esetben

Ebben a szakaszban elméletileg vizsgáljuk a hasznossági függvényeket azon feltételezés mellett, hogy a 0 vektor is megengedett fogyasztói kosár.

Ha egy feladatban a költségvetési korlát m értéke megváltozik, akkor változik ugyan a megengedett megoldásokat leíró derékszögű szimplex, de a korábbihoz geometriai értelemben hasonló lesz. Egyes hasznossági függvények ezt a hasonlóságot az optimális megoldás elhelyezkedésére vonatkozóan is megőrzik. Az alábbiakban ezeket fogjuk iránytartó hasznossági függvényként definiálni.

Meg fogjuk mutatni, hogy ennél speciálisabb függvények a k-adrendű homogén, illetve homotetikus hasznossági függvények. Ezek pontos matematikai megfogalmazásai az alábbiak.

1. Definíció ([11]). *Egy u hasznossági függvény (Euler-féle) k-adrendű homogén, ha teljesíti a következő tulajdonságot:*

$$u(\lambda y) = \lambda^k u(y)$$

minden $\lambda \geq 0$ esetén, ahol $k \geq 0$ rögzített szám.

A Cobb-Douglas-féle hasznossági függvényt

$$u(y) = \prod_j (y_j)^{c_j}$$

alakban írjuk fel, ahol az összes c_j pozitív. Közismert, hogy a Cobb-Douglas-féle hasznossági függvény $\sum_{i=1}^n c_i$-adrendű homogén.

Egy másik nevezetes hasznossági függvény a Leontief-féle. Ennek lényege, hogy az egyes termékeket csak meghatározott arányban tudjuk felhasználni. Ha az egyik termékből a másikhoz viszonyítva több van, mint amennyinek ezen arány szerint lennie kellene, akkor ez a többlet nem növeli meg a hasznosság értékét, azaz $u(y) = \min\{c_i y_i\}$, ahol c_i-k megfelelő pozitív együtthatók. Szintén közismert, hogy a Leontief-féle hasznossági függvény elsőrendű homogén.

2. Definíció ([11]). *Egy u hasznossági függvény homotetikus, ha $u(y) = g(h(y))$ alakú, ahol h egy elsőrendű homogén függvény, g pedig szigorúan monoton növekvő.*

3. Állítás. *$k > 0$ esetén, ha az u függvény nemnegatív értékű és k-adrendű homogén, akkor homotetikus.*

Bizonyítás. Ha u egy k-adrendű homogén függvény, akkor $u(\lambda y) = \lambda^k u(y)$. Legyen $h(y) = \sqrt[k]{u(y)}$. Ez értelmezett, mivel u egy nemnegatív értékű függvény. Ha u k-adrendű homogén, akkor a belőle kapott h elsőrendű homogén. Ha emellett $g(x) = x^k$, ami monoton növekvő a pozitív tartományban, akkor $u(y) = g(h(y))$ valóban homotetikus. $\square$

4. Következmény. *A Cobb-Douglas-féle, és a Leontief-féle hasznossági függvények is homotetikusak.*

A továbbiakban feltesszük, hogy a fogyasztó preferencia-relációja rendelkezik a gyenge monotonitás és a lokális telítetlenség tulajdonságával, amiből következik, hogy az optimális fogyasztás(ok) a költségvetési korláton van(nak).

5. Definíció. *Tekintsük a megengedett megoldások* (1) *szimplexét két különböző jövedelem esetén. Legyen y_1 az egyik szimplex optimális fogyasztói kosara. Azt mondjuk, hogy az u hasznossági függvény iránytartó, ha van olyan y_2, ami a másik szimplexben optimális és emellett az y_1 és az y_2 vektorok párhuzamosak.*

A definíció egyszerű következménye, hogy y_1 és y_2 hosszának aránya éppen a derékszögű szimplexek hasonlósági arányával egyezik meg.

6. Állítás. *Ha egy u hasznossági függvény homotetikus, akkor iránytartó.*

Bizonyítás. Legyen $u(y) = g(h(y))$ homotetikus és m_1 költségvetés mellett legyen y_1^* optimális megoldás. Ekkor minden más megengedett y_1-re

$$u(y_1) \leq u(y_1^*) \ ,$$

azaz

$$g(h(y_1)) \leq g(h(y_1^*)) \ .$$

A módosított feladatban, ahol a költségvetés m_2, minden megengedett y_2 kosár megfelel az eredeti feladatból egy y_1 kosárnak a szimplexek hasonlósága miatt. Mivel h elsőrendű homogén, és g szigorúan monoton növekvő:

$$u(y_2) = g(h(y_2)) = g\left(h\left(\frac{m_2}{m_1}y_1\right)\right) = g\left(\frac{m_2}{m_1}h(y_1)\right) \leq g\left(\frac{m_2}{m_1}h(y_1^*)\right) =$$
$$= u\left(\frac{m_2}{m_1}y_1^*\right) \ ,$$

azaz $y_2^* = \frac{m_2}{m_1}y_1^*$ optimális a módosított feladatban. $\square$

7. Következmény. *A Cobb-Douglas-féle, és a Leontief-féle hasznossági függvények is iránytartók.*

Dolgozatunk egyik fő elméleti eredménye az alábbi tétel:

8. Tétel. *Ha egy hasznossági függvény iránytartó, akkor a kitüntetett termék árának emelkedése és a többi termék árának változatlansága mellett nem léphet fel Giffen-hatás.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az első termék ára nőtt, és áremelkedés előtt a költségvetési korlát

$$\sum_{i=1}^{n} p_{1i}y_i = m$$

alakú, áremelkedés után pedig

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_i = m \; .$$

Persze itt $p_{1i} = p_{2i}$ minden 1-nél nagyobb i-re. Az $i = 1$ esetben pedig $p_{11} < p_{21}$ teljesül a feltételnek megfelelően. Az első eset optimális megoldása y_1^*, a másodiké pedig y_2^*.

1. ábra. A Giffen-hatás elemzése két változó esetén

Tegyük fel továbbá, hogy teljesül a Giffen-hatás, vagyis $y_{11}^* < y_{21}^*$. Legyen

$$m_3 := \sum_{i=1}^{n} p_{1i} y_{2i}^* \; . \tag{3}$$

Ekkor nyilván $m_3 < m$ teljesül a $p_{11} < p_{21}$ feltétel miatt. Tekintsük most azt a feladatot, amelyben az árak az eredeti árakkal egyeznek meg, csak a költségvetési korlátja

$$\sum_{i=1}^{n} p_{1i} y_i \le m_3 \tag{4}$$

alakú. Az m_3 (3) definíciója miatt y_2^* kielégíti a (4) feltételt. Legyen $y_3^* = \lambda y_1^*$, ahol λ a két feladat szimplexeinek hasonlósági aránya, azaz

$$\lambda = \frac{m_3}{m} < 1 \; . \tag{5}$$

Az iránytartó tulajdonság miatt a (4) feltételű feladatban y_3^* optimális megoldás. Emiatt $y_{31}^* = \lambda y_{11}^* < y_{11}^* < y_{21}^*$, ahol az utolsó egyenlőtlenség az indirekt feltevés. Tehát $y_3^* \neq y_2^*$ és az optimalitás miatt $u(y_3^*) \geq u(y_2^*)$. Megmutatjuk, hogy y_3^* a második, módosított árú feladatnak szigorúan megengedett megoldása, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{3i}^* < m \ .$$

Ebbe az $y_3^* = \lambda y_1^*$ egyenletet behelyettesítve, majd az (5) képletet beírva

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i}(\lambda(y_{1i}^*)) = \sum_{i=1}^{n} p_{2i} \frac{m_3}{m} y_{1i}^* < m$$

adódik. A nevezővel beszorozva:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{1i}^* m_3 < m^2 \ .$$

Figyelembe véve, hogy a többi ár változatlan:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{1i}^* = \sum_{i=1}^{n} p_{1i} y_{1i}^* + (p_{21} - p_{11}) y_{11}^* = m + (p_{21} - p_{11}) y_{11}^*$$

$$m_3 = \sum_{i=1}^{n} p_{2i} y_{2i}^* + (p_{11} - p_{21}) y_{21}^* = m + (p_{11} - p_{21}) y_{21}^*$$

adódik. Ezeket a fentibe helyettesítve

$$m^2 + m(p_{21} - p_{11})(y_{11}^* - y_{21}^*) - (p_{21} - p_{11})^2 y_{11}^* y_{21}^* < m^2 \ .$$

Ezt egyszerűsítve és átrendezve:

$$m(y_{11}^* - y_{21}^*) < (p_{21} - p_{11}) y_{11}^* y_{21}^* \ .$$

Ez pedig nyilvánvalóan teljesül, hiszen feltételezésünk szerint $y_{11}^* < y_{21}^*$, azaz az egyenlőtlenség bal oldala negatív, jobb oldala pozitív.

Ha y_3^* szigorúan megengedett az áremelkedés utáni feladatban, akkor abban a feladatban nem lehet optimális a gyenge monotonitás és a lokális telítetlenség miatt. Ez viszont $u(y_3^*) \geq u(y_2^*)$ miatt ellentmond annak, hogy y_2^* optimális. □

9. Következmény. *Sem a Cobb-Douglas-féle, sem a Leontief-féle hasznossági függvények esetén nem léphet fel Giffen-hatás, amennyiben a kitüntetett termék ára emelkedik és a többi termék ára változatlan.*

Ez a következmény azt jelenti, hogy a magyar fogyasztók hasznossági függvénye különösen az élelmiszerpiacon, ezen belül is a burgonya és helyettesítő termékei esetében nem rendelkezhet az iránytartó tulajdonsággal. Következésképpen a fogyasztók hasznossági függvénye nem lehet Cobb-Douglas-féle. A [3] dolgozat modellje pedig pont ezt tételezi fel.

4 Töréspponttal rendelkező hasznossági függvények

Létezik azonban olyan hasznossági függvény, aminél a Giffen-hatás felléphet, például [6] ad ilyen függvényt. A példa lényege, hogy a hasznossági függvény két részből áll, mégpedig úgy, hogy a pozitív síknegyedet két részre osztjuk, és a két részben más-más a hasznossági függvény képlete. Természetesen ezt úgy kell megkonstruálni, hogy a végső függvény teljesítse a hasznossági függvényekre vonatkozó alapvető tulajdonságokat. Az elválasztó görbe [6]-ban egy S alakú görbe, Giffen-hatás pedig pont akkor lép fel, amikor a költségvetési egyenes metszi a görbe két „kanyar" közötti ívét. Konstruálható azonban olyan példa is, ahol a Giffen-hatás (elméletileg) nem csak egy szűk tartományban jelentkezik. Ebben a szakaszban [9] példáját tárgyaljuk egyszerűsített formában. Itt az elválasztó görbe egy egyenes. Az általános esetben a hasznossági függvényt nem képlettel adjuk meg, hanem közömbösségi görbéinek geometriai elrendezésével.

A fejezetben az egyszerűség kedvéért kétváltozós feladatokkal foglalkozunk. Az eredeti feladat árai: p_{11}, p_{12}. Így a költségvetési egyenes meredeksége:

$$q_1 = -\frac{p_{11}}{p_{12}} .$$

Emellett a módosított, $p_{11} < p_{21}$ és $p_{12} = p_{22}$ feladatban a költségvetési egyenes meredeksége:

$$q_2 = -\frac{p_{21}}{p_{22}} < q_1 ,$$

azaz utóbbi a meredekebb. Tekintsünk egy olyan egyenest, amelynek q_3 meredeksége q_2-nél kisebb, és emellett a pozitív síknegyedben metszi mindkét költségvetési egyenest. (Ilyenből természetesen végtelen sok létezik.) Ez utóbbi egyenes a síkot két részre osztja úgy, hogy modellünkben ezen a két részen a hasznossági függvény más és más, de a kettő együtt megfelel a hasznossági függvény követelményeinek. A konstrukcióban a közömbösségi görbék két félegyenesből állnak, ahol a félegyenesek a q_3 meredekségű e egyenesen érintkeznek. A félegyenesek meredekségeit úgy választjuk, hogy az e egyenestől jobbra a meredekség 0 és q_1 közötti rögzített érték, az e egyenestől balra pedig q_2 és q_3 közötti ugyancsak rögzített érték. Ezzel a modellel minden síkbeli pont pontosan egy félegyenesen van.

Így elérhető, hogy bármely olyan költségvetési egyenesre, amely az e-n átmegy, a hasznosság-optimalizáló feladat megoldása a költségvetési egyenes és az e metszéspontja lesz, ugyanis az az a pont, ahol egy fenti módon definiált törött közömbösségi görbe „érinti" a költségvetési egyenest: egy közös pontjuk van, ugyanakkor minden további pont a költségvetési egyenesnek ugyanazon, nem megengedett oldalán van.

2. ábra. A $(0.2; 0.8)$ ponton átmenő közömbösségi görbe két ága f_1 és g_1, míg a $(0.4; 0.2)$ ponton átmenő közömbösségi görbe két ága f_2 és g_2.

Példa. Az e egyenlete legyen $3y_1 + y_2 = 1.4$. Ekkor ennek meredeksége: $q_3 = -3$. A hasznossági függvény legyen a következő:

$$u(y_1, y_2) = \begin{cases} f(y_1, y_2) = 12y_1 + 5y_2\,, & \text{ha } 3y_1 + y_2 \leq 1.4; \\ g(y_1, y_2) = 0.5y_1 + y_2 + 5.6\,, & \text{ha } 3y_1 + y_2 \geq 1.4. \end{cases}$$

Ekkor a félegyenesek pont az e egyenesen metszik egymást. Az árak a következők: $p_{11} = 1 < p_{21} = 2$ és $p_{12} = p_{22} = 1$, a rendelkezésre álló összeg 1. Így $q_1 = -1$, $q_2 = -2$. Ekkor az első feladat megoldása a költségvetési egyenesének és az e-nek metszete, azaz a $(0.2; 0.8)$ pont, míg a második feladaté a $(0.4; 0.2)$ pont, vagyis az első változóra a Giffen-hatás fennáll.

Geometriailag a fenti konstrukció általánosítható. Természetesen nem szükséges az e egyenesből félegyenesekből álló közömbösségi görbéket indítani, hanem bármilyen más monoton csökkenő görbék is megfelelnek, amelyek eltolásával a nemnegatív síknegyed egyszeresen fedhető le. A lényeg, hogy az egyenesen lévő pontokra a közömbösségi görbékhez húzott érintők meredekségei 0 és q_1 között, illetve a másik oldalon q_2 és q_3 közötti legyenek.

5 A hasznossági függvény kisimítása a töréspontnál

$q_1 > q_2$ miatt azonban az e egyenesen lévő pontokban a közömbösségi görbék deriváltjai nem léteznek. Ennek orvoslására ad eljárást [6], azonban ott csak elméletileg igazolják, hogy adható folytonosan differenciálható hasznossági függvény, de konkrét képlettel nincs meghatározva.

Mi ezt egy egyszerű esetben meg is konstruáljuk. Az ötlet a következő: a fentiekben egy közömbösségi görbe két félegyenesből áll. Két félegyenesből képzett egyenesekhez húzható akármilyen közel egy hiperbola. A hiperbola azon ága, mely az eredeti két félegyeneshez tartozik, lesz a közömbösségi görbe az új modellben.

Tekintsünk egy (A, B) pontot a fent említett e egyenesről. Ehhez a ponthoz létezik egy-egy félegyenes mindkét oldalon. Az egyszerűbb számítások miatt feltesszük, hogy a bal oldali meredeksége -1, a jobb oldalié 0. Ekkor az A, B ponton átmenő két félegyenesből képzett egyenesekhez mint aszimptotához simuló hiperbola a

$$(y_2 - B + y_1 - A)(y_2 - B) = \varepsilon^2$$

képlettel írható le. Az e egyenes egyenlete legyen: $y_2 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}y_1$. Ennek az egyenesnek -1-nél meredekebbnek kell lennie az előző fejezet szerint, amihez $b < 1$ szükséges, ezt feltesszük. Mivel az (A, B) pont az egyenesen van, $A = a - bB$ és a fenti hiperbola

$$(y_2 + y_1 - a - (1 - b)B)(y_2 - B) = \varepsilon^2$$

alakba írható. Vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőlegesen választott (y_1, y_2) párhoz hány olyan (A, B) pár tartozik, ami kielégíti a fenti összefüggést. Ez rögzített (y_1, y_2) értékekre a B-re egy másodfokú egyenlet:

$$(1 - b)B^2 + (-y_1 - (2 - b)y_2 + a)B + (y_2^2 + y_1y_2 - ay_2 - \varepsilon^2) = 0\ .$$

Ennek megoldása

$$B_{1,2} = \frac{(2 - b)y_2 + y_1 - a \pm \sqrt{D}}{2(1 - b)}$$

alakú, ahol D a diszkrimináns:

$$\begin{aligned} D &= (-(2 - b)y_2 - y_1 + a)^2 - 4(1 - b)(y_2^2 + y_1y_2 - ay_2 - \varepsilon^2) = \\ &= b^2y_2^2 + y_1^2 + 2by_2y_1 - 2bay_2 - 2ay_1 + a^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2 = \\ &= (y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2\ . \end{aligned}$$

Így

$$B = \frac{(2 - b)y_2 + y_1 - a \pm \sqrt{(y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2}}{2(1 - b)}\ .$$

Ez azt jelenti, hogy egy (y_1, y_2) páron két hiperbola megy át, ahol az ezekhez tartozó csúcspontok legyenek (A_1, B_1) és (A_2, B_2). Megmutatjuk, hogy $B_1 < y_2$, azaz

$$B_1 = y_2 + \frac{by_2 + y_1 - a - \sqrt{(y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1 - b)\varepsilon^2}}{2(1 - b)} < y_2\ .$$

Ez akkor fog teljesülni, ha a tört negatív. Ez pedig teljesül, mivel a nevező pozitív $1 > b$ miatt. Hasonlóan

$$B_2 = y_2 + \frac{by_2 + y_1 - a + \sqrt{(y_1 + by_2 - a)^2 + 4(1-b)\varepsilon^2}}{2(1-b)} > y_2 \; ,$$

mivel a tört nevezője és számlálója itt is pozitív. A fentiek szerint $B_1 < y_2 < B_2$, ami azt jelenti, hogy a B_1 ponthoz tartozó hiperbolának felső, konvex ágán van y_2, a B_2 hiperbolának viszont az alsó, konkáv ágán. Eszerint a feladat szempontjából nekünk csak a B_1-re van szükségünk, mivel az eredeti félegyenesekhez ez tartozik. Ezzel azt is megmutattuk, hogy mindegyik (y_1, y_2) ponthoz egyértelműen meghatározható egy B_1 érték, amihez tartozó egyértelmű hiperbola felső, konvex ágán az (y_1, y_2) pont szerepel, azaz ezek a hiperbola ágak rögzített ε-ra teljesen lefedik a síkot, és így megfelelnek közömbösségi görbének. A hiperbolát meghatározó félegyenesek alakjából következően, ha egy (y_1, y_2) pár tetszőleges koordinátáját megnöveljük, magasabban fekvő hiperbola ágra lépünk, ahhoz pedig e alakja miatt magasabb B_1 érték tartozik. Így viszont az $(y_1, y_2) \mapsto B_1$ megfeleltetés választható hasznossági függvénynek.

Példa (folytatás). A fenti hasznossági függvénnyel $B = 2-2A$, azaz $a = 1$ és $b = 0.5$, illetve $\varepsilon = 0.01$ választása mellett tekintsük a következő feladatot: $p_{11} = 0.5 < p_{21} = 0.6$ és $p_{12} = p_{22} = 1$, a rendelkezésre álló összeg 1. A megoldások pedig: $(0.6733; 0.6633)$, illetve $(0.7172; 0.5697)$, azaz teljesül a Giffen-hatás.

6 Módosított modell kötelező minimális fogyasztás mellett

A fogyasztást a költségvetési korláton és a hasznossági függvényen kívül más is befolyásolhatja. A fogyasztó —feltételezésünk szerint— bizonyos dolgokból, amelyek nem feltétlenül azonosak a piacon megjelenő termékekkel, de amelyeket ezek hordoznak, meghatározott mennyiségnél nem fogyaszthat kevesebbet, mert ez a létfenntartásához szükséges. Például az élelmiszerpiac esetén ilyen lehet az elfogyasztott kalória, fehérje, C-vitamin stb. mennyisége. Látható, hogy ezek a közvetlenül termékként meg nem jelenő dolgok egymástól elkülönülnek, azaz egy-egy termék külön-külön tartalmazhat belőlük meghatározott mennyiséget. Ezért a termékek egy súlyozott összegének kell nagyobbnak lenni, mint a minimális kötelező fogyasztás minden egyes említett tényező esetében.

Tehát a modell a költségvetési feltételen kívül annyi, azzal bizonyos értelemben ellentétes irányú lineáris egyenlőtlenséget tartalmaz, ahány tényezőre a minimális fogyasztást figyelembe vesszük. Így matematikailag a lehetséges fogyasztások (2) halmazát a

$$\begin{array}{rcl} p^T y & \leq & m \\ a_1^T y & \geq & b_1 \\ & \vdots & \\ a_k^T y & \geq & b_k \\ y & \geq & 0 \end{array} \tag{6}$$

feltételrendszer szűkíti le, ahol

b_i az i tényezőből kötelezően fogyasztandó minimális mennyiség,
a_{ij} pedig azt adja meg, hogy a j termék egy egysége az i tényezőből mennyit tartalmaz.

10. Definíció. *A továbbiakban fogyasztási poliédernek nevezzük a*

$$\Pi = \{x \in I\!\!R^n : x \text{ kielégíti (6)-ot } \}$$

poliédert.

Feltételezésünk szerint a fogyasztó a hasznossági függvényének megfelelően a következő stratégiát követi. Ha valaki csak a kötelező minimális szinten fogyaszt, akkor ezzel valójában nem tudott jólétet teremteni magának, csak létet. Jólétének mértékét az határozza meg, hogy a kötelező minimális fogyasztáson felül mit tud fogyasztani. Ezért saját fogyasztását egy olyan minimális fogyasztói kosárhoz fogja mérni, amely még éppen benne van a fogyasztási poliéderben. Tehát a saját fogyasztói kosarának hasznossági értékét ezen minimális fogyasztáshoz mért többlete adja.

A továbbiakban y-nal jelöljük a fogyasztó teljes fogyasztói kosarát, x-szel pedig azt a fogyasztói kosarat, amihez képest a többletet méri. Hasonló feltételezéssel élt [3] is. Ekkor a fogyasztó a következő feladatot oldja meg:

$$\begin{array}{c} \max\ u(y-x) \\ y \in \Pi \\ x \in \Pi \\ y - x \geq 0\ . \end{array} \tag{7}$$

Megjegyzendő, hogy a (6) poliéder a [3] dolgozat poliéderének általánosítása. Ott azonban a Π poliédert a költségvetési korláton kívül a termékek fogyasztandó mennyiségeire vonatkozó egyedi alsó korlátok határozták meg, és így létezett egy egyértelmű minimális kötelező fogyasztás. A [3] dolgozat modellje úgy értelmezhető, mint a (7) probléma azon részfeladata, ahol x rögzített kosár. A fogyasztási poliédert és egy optimális megoldáspárt mutat a 3. ábra két termék esetén. Az, hogy a [3] dolgozat poliéderénél általánosabb (6) poliéder létezik a gyakorlatban, a már említett C-vitamin példáján látható be egyszerűen. Mivel nem tudunk róla, hogy kimutatható mértékben skorbutos esetek Magyarországon előfordultak volna, a fogyasztó elegendő C-vitaminhoz jut, de ennek csak egy töredékét veszi be közvetlenül vitaminként.

3. ábra.

Nyilvánvaló, hogy a hasznossági függvényekre tett korábbi feltételezések mellett az (x^*, y^*) optimális megoldásra teljesül, hogy $x^* \in \Pi$, és minden $x \leq x^*$, $x \neq x^*$ esetén $x \notin \Pi$.

7 Iránytartó függvények és a minimális fogyasztás

Amennyiben a fogyasztó tényleges y fogyasztását az x kötelező minimális fogyasztáshoz hasonlítja, akkor y benne lesz abban az n-dimenziós derékszögű szimplexben, aminek egyik lapja a költségvetési korlátra esik, a többi lapja pedig a $w_i = 0$ egyenlőseggel megadott hipersíkokkal párhuzamos és a derékszögnél lévő csúcsa éppen x. Nyilvánvaló, hogy az összes ilyen n-dimenziós szimplex a szó geometriai értelmében hasonló egymáshoz. Így értelmezhető rá a korábban látott iránytartó definíció, de azzal a megkötéssel, hogy az x_1 és x_2 pontokhoz tartozó derékszögű szimplexekben most az $y_1 - x_1$ és az $y_2 - x_2$ vektorok párhuzamosak.

Az iránytartó tulajdonság azért fontos különösen, mert mint ahogy ezt az alábbi tétel kimondja, igen erősen leszűkíti a (7) feladat optimális megoldásaiban szóba jöhető x minimális fogyasztások halmazát.

11. Tétel. *Egy iránytartó hasznossági függvény esetén mindig van olyan optimális (x^*, y^*) pár, amelynek x^* pontja valamely n számú lineárisan független minimális fogyasztási feltétel metszetében van, feltételezve, hogy a fogyasztási poliéder belseje nem üres.*

Megjegyzés. Az állításban az x^* pont fekvésére megfogalmazott feltétel

—mint közismert— ekvivalens azzal, hogy x^* a Π fogyasztási poliéder extremális pontja.

Bizonyítás. Az iránytartó tulajdonság miatt annál nagyobb a hasznosság, minél nagyobb megfelelő derékszögű szimplexet tudunk elhelyezni a poliéderben. Ha annak x csúcsa nem extremális pontban lenne, akkor az x ponttal el tudunk mozdulni a feltételtéren belül legalább két ellentétes megengedett irányba (ha élen van, akkor pontosan kettőbe). Ekkor valamelyik irányban biztosan nem csökken az új x^* pontból származtatott szimplex nagysága, vagy ami ezzel ekvivalens, az x pontnak a költségvetési korláttól való távolsága. Abba az irányba akkorát lépünk, amekkorát csak lehet. Az így kapott pontra már eggyel több lineárisan független minimális fogyasztási feltétel teljesül egyenlőséggel. Ez az algoritmus pedig egy extremális pontba vezet. □

Természetesen az x^* elhelyezkedése csak a minimális fogyasztási feltételek és a költségvetési korlát állásától függ, ha a hasznossági függvény iránytartó.

12. Tétel. *Ha egy hasznossági függvény iránytartó, akkor a kitüntetett termék árának emelkedése és a többi termék árának változatlansága mellett nem léphet fel Giffen-hatás a (7) modellben.*

Bizonyítás. A bizonyítás a korábban látott 8. Tétel bizonyításához hasonló abban az esetben, ha a minimális fogyasztás elhelyezkedése az árváltozás hatására nem változik, azaz ha $x_1^* = x_2^*$. Amennyiben az x^* is változik az árváltozás után, akkor a költségvetési korlát meredekségének változása miatt az első koordinátájában nem nőhet. Tegyük fel ugyanis, hogy $x_{21}^* > x_{11}^*$. Az, hogy az eredeti feladatban x_1^* tartozott a megoldáshoz, az az előző bizonyítás alapján azt jelenti, hogy a hozzá tartozó derékszögű szimplex nem kisebb az x_2^*-hoz tartozó derékszögű szimplexnél. Ezek a szimplexek annál nagyobbak, minél több pénzük marad a minimális x megvásárlása után. Eszerint az első esetben, p_{11} ár mellett:

$$m - p_{11}x_{11}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{1i}^* \geq m - p_{11}x_{21}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{2i}^* \,.$$

A második esetben viszont x_2^*-hoz tartozó poliéder legalább akkora, mint az x_1^*-hoz tartozó:

$$m - p_{12}x_{11}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{1i}^* \leq m - p_{12}x_{21}^* - \sum_{i=2}^{n} p_i x_{2i}^* \,.$$

A két egyenlőtlenséget egymásból kivonva

$$p_{12}x_{11}^* - p_{11}x_{11}^* \geq p_{12}x_{21}^* - p_{11}x_{21}^*$$

adódik, ami $p_{12} > p_{11}$ miatt ellentmond $x_{21}^* > x_{11}^*$-nek. Ezzel beláttuk, hogy ha x^* változik, akkor az első koordinátája nem nőhet.

Tegyük fel, hogy az új x_2^*, y_2^* megoldásra teljesül a Giffen-hatás, azaz $y_{11}^* < y_{21}^*$. Legyen az eredeti feladatban az x_2^*-hoz tartozó megoldás y_4^*.

Mivel rögzített x-re nem teljesül a Giffen-hatás, ezért $y_{21}^* \leq y_{41}^*$. Ezt a fenti indirekt feltevéssel összevetve $y_{11}^* < y_{41}^*$. Azonban mivel $x_{21}^* \leq x_{11}^*$, és az eredeti feladatban x_2^*-hoz legfeljebb akkora derékszögű szimplex tartozik, mint x_2^*-hoz, így az iránytartás miatt legfeljebb akkora a benne lévő megoldás első koordinátája is, ez pedig ellentmond $y_{11}^* < y_{41}^*$-nek. □

13. Következmény. *Sem a Cobb-Douglas-féle, sem a Leontief-féle hasznossági függvények esetén nem léphet fel Giffen-hatás a minimális fogyasztás modelljében sem, amennyiben a kitüntetett termék ára emelkedik és a többi termék ára változatlan.*

8 Tömeges árváltozás

Elméletileg előfordulhat a Giffen-hatás, ha a kitüntetett termék ára nő, de a többié nem nő (azaz itt a változatlanság és az olcsóbbá válás megengedett). Erre mutat példát a következő két tétel. Persze ezek az esetek nem adnak magyarázatot a magyar burgonyapiacon megfigyelt jelenségekre, hiszen semelyik helyettesítő termék ára nem csökkent abban az időszakban.

14. Tétel. *Ha a fogyasztók hasznossági függvénye Cobb-Douglas-féle a (7) modellben és a kitüntetett termék ára nő, de a többié nem, akkor a Giffen-hatás pontosan akkor teljesül, ha*

$$\frac{m - \sum\limits_{i=1}^{n} p_{2i} x_i^*}{p_{21}} \geq \frac{m - \sum\limits_{i=1}^{n} p_{1i} x_i^*}{p_{11}} ,$$

ahol x^* a (7) feladat optimális megoldásának x része, és feltesszük, hogy az árváltozások hatására az x^* értéke nem változott.

Bizonyítás. A bizonyítás során felhasználjuk azt a mikroökonómiában közismert tényt, hogy a Cobb-Douglas-féle hasznossági függvény esetén a fogyasztó az egyes termékekre pontosan

$$\frac{c_i}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

mértékben költ, azaz

$$\frac{c_i}{p_i \sum_{i=1}^n c_i}$$

mennyiséget vásárol. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, hiszen ez a lényegen nem változtat. Ekkor a két feladatban a kitüntetett termék fogyasztása:

$$y_{11}^* = x_1^* + \frac{c_1(m - \sum_{i=1}^n p_{1i} x_i^*)}{p_{11}} ,$$

illetve

$$y_{21}^* = x_1^* + \frac{c_1(m - \sum_{i=1}^n p_{2i} x_i^*)}{p_{21}} .$$

Ebből pedig egyszerűen következik az állítás. □

15. Tétel. *Ha a fogyasztók hasznossági függvénye Leontief-féle a (7) modellben, mégpedig*

$$\max_j c_j(y_j - x_j)$$

alakú és a kitüntetett termék ára nő, de a többié nem, akkor a Giffen-hatás pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{m - \sum_{i=1}^n p_{1i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{1i}}{c_i}} \geq \frac{m - \sum_{i=1}^n p_{2i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{2i}}{c_i}},$$

ahol ismét feltesszük, hogy az árváltozások hatására x^* értéke nem változott.

Bizonyítás. Ebben az esetben abból indulunk ki, hogy a Leontief-féle hasznossági függvényhez tartozó optimális fogyasztói kosarak az

$$x^* + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} e_i$$

egyenletű félegyenesen vannak, ahol e_i az i-edik egységvektor. Eszerint

$$y_{11}^* = x_1^* + \frac{m - \sum_{i=1}^n p_{1i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{1i}}{c_i}} \frac{1}{c_1} ,$$

illetve

$$y_{21}^* = x_1^* + \frac{m - \sum_{i=1}^n p_{2i}x_i^*}{\sum_{i=1}^n \frac{p_{2i}}{c_i}} \frac{1}{c_1} .$$

Azaz Giffen-hatás pontosan akkor teljesül, ha az állítás igaz. □

9 Maximális hasznossági függvény

A maximális hasznossági függvény a Leontief-függvény megfordítása. Csak az a jószág számít, amiből több van. Két jószág esetén a Giffen hatás feltétele a következő:

Legyen a hasznossági függvény $u(a, b) = \max\{f(a); b\}$, vagyis a minimális fogyasztás modelljében: $u(y_1, y_2) = \max\{f(y_1 - x_1); y_2 - x_2\}$. Az ennek alapján definiált reláció, miszerint (x_1, x_2) gyengén preferált (y_1, y_2)-höz képest, ha $u(x_1, x_2) \geq u(y_1, y_2)$, valóban egy preferenciareláció [11], hiszen teljes, reflexív, tranzitív és folytonos. Emellett teljesíti a lokális telítetlenség és a gyenge monotonitás tulajdonságait is.

Az optimális megoldás minden helyzetben valamilyen szélsőség – csak az egyik jószágból fogyaszt az x-en felül a fogyasztó. Feltehető, hogy $p_{12} = p_{22} = 1$, $p_{11} < p_{21}$, illetve, hogy az x a feladat során nem változik. A Giffen-hatás szélsőséges fogyasztásnál azt jelenti, hogy az első esetben csak a 2. jószágból választ pluszban a fogyasztó:

$$f(\frac{m - p_{11}x_1 - p_{12}x_2}{p_{11}}) < \frac{m - p_{11}x_1 - p_{12}x_2}{p_{12}} ,$$

míg az 1. termék áremelkedése után csak az 1. termékből:

$$f(\frac{m - p_{21}x_1 - p_{12}x_2}{p_{21}}) > \frac{m - p_{12}x_1 - p_{12}x_2}{p_{12}}.$$

Könnyen konstruálható olyan példa, ahol ezek a feltételek teljesülnek, pl. $f(a) = \sqrt{a}$ megfelelő választás lehet.

Ha $m = 200$, $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $p_{11} = 3$, $p_{21} = 6$, $p_{12} = 20$, akkor az $u(a, b) = \max\{\sqrt{a}; b\}$ függvénnyel az első esetben a minimálfogyasztás 104-be kerül, a maradékon jobb csak 5.65 egységnyi második jószágot venni, és csak 23.04 egységnyi elsőt. Míg a második esetben az alap fogyasztás 128-ba kerül, és a maradékon érdemes 12.96 egységnyi első jószágot venni, 3.46 egységnyi második helyett.

A következő valós probléma megoldása lehet a fenti feladat: Egy diák 200 forintot szán ceruzák és festékek vásárlására. Az iskolai előírások miatt legalább 8-féle festéket és 4-féle ceruzát kell vennie. A maradék pénzén további ceruzákat és festékeket vásárol, azonban ekkor az a célja, hogy az egyik eszközből a lehető legtöbb színnel rendelkezzen, a festék esetén egy gyökfüggvénnyel leírható kiértékelés szerint. Így az első esetben 5 további ceruzát, a másodikban 3 további festéket fog vásárolni.

Irodalom

1. Simon Gray, *The Happiness of States*, 1815.
2. Robert Jensen, Nolan Miller, *Giffen Behavior: Theory and Evidence*, Harvard University, Faculty Research Working Papers Series, 2002, RWP02-014
3. Kotász Gyuláné, A lakosság kereseleti struktúrájának elemzése a LES és AIDS módszerekkel, *Statisztikai Szemle*, 1985. július, 667. oldal
4. Lakatos Imre, *Bizonyítások és cáfolatok*, Gondolat, Budapest, 1981., 81. oldal, 2. szabály
5. Alfred Marshall, *Principles of Economics*, Macmillan, London, 1895.
6. Peter G. Moffatt, Is Giffen behaviour compatible with the axioms of consumers theory? *Journal of Mathematical Economics*, 2002, 259–267.
7. Krystina Ng, *A Literature review of Giffen Goods*, ADMN 544 Final Paper
8. Sherwin Rosen, Potato Paradoxes, *Journal of Political Economy*, 1999, 214–313.
9. Peter Norman Sörensen, *Simple Utility Functions with Giffen Demand*, 2005, http://www.econ.ku.dk/sorensen
10. Szabó István, *Az élelmiszer-árrugalmasság elemzése*, VI. Nemzetközi Agrárökonómiai Tudományos Napok, Gyöngyös, 1998. március 24-25., 4. kötet, 84–89.
11. Varian, H. R., *Microeconomic Analysis*, W. W. Norton & Company, New York, 3. kiadás, 1992.

A MATHEMATICAL MODEL OF GIFFEN BEHAVIOUR

In this paper we . . .

COASE TÉTELE A SCITOVSKY-PARADOXON TÜKRÉBEN[1]

BARANCSUK JÁNOS
Pécsi Tudományegyetem

Tanulmányunk Coase tételének olyan interpretációjára törekszik, amelynek révén lehetővé válik, hogy e doktrínát a Kaldor-Hicks-Scitovsky-féle próbák logikai terében értelmezzük. Miután a két gondolati rendszerben rejlő izomorfiát láthatóvá tettük, igazolni próbáljuk majd, hogy a Marshall és Pigou által ,,külső"-nek nevezett gazdasági hatások *bizonyos fajtái* esetén a Coase-tétel elbukhat a Scitovsky által javasolt jóléti teszten. Amennyiben hipotézisünk bizonyítást nyer, további feltételeket, korlátokat ismerünk meg az ,,externália" társadalmilag tolerálható (,,kívánatos") értékének (egyúttal a vele járó terhek és előnyök), általában véve az erőforrások optimális megoszlásának/megosztásának elvi megismerhetőségét illetően. Eredményeink végső soron azokat a nézeteket támogatják, amelyek bizonyos kételyeket támasztanak a termelési tényezők Pareto-hatékony allokációjának egyértelműségével szemben.

1 Bevezetés

Örvendetes súlypont-áthelyeződés jeleire utal napjaink közgazdaságtanában a környezetszennyezéssel kapcsolatos elméletek térhódítása. Megállapításunkkal természetesen nem bolygónk becstelen pusztítására, hanem e jelenség megértését és visszaszorítását célzó szakirodalom rangjának növekedésére gondolunk. A jelzett témára reflektáló, gazdaságpolitikai ajánlásokat is megfogalmazó megközelítések közötti harc ugyan nem jutott egyértelmű nyugvópontra, de talán kijelenthetjük, hogy *Coase* [1959], [1960], [1988] frappáns, az externhatások piackonform kezelésére vonatkozó szemlélete tekinthető a legkorszerűbbnek. Bár hazánkban egyelőre a ,,hagyományos", *pigou*-i [1912], [1932] ihletettségű környezeti intézkedések tűnnek ,,nyerőnek", az Európai Unió gyakorlata —pl. az ISO 14000 szabványsorozat esetében— kifejezetten a jogi-piaci keretek által generált önszabályozási mechanizmusokra támaszkodik.

,,Majdnem harminc évre, és Allyn Young, valamint Robertson, Knight, Sraffa és Viner urak egyesített erejére volt szükség ahhoz, hogy kibogozzák azokat a helyes és téves szálakat, amelyek átszövik [az externáliákra vonatkozó] Marshall–Pigou koncepciót" – állapítja meg *Bator* egyik legismertebb cikkében ([1958], *B. J.* kiegészítése). Ugyancsak közel harminc évvel egy másik, hasonló témát feszegető ,,alapmű" (Coase [1960]) megjelenése után

[1]Beérkezett: 2006. október 30. E-mail: `indian@ktk.pte.hu`.

születnek az alábbi sorok: „Sem a 'Coase-tétel' elnevezés, sem annak szabatos megfogalmazása nem tőlem származik. Mindkettőt Stiglernek [1966], [1975] köszönhetjük." A Nobel-díjas Coase nyilatkozik ilyen visszafogottan szellemi termékének pályafutását, egyfajta „közkinccsé válását" értékelve, nem tagadva, hogy az említett tétel mindazonáltal saját munkáin alapul, „amelyekben ugyanez a gondolat megtalálható, bár más formában." (Coase [1988] 217. o., v.ö. Blaug [2001] 246-247. o.).

A szóban forgó doktrínának valójában még Stigler kifejtésén túl is számos, más értelmezési módja létezik, jelezve a közgazdasági gondolkodást megtermékenyítő hatását. Ezek közül általában mindegyik interpretáció kitér arra, hogy amennyiben a környezet használatával kapcsolatos jogok egyértelműen deklaráltak, valamint a gazdasági interakcióban résztvevő felek egyezkedésének költségei elenyészők, akkor az erőforrások, nemkülönben a használatukkal járó effektusok (Pareto-)hatékony allokációja hatósági beavatkozás nélkül is megvalósul. Maga Coase fontosnak tartja kiemelni, hogy az optimális allokáció a termelési érték maximumához vezet, és független a jogi preferenciák kezdeti irányultságától, Stigler pedig azt helyezi érvelésének középpontjába, hogy zérus tranzakciós költségek mellett az egyéni és társadalmi költségek megegyeznek, az externhatás ily módon lényegében eliminálódik.

Természetesen a legeredetibb, leghaladóbb, leghasználhatóbb elméletek sem menekülnek meg a szigorú kritikáktól. Az alábbiakban közölt hozzájárulásunkkal a szakma Coase gondolati rendszerével kapcsolatos „kötelező" fenntartásait és korrekcióit —melyek színvonalas összegzését végzi el *Cullis–Jones* [2003] (53–57. o.) és *Kerekes–Szlávik* [1999] (111–112. o.)— szeretnénk bővíteni. Annak érdekében, hogy a tárgykörrel kapcsolatos saját meglátásainkat logikailag tisztán közölhessük, az idézett forrásmunkák által citált bíráló, vagy bizonyos mértékig elmarasztaló megállapítások érvényességét átmenetileg felfüggesztjük.

2 Modellfeltevések, az alkalmazott módszertani és fogalmi rendszer

Gondolatainkat egy mélyen absztrakt, kétszereplős modell keretei között mutatjuk be. Feltételezzük, hogy aktoraink, A és B egy meghatározott erőforrástömegen (F) osztozva állítják elő az általuk hasznosítható/használt —hasonló betűkkel jelölt— javakat. Az erőforrás összes lehetséges elosztásához tartozó kibocsátási kombinációik halmazát a *termelési lehetőségek* (a továbbiakban *eredmény-*) *határ*-görbéjének (RF) pontjaival reprezentáljuk, amely az *1. ábrán* az aktorok tevékenységének (csupán az egyszerűség kedvéért feltételezett) *állandó hozadékáról*, tehát konstans (tg γ) transzformációs rátáról tanúskodik. A görbe valamely P pontjának koordinátái (A_P és B_P) az F egy konkrét allokációja esetén megvalósuló outputkombináció összetételére utalnak.

1. ábra. Az eredmény-határ görbe állandó hozadék esetén

Vezessük be most a *termelési komfort/diszkomfort* [a továbbiakban (disz-)komfort] fogalmát! Ez alatt az A és B által *egyaránt* észlelhető, de működésük hatékonyságát *ellentétesen* befolyásoló állapotokat, körülményeket, jelenségeket, megnyilvánulásokat értünk, amelyek létrehozásában/létezésében, illetve megszüntetésében/hiányában értelemszerűen a felek *ellenérdekeltsége* áll fenn. Az előbb alkotott fogalom tulajdonképpen valamelyik fél által emittált (vagy fenntartott) és a másik által *elszenvedett* (dolgozatunkban tehát kizárólagosan *negatív*) *,,externáliát"* takar, a definícióban azonban szándékosan kerültük a ,,külső gazdasági hatás" kifejezés használatát. Ennek egyik magyarázata, hogy az illető effektus modelljeinkben internalizálódik. Fogalmazásmódunk semlegessége másrészt az ,,externália" Coase által szemlélt *reciprocitását, kölcsönösségét*, és nem a hagyományos ,,kibocsátó–sértett" szerepek *egyirányú,* pigou-i vertikalitását kívánta kiemelni, elkerülve ez utóbbi beállításhoz tapadó gondolati reflexek életre hívását. Amint Coase fogalmaz: ,,A hagyományos [Pigou-hoz kapcsolódó] megközelítés elhomályosította a meghozandó döntés természetét. A kérdés általában abban a formában merül fel, hogy A kárt okoz B-nek, és amit el kell dönteni, az az, hogy miként akadályozzuk meg ebben A-t. Ez azonban hibás. Egy kölcsönös jellegű problémával van dolgunk. B kárának megakadályozása érdekében tulajdonképpen kárt okozunk A-nak. A valódi eldöntendő kérdés az, hogy A okozhasson-e kárt B-nek, vagy B okozhasson-e kárt A-nak. A feladat a nagyobb kár elkerülése." ([1960] 140. o., *B. J.* kiegészítése.)

Mivel a termelési (disz)komfort megnyilvánulásai a szereplők tevékenységének hatékonyságát modulálják, ezért befolyásolják az eredmény-határ görbe pozícióját is. E hatás —a (disz)komfort típusától és erősségétől függően— különböző formákban és ,,vehemenciával" nyilvánulhat meg. A következőkben csak három fontos változat elemzésére térünk ki, természetesen nem zárva ki továbbiak létezését és relevanciáját sem. Vizsgálatunk előbb a jelenség A és B közötti *„átfordulásának”, „előjelváltozásának”* leképezésére koncentrál, majd arra keresünk választ, hogy az egyes esetekben milyenek a Coase-tétel teljesülésének esélyei. A (disz)komfort átfordulását a létezésével kapcsolatos (ellen)érdekeltség teljesülésének/teljesületlenségének felcserélődéseként értelmezzük (példának hozva a dohányzó – nem dohányzó szereplők sztereotip esetében a tiszta levegőhöz, vagy a füstöléshez való jog pálfordulásának következményeit).

3 A termelési (disz)komfort főbb típusai

Analízisünk során általában és önkényesen azt feltételezzük, hogy a *kezdeti,* A és B által egyaránt észlelhető állapotrendszer *utóbbi* szereplőnk számára minősül előnyösnek (ami a hagyományos szóhasználat szerint jelentheti azt, hogy B szabadon, korlátozások nélkül űzheti A számára zavaró tevékenységét, de azt is, hogy A hoz áldozatokat saját működésének természetes, ám B szempontjából kellemetlen hatásait elfojtandó). Vajon mi történik az eredményhatár görbével, ha valamilyen oknál fogva a (disz)komfort előjele megfordul, (azaz B eliminálja, közömbösíti saját környezeti emisszióját, vagy viseli el A-ét)? A válaszadás során az átfordulást egyelőre az „externhatás” (relatív) erősségét kifejező valamely skála két pontja közötti *ugrásnak* (diszkrét és nem folyamatos átmenetnek) képzeljük el abban az értelemben, hogy valamilyen *rögzített* mértékű (vagy arányú) hatás megjelenéseként/eltűnéseként definiáljuk.

Az *elsőként* vizsgált esetben a (disz)komfort előjelváltása az erőforrás bármilyen allokációja mellett konstans (dA) nagysággal növeli az A, és szintén konstans nagysággal (dB) csökkenti B eredményességét (kibocsátását). Ha az „externália dózisát”, mint változót E-vel jelöljük, a két szereplőre ilyenkor pl. az

$$A = \alpha + E \cdot a \tag{1}$$

valamint a

$$B = \beta - E \cdot b \tag{1a}$$

termelési függvények lehetnek jellemzőek. A fenti formulákban α és β változók az F erőforrásból felhasznált mennyiségek, amikor is

$$F = \beta + \alpha \ , \tag{2}$$

a és b pedig valamilyen nemnegatív „technológiai” konstansok. Az E ellentétes előjelei egy meghatározott mértékű környezeti hatás A versus B számára ellentétes hatékonysági konzekvenciáira utalnak. Ha a továbbiakban azt is feltételezzük, hogy a *spill over* effektus tökéletesen szabad érvényesülését vagy tökéletes blokkolását *ugyanazon* szám (E) pozitív és negatív változatai jelentik —természetesen *vica versa*— szereplőinknél, akkor az is teljesül, hogy

$$dA = (\alpha + E \cdot a) - (\alpha - E \cdot a) = 2a \cdot E \ , \tag{3}$$

és

$$dB = (\beta - E \cdot b) - (\beta + E \cdot b) = -2b \cdot E \tag{3a}$$

Az E ,,átfordulásával" járó transzformáció tehát A és B termelési függvények α és β szerint *parciális* alakjainak konstans mennyiséggel való párhuzamos (függőleges) elmozdulását eredményezné.

2. ábra. Az eredmény-határ görbe elmozdulása konstans hatású (disz)komfort átfordulása esetén

A *2. ábra* szerint az ilyen fajta (disz)komfort megjelenése az eredményhatár görbe minden pontjának dA és dB vektorok eredőjének megfelelő áthelyeződésével jár, vagyis *az új görbe a régi leképezéseként jön létre.* (A B számára előnyös környezethasználatra jellemző görbét a továbbiakban RF_B-vel, míg az A szempontjából komfortos esetben RF_A-val jelöljük.) Az egymásnak kölcsönösen megfelelő pontok —mint amilyenek pl. P és P'— az F erőforrás *ugyanazon elosztási arányai* mellett érvényes kibocsátási kombinációkat jelképezik. Belátható, hogy ha

$$dA/dB > \mathrm{tg}\,\gamma \ \ (= MRT)\,, \tag{4}$$

akkor a leképezés (mint ábránkon is) balra-*felfelé,* ellenkező esetben balra-*lefelé* tolja el —az eredetivel párhuzamos pozíciót fenntartva— az eredményhatár görbét.

Egy kitérő erejéig térjünk vissza az E változó értelmezésére, amelynek értékei —mint jeleztük— a (disz)komfort erősségére, egészen pontosan: érvényesíthető ,,dózisára" utalnak. A *Pigou*-féle felfogás szerint —amelyben az emittens és a fogadó szerepei egyértelműek— az E jellemző módon *eltérő* abszolút értéket venne fel a két fél termelési függvényében. Az $E = 0$ az *emittensnél* a ,,szabad", korlátozások nélküli működést jelezné, amihez a *fogadónál* valamilyen $E < 0$, a hatékonyságot gyengítő nagyság társulna. Az E változó *fogadónál* regisztrált zérus szintje ugyanakkor az *emittensnél* feltételezne negatív értéket, az externália elfojtásának költségvonzatait képviselve. (A mindkét aktornál *szimultán* érvényes $E = 0$ a külső hatás *ab ovo* hiányát tükrözné.) A *Coase*-féle szemlélet azonban —mint láttuk— mindössze A és B ellentétes érdekeltségét állapítja meg a környezet használati módját illetően, és a jog korántsem abszolút, korántsem örökérvényű —mintegy *ad hoc*— állásfoglalására bízza a *kibocsátó* és *sértett* szerepek kiosztását. Az E egyes szereplőknél megjelenő értékei ezért az origóhoz képest *szimmetrikusak*, míg az $E = 0$ kétféle jelentéssel is bír: vagy a (disz)komfort tökéletes hiányára, vagy a környezeti jog semleges, 50-50%-os A és B közötti „elosztását" (és érvényesítését) jelentő *kompromisszumra* enged következtetni.

Folytassuk azonban a *második* típusú (disz)komfort bemutatásával, amelynek jellemzője, hogy A és B tevékenységének *általános* —vica versa kedvezőtlen/kedvező— környezeti állapotát befolyásolja. Talán a *„hazai pálya előnye"* kifejezés jellemzi legjobban a lényegét. Hatása abban nyilvánul meg, hogy valamilyen konstans %-kal növeli az egyik, és valamilyen konstans %-kal mérsékli a másik szereplő kibocsátását az eredeti (ellentétes) helyzethez képest — a sportolók otthoni versus idegen környezetben felmutatott teljesítményéhez hasonlóan. Ahogy *Rousseau* [1775] —véleményünk szerint némileg vitára ingerlően, esetünkre vonatkozóan azonban mégis találóan— fogalmaz: „ami veszteség felebarátainknak, az nekünk magunknak hasznot hajt, s ami az egyik embert tönkreteszi, az a másikat csaknem mindig meggazdagítja" (169. o.) Az ilyenkor érvényes termelési függvények alakja lehet például az

$$A = \alpha \cdot k^{aE} \tag{5}$$

és

$$B = \beta \cdot k^{-bE} \ , \tag{5a}$$

ahol $k \geq 1$ az „externália" *„alapintenzitására"* utaló konstans, a többi jelölés értelmezése változatlan. A környezet használatával kapcsolatos effektus erőssége tehát —mint látjuk— ezúttal alapvetően két —k és E— tényezőtől, járulékosan pedig a és b értékétől függ.

A *3. ábrán* az ilyen jellegű (disz)komfort átváltása az A termelésében A_1/A_0-szoros hatékonyságnövekedést, B termelésében viszont B_1/B_0 arányú hatékonyságcsökkenést idéz elő, ahol

$$A_1/A_0 = \frac{\alpha \cdot k^{aE}}{\alpha \cdot k^{-aE}} = k^{2aE} \tag{6}$$

és

$$B_1/B_0 = \frac{\beta \cdot k^{-bE}}{\beta \cdot k^{bE}} = k^{-2bE} \tag{6a}$$

3. ábra. Az eredmény-határ görbe elmozdulása a „hazai pálya előnye" típusú környezethasználati jog átváltásából/átruházásából eredően

Ábránkat $a = b$ feltételezésével szándékosan *szimmetrikusra* rajzoltuk, egyrészt a coase-i szemléletmód szellemiségének kifejezése, másrészt bizonyos, hamarosan tárgyalt összefüggések plasztikusabb —ugyanakkor egyszerűbb— megjelenítése érdekében. Az RF_B és RF_A görbék megjelölt ($B_{0,1}$, $A_{0,1}$, N, P, M) pontjai közti nyilak az egyes outputkombinációk megfelelésére utalnak a *spill over* irányváltozása során.

A *harmadik* változat bemutatásakor feltételezzük, hogy a (disz)komfort erőssége a két partner *erőforráson való osztozkodásának arányaihoz* (is) köthető. A *4. ábra* szerkesztésekor —ennek értelmében— abból indultunk ki, hogy a szereplők működésének hatásfoka (a környezet használatához fűződő jog preferenciáin kívül) azonos irányban változik a saját, és fordított irányban a másik fél által használt tényezőtömeg nagyságával. Ez akkor figyelhető meg, ha a működési környezet „(de)formálódása" nagyban függ a szereplők tevékenységének → kibocsátásának (relatív) *terjedelmétől* (is). A termelési függvények lehetséges formulái ekkor

$$A = \alpha \cdot k^{[(\alpha \cdot a \; ad \; E)-(\beta \cdot b \; ad \; -E)]/F} \tag{7}$$

valamint

$$B = \beta \cdot k^{[(\beta \cdot \flat \; ad \; -E)-(\alpha \cdot \hat{a} \; ad \; E)]/F}, \tag{7a}$$

ahol a és b az A tevékenységre, $\hat{a}$ és $\flat$ pedig a B tevékenységre jellemző nemnegatív technológiai paramétereket jelölnek, az E különböző szintjei viszont ezúttal inkább kifejezetten a *környezeti jog „egyes felek által birtokolt dózisaiként"* értelmezhetők.

4. ábra. A szereplők tevékenységének terjedelmétől függő (disz)komfort átfordulása

A (7) függvény elemzése során megfigyelhető, hogy E egyre nagyobb, *pozitív* előjelű értékei (melyek a kárfelelősség tekintetében A fokozott *mentességére, favorizáltságára* utalnak) *ceteris paribus* egyre magasabb hatványkitevőt rendelnek k-hoz, mint a jog ellenkező irányultságát jelző *negatív* előjel esetén. Ez azt jelenti, hogy A hatékonyságának a B tevékenységtől való függése azzal arányosan csökken, ahogy a szabályozás egyre erősebben kötelezi B-t az emisszió elfojtására. Az E *zérus* szintje ez esetben egyfajta *„ex lex”* állapotot tükröz, amikor a termelők által kölcsönösen érzékelt „külső” hatások erőssége közvetlenül, a jog által *nem moduláltan* függ az erőforrás megosztásának arányától, és csak az F tényezőtömeg 50-50%-os allokációja esetén semlegesítődik. A két szereplő tökéletesen *független, eleve externália-mentes* tevékenységét $k = 1$ jelképezné.

Igaz továbbá, hogy α magas és β ennek megfelelően alacsony értékei ugyancsak a kitevő növekedését eredményezik, vagyis a B termelése által kiváltott, A számára negatív környezeti effektus mérséklődik a kellemetlen partner által használt tényezőtömeg csökkenésével. Az eredmény-határ görbék most jellemző *konvex* pozíciója jól tükrözi a két fél egymást kölcsönösen irritáló tevékenységét, aminek egyik következménye, hogy két tetszőleges kibocsátási kombináció *átlaga* kívül esik a termelési lehetőségek határán. (V.ö.: Hirschleifer [1987] destruktív kooperációra utaló görbéjével.)

Előbbi megállapításaink természetesen az E változó *ellentétesen* szélsőséges szintjei, továbbá B szempontjából értelmezve a (7a) formulában — *mutatis mutandis*— érvényesek.

4 A Kaldor-Hicks és a Scitovsky-próbák alkalmazása az externáliák Coase-féle kezelésére

A Kaldor-Hicks, illetve Scitovsky-próbákkal kapcsolatos vizsgálatokat a matematikailag könnyebben kezelhető *,,második típusú"* (disz)komfortra vonatkozóan végezzük el. Mivel —mint láthattuk— a második és harmadik eset eredmény-határ görbéinek pozíciói, ha nem is minden, de sok szempontból hasonlóak, az egyszerűbb változat elemzésével a bonyolultabb konstellációra is helytálló megállapításokat tehetünk. Tekintsük tehát a 3. ábra megfelelő interpretációjaként közölt *5. ábrát*, amely szerint két, *egymást metsző* eredmény-határ görbe S és R pontja között létezik kölcsönös leképezés. S érvényessége az A, míg R érvényessége a B számára jelent kedvező jogi környezeti szabályozást. Tegyük fel, hogy B szereplő megkísérli A-tól ,,megvásárolni" a környezet komfortos használatára vonatkozó jogot, ami ábránkon $S \rightarrow R$ elmozdulásnak felelne meg. A Kaldor-Hicks próba szerint az akció a társadalom szempontjából kívánatos, vagyis *potenciális paretoi javulást* tesz lehetővé, ha a vásárló *sikeresen* képes kompenzálni a jog eredeti kedvezményezettjét. Az A kompenzációja modellünkben az R pontot tartalmazó $A_0 - B_0$ eredmény-határ görbén történő elmozdulásként mutatható be, és az F erőforrás egy részének átcsoportosításaként (reallokációjaként) értelmezhető $B \rightarrow A$ között. (Itt jegyezzük meg, hogy feltehetően érdekes analógiákat kínál —az allokációs probléma közös talaján— a Kaldor–Scitovsky versus Coase-modellek összevetése a komparatív előnyök elméleti rendszerével.)

5. ábra. Kaldor- és Scitovsky-féle próbák a környezeti jog megszerzésének kísérleténél

A kompenzáció akkor sikeres, ha az egyik aktor kompenzációs hajlandósága nem kisebb a másik kompenzációs igényénél. A B szereplő kompenzációs *hajlandósága* az a legnagyobb áldozat, amelynek vállalásával még éppen nem kerülne rosszabb helyzetbe, mint amilyenben eredetileg, a környezeti jog megvásárlása előtt volt. Ezt az R^B ponttal jelöltük, ami az S által magában foglalt B mennyiség létrehozásának lehetőségét tükrözi. Az A kompenzációs *igénye* —amelynek még éppen elfogadható határát a koordináta-rendszeren már kívül eső R^A pont szemléltetné— ugyancsak a környezeti jog átadása előtti (szintén S-nek megfelelő) outputszint biztosításához kötődik. Mivel ez —mint észrevehető— meghaladja B aktor kompenzációs hajlandóságát, a jog megszerzésére irányuló akciója *sikertelen.* Mindez arra utal, hogy a társadalom számára az A *szabad* környezet-használata lenne kívánatos. Ez azonban csak akkor válik biztossá, ha Scitovsky ellenpróbája is igazolja a Kaldor-Hicks teszt eredményét.

Az ellenpróbát most az jelentené, ha abból indulnánk ki, hogy a környezeti jogot kezdetben B birtokolja, és A szeretné megszerezni. A szerepek tehát felcserélődnek, ezúttal A feladata a kompenzáció. A kompenzációs hajlandóságát —*mutatis mutandis*— az S^A pont határolná, míg B minimális kompenzációs igénye az S^B pontba való eljutással lenne analóg. Esetünkben az akció *sikeres*, a környezeti jog megvásárlása potenciális paretoi javulást tesz lehetővé. *A sikeres Scitovsky-próba egyúttal a Coase-tétel érvényességével egyenértékű, vagyis az eredeti jogi szabályozástól függetlenül a gazdasági szereplők egyezkedése ugyanazt a végeredményt szolgáltatja a környezet használati módját illetően.*

Amint a Bevezetésben már megjegyeztük: a szakirodalom nem egységesen értelmezi a tétel kritériumait. „Néhány szerző szerint Coase csak annyit állít, hogy a külső gazdasági hatások költségmentes alkufolyamata Pareto-hatékony kimenetelre vezet, és nem azt, hogy az eredmény független lesz a tulajdonjogi hozzárendelésről" – állapítja meg *Varian* ([2001] 600. o., lábj.). A félreértések elkerülése végett explicitté tesszük, hogy jelen tanulmány ugyancsak és mindössze a Pareto-hatékonyság „gyenge" feltételéhez kapcsolja a Coase-tétel érvényességét, nem kötve ki az allokáció és/vagy a jövedelmek (profit) megoszlásának jogsemlegességét is. Az 5. ábrán észrevehető ugyanis, hogy az A számára kedvező jogi szabályozás az S pontnak, míg jog B szempontjából előnyös rendelkezése az S^B pontnak megfelelő, az előzőtől eltérő —bár R-hez képest ugyancsak Pareto-hatékony— tényezőallokációt és egyúttal jövedelmet eredményez.

Azonban az sem teljesen egyértelmű, hogy a tétel szigorúbb felfogásánál minek az allokációja lesz független a jogrendszertől. Varian például a közös légtérben élő dohányos és antinikotinista példáján keresztül *a külső gazdasági hatás hatékony szintjének* közömbösségét jelöli meg kritériumként, majd azt is bebizonyítja, hogy ez csak a jövedelem állandó határhaszna (*kvázilineáris* preferenciák) esetén teljesül (i.m. 599–600. o.). *Schumann* [1998] ugyanakkor olyan modellt alkot, amelyből az derül ki, hogy „a jogrendszer [még a Varianéhoz hasonló speciális feltevések hiányában is] a kétféle termelés *tényező*felhasználása tekintetében semleges. Az egyik jogi megoldásról a másikra való áttérés nem változtatja meg a tényezőallokációt. *A nyereségeket illetően azonban nem állíthatjuk ugyanezt*" (363. o., *B. J.* kiemelései és kiegészítése). Cullis és Jones [2003] gondolati keretei hasonló következtetést szülnek, azonban Mishan [1981] nyomán megjegyzik, hogy ,,az erőforrások allokációja csak akkor [marad] ugyanolyan, ha nem merül fel a tulajdonosi jogok allokációjához kapcsolódó jövedelmi hatás" (i.m. 51. o., *B. J.* kiegészítése). Maga Coase adja talán a legrigorózusabb értelmezést, mely szerint ,,tranzakciós költségek hiánya esetén az *erőforrások elosztása azonos marad*, bármi is a jogi helyzet a káros hatásokért viselt felelősség tekintetében. Sok közgazdász azonban amellett érvelt, hogy ez a következtetés hibás, mivel még nulla tranzakciós költségek mellett is a jogi helyzet változása befolyásolja a *jólét* elosztását. Ez ugyanis a javak iránti kereslet módosulásához vezet, beleértve —és ez a dolog veleje— azokat is, amelyeket a károkozó tevékenységgel és a kárt elszenvedők által végzett tevékenységgel állítanak elő. [...] Ez az érvelés szerintem hibás, mivel *a kárfelelősség szabályának megváltoztatása nem vezet a jólét elosztásának módosulásához*" ([1988] 235-236. o., *B. J.* kiemelései).

Tanulmányunk rendkívül fontosnak tartja, bár nem tekinti saját feladatának, hogy pontosan tisztázza: melyek az előbbiekben említett megközelítések rejtett előfeltevései és/vagy melyek azok a különbségek az egyes modellekben leképezett helyzetek között, amelyek az általuk sugallt eltérő álláspontokat, következtetéseket megmagyaráznák. *Zalai* [2000] viszonyulását tartjuk mérvadónak e téren, mely szerint ,,a verbális elméletek formalizált, axiomatikus kifejtése élesebb megvilágításba helyezi az egyébként gyakran csak homályosan megfogalmazott állításokat, elősegíti azok érvényességi feltételeinek és korlátjainak tisztázását, és lehetővé teszi olyan következtetések feltárását is, amelyeket a matematikai levezetés nélkül minden bizonnyal fel sem lehetne fedezni" (7. o.).

5 A Scitovsky-paradoxon jelentkezése a Coase-tétel logikai terében

Térjünk most vissza a 3. ábrához! Először is állapítsuk meg, hogy szimmetrikus elrendezésük miatt az $A_0 - B_0$ és $A_1 - B_1$ görbék hosszúsága azonos, kölcsönösen leképezett pontjaik A vagy B tengelymetszettől való távolsága pedig megegyezik. Ezt követően lássuk be, hogy ebből adódóan az $A_0 - B_0$ görbe P pontjának az $A_1 - B_1$ görbe M pontja felel meg, ugyanakkor $A_0 - P$ és $A_1 - M$ szakaszok hosszúsága egyenlő. Ugyanilyen meggondolásból igaz, hogy az $A_0 - B_0$ görbe N pontjának leképezése P, és teljesül, hogy $B_0 - N$ szakasz és $B_1 - P$ szakasz hossza egyenlő. Az ábrán vastag vonallal feltüntetett $M - P$ és $P - N$ görbeszegmensek olyan, a (disz)komfort előjelváltása esetén egymásnak megfelelő outputkombinációkat tartalmaznak, amelyek létezése kikezdi Coase —az optimális allokáció *egyértelműségére* vonatkozó— tételének érvényességét. A két görbe közötti kölcsönös leképezések e tartományában ugyanis a Scitovsky-féle ellenpróba kudarcot vall, s ezáltal Coase doktrínája nem teljesül.

6. ábra. A Scitovsky-paradoxon és a Coase-tétel ütközése

Ennek szemléltetésére a *6. ábrán* megvizsgáljuk, hogy mi történik, ha a kezdeti outputkombinációt a $P - N$ szakasz egy bizonyos pontja, G képezi. Belátható, hogy A kísérlete a környezeti jog megszerzésére sikertelen, mivel az ennek révén elérhető H pontból csak ,,önsorsrontó" módon tudná B kompenzációs igényét kielégíteni. A Kaldor-Hicks teszt tehát a társadalom számára B termelési komfortját és A diszkomfortját tekintené előnyösnek. A Scitovsky-féle ellenpróba ugyanakkor paradoxonhoz vezet: ha eredetileg A rendelkezne a környezet szabad használatával, és a H kombinációból rugaszkodnánk el, akkor a B lenne képtelen a G pontba való átjutást követően a kompenzációs igénynek eleget tenni. Ami azt sugallná, hogy társadalmilag nem a B, hanem A szereplő környezet feletti rendelkezése lenne kedvező, ellentmondva az előző következtetésnek.

Mitől függ az előbbiekben vázolt ellentmondásos helyzet felbukkanása? Mindenekelőtt szögezzük le: a szóban forgó (disz)komfort *típusától*, amelynek előjelváltása az eredmény-határ görbe elmozdulásaként ábrázolható. Láttuk, hogy a paradoxon *egymást keresztező* görbéket feltételez, ami az ,,externáliák" bár nem mindegyik, de több (az általunk bemutatottak közül a második és harmadik) fajtája esetén is jellemző az ,,átfordulást" követően.

A következő tényezőt a szereplők között allokált erőforrás *osztozkodási aránya* jelenti. Ettől függ ugyanis, hogy a két görbe kölcsönösen megfelelő pontjai az $M-P-N$ szakaszon, vagy azon kívül helyezkednek-e el. A 3. ábrát szemlélve úgy tűnik, hogy *az elosztás szélsőséges arányai mellett kisebbek a Coase-doktrína ellehetetlenülésének esélyei.*

A Scitovsky-paradoxon felbukkanásának valószínűsége szoros kapcsolatban van továbbá az egyes eredmény-határ görbék inkriminált szakaszainak a teljes görbéből elfoglalt *hányadával* is. Az általunk vizsgált szimmetrikus esetre belátható, hogy ez az arány (amikor a görbék metszéspontja egy 45°-os szögfelezőn helyezkedik el) a *7. ábra* alapján nem más, mint

$$R = (f - g)/(f + g)\ , \tag{8}$$

értéke pedig $f = g$ egyenlőség mellett lesz *zérus.* Ez az (5) és (5a) formulákat alapul véve $k = 1$, és/vagy $E = 0$ esetén teljesül, amikor $\lambda = \mu = 45°$ azt jelzi, hogy a (disz)komfort átfordulása —az „externália" termelésre gyakorolt elenyésző hatása miatt— nem befolyásolja érdemben az eredmény-határ görbék (vagy ha úgy tetszik: outputkombinációk) helyzetét, azok tehát fedik egymást. Az „externália" intenzitásának és dózisának eredőjét legjobban talán ($a = b = 1$ feltétel mellett) a

$$\Psi = A_1/A_0 = B_0/B_1 = k^{2E} \tag{9}$$

hányadosokkal lehet jellemezni, amelyek az átfordulásból adódó hatékonyságváltozás *erősségét* mérik. *Minél erősebb tehát a (disz)komfort hatékonyságot befolyásoló szerepe, annál nagyobb a valószínűsége, hogy Coase tétele nem érvényesül*, a környezet „optimális állapota" és az erőforrások kívánatos allokációja meghatározhatatlan.

7. ábra. A Scitovsky-paradoxon által érintett output-kombinációk aránya

Az eddigiekben azonban feltételeztük, hogy a termelési (disz)komfort *oszt(hat)atlan* nagyság, vagyis az átfordulás folytonosságának hiánya miatt a két eredmény-határ görbe pozíciója között nincs folyamatos átmenet. A továbbiakban azt próbáljuk bizonyítani, hogy az ,,externália" dózisának (E) *folytonossága* csökkentheti a Scitovsky-paradoxon fellépésének veszélyét.

6 Az outputkombinációk trajektóriái a (disz)komfort átfordulásának folyamatossága esetén

Most ismét abból indulunk ki, hogy a környezeti feltételek eredetileg B számára komfortosak, amikor az $A_0 - B_0$ görbe tekinthető érvényesnek. Feladatunkat ezúttal azoknak a trajektóriáknak a meghatározása és vizsgálata jelenti, amelyek E értékének *folyamatos* módosítása során az eredmény-határ görbe egyes pontjainak $A_1 - B_1$ felé vezető ,,útvonalát" képezik az outputkombinációk síkjában. Az így nyerhető információk jelentőségét az adja meg, hogy az említett ösvények bizonyos tartományai a kezdeti és a végső eredmény-határ görbék pontjaihoz képest Pareto-hatékony helyzeteket szimbolizálhatnak, amelyek létezése javítaná a környezeti jog megszerzésekor esedékes kompenzáció lehetőségét. A 3. ábra kiegészítésével nyert *8. ábrán* követhetjük nyomon vizsgálatunk eredményeit. (A jobb áttekinthetőség kedvéért az *RF*-görbék hajlásszögét némileg torzítottuk az eredeti megjelenítéshez képest.)

8. ábra. Az outputkombinációk trajektóriái a környezeti jog folyamatos ,,előjelváltása" során

Ami számunkra érdekes, hogy a Scitovsky-paradoxon által veszélyeztetett tartományban a (disz)komfort *oszthatósága* a $C-D$ (legjobb) trajektória felbukkanásával némileg visszaállíthatja a Coase-tétel megtépázott tekintélyét. Ez azt jelenti, hogy a környezeti jog —az eredmény-határ görbék $C-P$ és $P-D$ szakaszainak pontjaiból kiinduló— megvásárlásának kísérleteire Coase doktrínája újból érvényessé válik, hiszen a $C-D$ ösvény ,,felkínálkozása" paretoi javulást, vagyis sikeres kompenzációt tesz lehetővé. Modellünk eredeti feltevéseihez képest azonban fontos különbséget takar, hogy a $C-D$ ívre való eljutás a (disz)komfort csupán *részleges* reallokációjának felel meg, hiszen az E két szélsőséges értéke közötti teljes átváltás nem következik be. Figyeljük meg: az $M-C$ és $D-N$ szakasz pontjaiból elrugaszkodó próbák továbbra is a Scitovsky-paradoxon ,,hatáskörében" maradnak. (Ígéretesnek bizonyulhat a Kaldor–Hicks- és Scitovsky-féle próbák ,,eredeti" kontextusára alkalmazni az oszthatóság lehetőségét.)

A Coase-tétel által ábrázolt egyezkedés további érdekes lehetőségeire világítanak rá az $U-P$ és $X-P$ szakaszok pontjaiból induló jogátruházási kísérletek. Észrevehető ugyanis, hogy a felek előtt ekkor *kétféle* megoldás kínálkozik. Egyrészt módjukban áll a *teljes* kárfelelősség paretoi javulást eredményező cseréjét választaniuk, hiszen a $T-M$ vagy $Y-N$ szakaszokba eljutva *sikeresen* kompenzálhatják onnan partnerüket. Másrészt a jog *részleges* átengedésével kapcsolatos tárgyalásokba bocsátkozhatnak, hiszen az $U-P$ és $X-P$ szakaszok pontjaiból ,,rálátásuk nyílik" az optimális trajektóriára. Tanulmányunkon túlmutató vizsgálatok tárgya lehet, hogy milyen motívumok határozzák meg ilyenkor az alkufolyamat egyik vagy másik lehetősége közötti választást.

Figyelemreméltó, hogy a C és D pontok az A_1-B_1 és A_0-B_0 szakaszok *felezői,* vagyis a paretoi optimumot szolgáltató trajektória —*modellünk adottságait tükrözve*— az F erőforrástömeg 50-50%-os megosztása mellett jön létre. Ezt az összefüggést egy levezetés segítségével, de *általánosabb* keretek között igazoljuk.

Induljunk ki az (5) és (5a) termelési függvények generalizált alakjaiból:

$$A = \alpha^x \cdot m^{aE} \tag{5*}$$

és

$$B = \beta^y \cdot n^{-bE} \,, \tag{5*a}$$

ahol az α és β hatványkitevőiként szereplő x és y nemnegatív konstansok 1-hez viszonyított értékei az A és B termelésében mutatkozó hozadék *növekvő, csökkenő* vagy *állandó* jellegére utalnak, továbbá az egységes k helyett m és n paramétereket alkalmazva megengedjük a (disz)komfort intenzitásának eltérését is a két allokációs területen. Levezetésünk azt kívánja bemutatni, hogy β milyen értéke maximálja A kibocsátását, E tetszőleges szinten való rögzítése mellett. Könnyen belátható, hogy az így nyert β -hoz a (2) értelmében tartozó α —*ceteris paribus*— ugyanígy maximálja B értékét, vagyis a Pareto-hatékony trajektóriát szolgáltató erőforrás-eloszláshoz jutunk el.

Fejezzük ki E-t (5*a)-ból:

$$E = \lg(\beta^y/B)/(b \cdot \lg n) \tag{10}$$

majd helyettesítsük be (5*)-ba, érvényesítve (2) összefüggést is. A nyert formula rendezésével az

$$A = (F-\beta)^x(\beta^y/B)^{(a\cdot\ln m)/(b\cdot\ln n)} \tag{11}$$

majd

$$A = \frac{(F-\beta)^x \beta^{(ya\cdot\ln m)/(b\cdot\ln n)}}{B^{(a\cdot\ln m)/(b\cdot\ln n)}} \tag{11a}$$

alakokat kapjuk. A maximumát deriválással keressük:

$$\frac{dA}{d\beta} = \frac{(F-\beta)^x \beta^{ya\ln m/(b\ln n)-1}\frac{ya\ln m}{b\ln n} - x(F-\beta)^{x-1}\beta^{ya\ln m/(b\ln n)}}{B^{(a\ln m)/(b\ln n)}} \tag{12}$$

A derivált zérushelyénél a

$$\beta = \frac{Fay\cdot\ln m}{bx\cdot\ln n + ay\cdot\ln m} \tag{13}$$

összefüggést nyerjük, amelyből kiderül, hogy a Pareto-hatékony trajektória az A és B termelési függvények modelljeinkben érvényesített *szimmetriájánál,* azaz $a = b$ és $x = y$, valamint $m = n$ $(= k)$ feltételek esetén kötődik az erőforrás 50-50%-os allokációjához. Ekkor $\alpha = \beta = F/2$ teljesül, függetlenül a, b, x, y, továbbá m és n abszolút értékeitől. Megjegyezzük, hogy a levezetés *mutatis mutandis* A-ra „kihegyezett” változata az

$$\alpha = \frac{Fbx\cdot\ln n}{bx\cdot\ln n + ay\cdot\ln m} \tag{13a}$$

végeredményt szolgáltatja, „szimmetrikus” értelmezési lehetőségekkel. Megfigyelhető, hogy a (13) és (13a) formulák összege —mint ahogyan várható— F.

Eredményeink további érdekessége, hogy az erőforrás (és a környezeti jog) Pareto-hatékony (re)allokációjának tartományát csak a termelési függvények paraméterei (mint konstansok) befolyásolják, függetlenül az egyes javak kibocsátási szintjétől. Más megközelítésben ez azt jelenti, hogy e tartományt *egyazon* trajektória, és nem több, egymást metsző ösvény legjobb pontjai alkotják. Megállapításunk azonban csak a *második* és *harmadik* típusú (disz)-komfortra igaz, az *elsőként* bemutatott „externália” folytonossága *burkológörbe* jellegű Pareto-optimális pontsorozatot hoz létre. E jelenségek mélyebb lényegi vonásait feltárandó az *Edgeworth-doboz* logikai terében kíséreljük meg ábrázolni a Coase-doktrína elosztási problémáját.

7 A Pareto-hatékony trajektória megjelenése szerződési görbeként

Az ,,externáliákkal" kapcsolatos egyezkedések bemutatására több szerző is igénybe veszi az Edgeworth-dobozt, mint módszertani segédeszközt (pl. Coase [1988] II. fej., Varian [2001] 32. fej.).

A *9. ábrán* megjelenő doboz oldalai a termelési függvény változóira utalnak. A mi esetünkben a vízszintes oldal hosszúsága a két fél együttes rendelkezésére álló erőforrás (F) mennyiségét, a függőlegesé pedig a ,,külső" gazdasági hatás (E) elvileg maximális kiterjedését (,,dózisainak" számát) vagy/és a környezet feletti jogból ,,birtokolható nagyságrendet" jelzi. A függőleges oldal skálázása annak *felezőpontjától* indul az ,,externália" Coase-szemléletű reciprocitására utalva. A pozitív (felső) tartomány A-t, a negatív (alsó) pedig B-t favorizáló jogi szabályozást képezi le, vagyis a saját origójuktól való távolodás szimbolizálja az egyes aktorok számára a környezet egyre kedvezőbb használati módját.

9. ábra. A ,,második típusú" (disz)komfort Pareto-hatékony trajektóriájának megjelenése szerződési görbeként

Az isoquantok topológiájából a vizsgált (disz)komfort típusára következtethetünk: ezúttal egyrészt az figyelhető meg, hogy ugyanazon kibocsátási szint eléréséhez a doboz A szereplő origójából szemlélt felső oldalán az F

erőforrás kisebb mennyisége szükséges (a környezet *komfortja* mellett), mint az alsó oldalon (a körülmények *diszkomfortjából* adódóan). Másrészt észrevehető, hogy bármilyen output esetén *konstans* (ábránkon *ad hoc* módon választott 1/4) *arány* érvényesül a kedvező versus kedvezőtlen helyzetben igénybevett tényezőtömeg között, ami az (5) és (5a) termelési függvényekkel kongruens jelenség.

A 8. és 9. ábrát szigorú megfeleltetés kapcsolja egymáshoz. Az RF_A görbe az Edgeworth-doboz felső, az RF_B pedig alsó oldalával azonos jelentésű. A (disz)komfort előjelváltásakor érvényes trajektóriák szerepét tehát most a két oldal szembenálló pontjait összekötő szakaszok veszik át. (Az összevetés lehetőségét a két ábrán alkalmazott jelölések tartalmi egyezőségével igyekeztünk biztosítani.) A hatékony allokációkat ezúttal a *szerződési görbe* (CC) képviseli, amely az általunk vizsgált esetben rendhagyó, *függőleges* pozíciót vesz fel. Ez a fentiekben már exponált jelenségre utal, mely szerint a két fél egyezkedésének Pareto-hatékony lezárása *egyazon* trajektória pontjaihoz köthető. A szerződési görbe ,,felezővonal" jellege áll kapcsolatban azzal, hogy a két fél termelési függvényének szimmetriájából az F tényezőtömeg 50-50%-os optimális megosztása következik.

A szerződési görbe furcsa, valamely tengellyel párhuzamos helyzete jól ismert a közgazdasági irodalomban, és a termelési függvények ún. *kvázilineáris* jellegéből ered. Ez azt jelenti, hogy az egyik termelési tényező határterméke —alkalmazott mennyiségétől függetlenül— *konstans* szám. Az (5) és (5a), vagy az általánosabb (5*) és (5*a) funkciókat vizsgálva ez az F (α és β) tényező esetében teljesül, hiszen

$$MP_\alpha = xm^{aE} \cdot \alpha^{x-1} \tag{14}$$

és

$$MP_\beta = yn^{-bE} \cdot \beta^{y-1} \ , \tag{14a}$$

míg

$$MP_E{}^A = am^{aE} \cdot \ln m \cdot \alpha^x \tag{15}$$

és

$$MP_E{}^B = bn^{-bE} \cdot \ln n \cdot \beta^y \ , \tag{15a}$$

ahol $MP_{\alpha,\beta}$ az F tényező határtermékei a két területen, míg $MP_E{}^{A,B}$ a (disz)komfort, vagy a vele kapcsolatos jog határtermékét jelenti A-nál és B-nél.

Eredményeink azonban ellentmondásban vannak azzal az összefüggéssel, mely szerint kvázilineáris függvényeknél a szerződési görbe a *konstans határtermékű változó* tengelyével párhuzamos. Paradoxonunk azonban magyarázatot nyer, ha megvizsgáljuk a *technikai helyettesítés határrátáját (MRTS)* a két tevékenységfajtánál:

$$MRTS_A = MP_\alpha / MP_E{}^A = \frac{x}{\alpha a \cdot \ln m} \tag{16}$$

és

$$MRTS_B = MP_\beta / MP_E{}^B = \frac{y}{\beta b \cdot \ln n} \tag{16a}$$

Kiderül, hogy az isoquantok meredekségét jelző határráták végső soron mégsem az $F(\alpha, \beta)$, hanem E változó értékétől függetlenek, ami már megfelelően indokolja a szerződési görbe helyzetét.

Mivel a szerződési görbe mentén a két tevékenységnél jellemző határráták egyenlőek, vagyis

$$\frac{x}{\alpha a \cdot \ln m} = \frac{y}{\beta b \cdot \ln n}\,, \tag{17}$$

a (2) összefüggést érvényesítve és β-t kifejezve ugyancsak a (13) vagy (13a) eredményhez jutunk.

A 9. ábra további összefüggések megfogalmazására ad módot a Scitovsky-paradoxon fellépésének esélyeit illetően. Ezúttal abból a megfigyelésből indulunk ki, hogy mindössze egyetlen olyan outputkombináció (a P) létezik, amely az Edgeworth-doboz felső és alsó határoló oldalán is megjelenik. (A P mellett feltüntetett, felső indexben szereplő A és B betűk arra utalnak, hogy az RF_A vagy RF_B eredmény-határ görbe pontjáról van-e szó.) Modellünk szimmetriájából adódóan az is teljesül, hogy az illető kombináció mindkét oldalon azonos mértékű tényezőfelhasználáshoz kapcsolódik.

10. ábra. A Coase-tétel relevanciájának növekedése az Edgeworth-dobozban a spill over hatás folytonossága esetén

A fontos részletek kiemelését szolgáló *10. ábrát* szemlélve először lássuk be, hogy az itt megjelölt g hosszúságú szakaszok a 7. ábra g szakaszainak felelnek meg. Majd az egyik —legyen ez a P^A— pont esetében vegyük észre, hogy a hozzátartozó Q_A^P kibocsátás g mennyiségű erőforrást igényel. Ha most feltételezzük, hogy az A szereplő szempontjából a jogi szabályozás kedvezőtlen irányú és tökéletes átfordulása következik be, akkor az ezzel kapcsolatos hatékonyságvesztés miatt ugyanezen termelési szint eléréséhez a (9) alapján értelmezett Ψ-szeres erőforrásmennyiségre van szükség. Ekkor viszont már az alsó tengely P^B pontjában tartózkodunk, ahol igaz, hogy

$$\Psi g = F - g \ , \tag{18}$$

amiből

$$g/F = 1/(\Psi + 1) \ , \tag{19}$$

valamint

$$1 - 2g/F = (\Psi - 1)/(\Psi + 1) = R \tag{8a}$$

következik. A (8) és (9) formulák révén már előre jelzett összefüggés tehát a (8a) által még pontosabban megragadható. Nevezetesen: egy *oszthatatlan* „externália" erősségének (Ψ) fokozódásával —ami $k(m, n)$, és/vagy E, esetleg a, b megnövekvő értékeinek következménye lehet— a Scitovsky-paradoxon által érintett tényezőkombinációk halmazának ($P^A - M$ és $N - P^B$ szakaszok) F-hez mért részaránya (R) az *egyhez* tart.

A (disz)komfort *oszthatóvá* válásával viszont —mint a korábbiakban láttuk— a $P^A - C$ és $D - P^B$ szakaszok pontjai felszabadulnak a paradoxon „hatásköre" alól. A 10. ábrát vizsgálva észrevehető (de algebrai úton is igazolható), hogy a Scitovsky-próbán továbbra is „megbukó" (már csak $C - M$ és $N - D$) outputkombinációk aránya emiatt éppen a korábbi érték *felére csökken.* Amint az előzőekben már említettük, ilyen helyzetben nem lehetetlen, hogy bizonyos output-kombinációkból kiindulva a környezeti jog *teljes* vagy *részleges* megszerzésére irányuló kísérletek egyaránt sikerrel kecsegtetnek, hangsúlyozva, hogy csak az utóbbiak juttatják a feleket az együttes termelési érték maximumát jelentő szerződési görbére. Amint Coase [1988] rámutat, *Samuelson* professzor sem látja garantáltnak az egyezkedés Pareto-optimális kimenetét, ő azonban a *bilaterális monopólium* sajátosságaira alapozza következtetéseit (i.m. 220–225. o.).

A kontraszt kedvéért tekintsünk meg egy olyan Edgeworth-dobozt (*11. ábra*) és a neki megfelelő trajektóriákat (*12. ábra*), amelyek az *első* típusú (disz-)komfortra lehetnek jellemzőek. Az (1) és (1a) —mindkét változó szerint lineáris— termelési függvények helyett azonban most ezek némileg módosított,

$$A = \alpha^x + E \cdot a \tag{1*}$$

valamint

$$B = \beta^y - E \cdot b \tag{1*a}$$

kvázilineáris változatait használjuk, amelyekkel —x és y értékeit alkalmasan megválasztva— már biztosítani tudjuk az isoquantok *konvexitását.* (V.ö. Varian [2001] 599–600. o.) Ez azért fontos, mert csak ebben az esetben érhető el paretoi javulás a (disz)komfort *részleges* reallokációja mellett. (Az eredmény-határ görbék *konkáv* íve a kibocsátás F szerint *csökkenő hozadékára* utal.)

11. ábra. Az „első típusú” (disz)komfort Pareto-hatékony trajektóriájának megjelenése szerződési görbeként

12. ábra. Az outputkombinációk trajektóriái az „első típusú” (disz)komfort folyamatos „előjelváltása” során

A két ábra tanulmányozása révén (amit reményeink szerint az itt érvényes betűjelölések szigorú következetessége tesz sikeressé) meggyőződhetünk róla, hogy ezúttal *egymást metsző* trajektóriák lépnek fel, amelyek szaggatott vonallal megrajzolt *burkolója* „szellemképszerűen” helyezkedik el az RF_A eredmény-határ görbe mellett. A szerződési görbe (CC) leképezését jelentő, hatékony pontok elhelyezkedése egyúttal arra világít rá, hogy a (disz)komfort oszthatósága —*konvex* technológiai halmazzal párosulva— az eredetileg bármely szereplőt favorizáló környezeti jog reallokálásával paretoi javulásra ad alkalmat.

8 Összefoglalás

Tanulmányunk Coase jól ismert tételének revíziójára vállalkozott. A szóban forgó doktrína szerint, ha a környezet használatával kapcsolatos jogok egyértelműen deklaráltak, valamint a gazdasági interakcióban résztvevő felek egyezkedésének költségei elenyészőek, akkor az erőforrások (Pareto-)hatékony allokációja hatósági beavatkozás nélkül is megvalósul.

Gondolatainkat egy olyan, kétszereplős modell keretei között mutattuk be, amely lehetővé tette a Kaldor-Hicks, illetve Scitovsky-féle próbák alkalmazását. Feltételeztük, hogy aktoraink, A és B egy meghatározott erőforrástömegen (F) osztozva állíthatják elő az általuk hasznosítható/használt —hasonló betűkkel jelölt— javakat. Az erőforrás összes lehetséges elosztásához tartozó kibocsátási kombinációik halmazát egy *eredmény-határ* görbe pontjaival ábrázoltuk, amelynek jellemzői az „externália” jellegére, irányára illetve erősségére utaltak. Vizsgálatunk előbb a különböző típusú környezeti hatások A versus B számára kedvező-kedvezőtlen jellegének „átfordulására”, „előjelváltozására”, valamint leképezésére koncentrált, majd arra kerestünk választ, hogy az egyes esetekben milyenek a Coase-tétel teljesülésének esélyei.

Bizonyítottuk, hogy ha a gazdálkodás környezeti komfortjában bekövetkező változások az eredetivel *metszéspontot* alkotó új eredmény-határ görbét generálnak, akkor Coase tétele elbukhat a Scitovsky által javasolt jóléti teszten. Láthattuk, hogy az „externália” társadalmilag tolerálható mértéke, illetve a vele kapcsolatos terhek Pareto-hatékony megosztása ez esetben még elméletileg sem meghatározható.

Modellünk legfontosabb elméleti hozamai a következők:

- Az eredmény-határ görbék rendszerének bevezetésével a környezeti hatások típusainak újszerű, a Coase-tétel relevanciája szempontjából fontos osztályozási lehetőségét teremtettük meg.
- Igazoltuk, hogy egy bizonyos fajtájú termelési (disz)komfort erősebb megnyilvánulásai mellett a „gazdaságilag optimális” erőforrás-allokáció (és környezetszennyezés) kitapogatása lehetetlenné válhat.
- Megkülönböztetve az *osztható* és *nem osztható* externáliák fogalmát, rámutattunk arra, hogy a Coase-elv plauzibilitását a „külső hatás” mértékének folytonossága növeli, míg oszthatatlansága csökkenti.

- Kutatásaink rávilágítottak, hogy az erőforrás elosztásának *szélsőséges* (és az ,,externália" oszthatósága esetén az 50-50%-oshoz közeli) arányai mellett *javulnak*, míg a megmaradóak mellett romlanak az allokáció Pareto-optimális megvalósításának esélyei.

Dolgozatunkban nem foglalkoztunk a *spill over* hatások Pigou- és Coase-féle felfogásának (illetve ezek konzekvenciáinak) közös vonatkoztatási rendszerben való elhelyezésével valamint összevetésével. E hiányosság beismerésével azonban további vizsgálódásaink fő motívumát jelöltük meg.

Irodalom

1. Bator, F. M. (1958): The Anatomy of Market Failure. *The Quarterly Journal of Economics*, 8.
2. Blaug, M. (2001): No history of ideas, please, we are economists. *Journal of Economic Perspectives.* vol. 15, pp. 145–164. (Magyarul in: *Tantörténet és közgazdaságtudomány.* Szerk. Bekker Zsuzsa, Aula, 2003. Budapest, 233–256. o.)
3. Coase, R. H. (1959): The Federal Communications Commission. *The Journal of Law and Economics*, 2. pp. 1–40.
4. Coase, R. H. (1960): The Problem of Social Cost. *The Journal of Law and Economics*, 3. (Magyarul in: *A vállalat, a piac és a jog.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004, 137–214. o.)
5. Coase, R. H. (1988): Notes on the Problem of Social Cost. In: *The Firm, the Market, and the Law.* University of Chicago Press, Chicago (Magyarul in: *A vállalat, a piac és a jog.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004, 215–254. o.)
6. Cornes, R. – Sandler, T. (1996): *The Theory of Externalities, Public Goods and Club Goods.* Cambridge University Press, Cambridge
7. Cullis, J. – Jones, Ph. (2003): *Közpénzügyek és közösségi döntések.* Aula, Budapest
8. Hicks, J. R. (1940): The Valuation of Social Income, *Economica*, 7, 195, pp. 105–124.
9. Hirschleifer, J. (1987): The economic approach to conflict. In: *Economic imperialismus.* Ed. by Radniczky, G. – Bernholz, P. Paragon House Publishers, New York.
10. Kaldor, N. (1939): Welfare Propositions in Economics and Interpersonal Comparisons of Utility, *Economic Journal*, 49, 195, pp. 549–552.
11. Kerekes, S. – Szlávik, J. (1999): *A környezeti menedzsment közgazdasági eszközei.* Budapest, KJK
12. Mishan, E. J. (1981): *Introduction to Normative Economics.* Oxford University Press, Oxford
13. Pigou, A. C. (1912): *Wealth and Welfare.* Macmillan, London
14. Pigou, A. C. (1932): *The Economics of Welfare.* 4th ed. Macmillan, London
15. Rousseau, J. J. (1775): *Értekezések és filozófiai levelek.* (Magyarul: Gondolat Kiadó, Budapest, 1978)
16. Schumann, J. (1998): *A mikroökonómiai elmélet alapvonásai.* JATEPress, Szeged

17. Scitovsky, T. (1941): A Note on Welfare Propositions in Economics, *Rewiew of Economic Studies*, 9, pp. 77-88.
18. Stigler, G. (1966): *The Theory of Price.* New York, MacMillan, 3rd ed.
19. Stigler, G. (1975): The Economists' Traditional Theory of the Economic Functions of the State. In: *The Citizen and the State.* Essays on Regulation, The University of Chicago Press, Chicago – London, pp. 103–113. (Magyarul in: *Piac és állami szabályozás*, KJK, 1989, Budapest, 313–324. o.)
20. Varian, H. R. (2001): *Mikroökonómia középfokon. Egy modern megközelítés.* KJK – Kerszöv Kiadó, Budapest
21. Zalai E. (2000): *Matematikai közgazdaságtan.* KJK – Kerszöv Kiadó, Budapest

COASE'S THEOREM VERSUS SCITOVSKY'S PARADOX

In this paper we examine the relevancy of Coase's well known theorem. According to this, in case the rights of using the environment are clearly declared and the costs of negotiation between the interacting parties are insignificant, the Pareto efficient allocation of the resources will be realized without the intervention of the authorities. Our aim is to interpret this theory in the logical space of the Kaldor-Hicks and the Scitovsky tests, and to highlight the restraints of the theory in this framework. We present our views in the framework of an abstract model with two actors. We presume that our actors A and B can manufacture their goods (marked with the same letters) by sharing a fixed amount of resource (F). We represent the output combinations belonging to all possible distribution of the resource with the points of the FIix result-frontier curve. The characteristics of this curve show the nature, direction and intensity of the external effect. First we examine the ,,turn" and ,,reverse of signs" of the favourable-unfavourable (A versus B) situation of the different types of environmental effects, consequently we try to find what the chances of the fulfillment of Coase's theorem in certain cases are. We try to prove, if the changes of the comfort of the economic environment generate such a new result-frontier curve which has an intersection with the original, this will cause the failure of Coase's theorem on Scitovsky's welfare test. This would mean that in this case there is no —even theoretical— possibility to determine the tolerable measure of the externality for the society and the division of the burdens caused by it. The main results of our model are the following:

- The system of the result-frontier curves allows a new kind of classification of the effects of environment.
- By distinguishing the notion of divisible and indivisible externality we show that the continuity of the intensity of the external effect increases, while its indivisibility decreases the plausibility of Coase?s theorem.
- We prove that in case of growing intensity of the externality, the determination of the "economically optimal" pollution becomes impossible.
- We also deduce that an extreme ratio of division of the resource also reduces the possibility of a Pareto optimal allocation.