MARTOS BÉLA
(1920-2007)

Martos Béla 1920-ban született. 1938-ban érettségizett. Zsidó származása miatt nem mehetett egyetemre, de szerencsére azért villamosszerelő-inasnak még felvették. Ez mentette meg attól, hogy 1942-ben gimnáziumi barátaihoz hasonlóan elpusztuljon a Don-kanyarban. Munkaszolgálatosként szabadult fel 1944 végén Miskolc környékén, az utolsó napokat egy derék munkás krumpliskamrájában vészelve át. A háborúban édesapja és testvére elpusztult, édesanyja azonban életben maradt.

1945-ben Szegedre ment matematikát tanulni — olyan kiválóságok társaságában, mint Rényi Alfréd, olyan tanároktól, mint Kalmár László. Hogy ne haljon éhen, többek között cigarettapapírral feketekereskedik. Egyetemi tanulmányai alatt belépett a Magyar Kommunista Pártba, és hamarosan államhivatalnokká válik. Közben megszerzi a matematikus diplomát. Közszolgálatáról utólag nem nagy lelkesedéssel beszélt, pedig megjárta a KSH-t, a KGM-et (Kohó- és Gépipari Minisztérium) és talán az OT-t (Országos Tervhivatal) is, de ahogyan ismertem, biztos derék munkát végzett ott is. Az 1970-es években a FAO-ban is dolgozott Rómában, és jól hasznosította képességeit.

1962-ben körül döntött úgy, hogy mégis kutató lesz. Hiába hívta Rényi az általa vezetett, azóta róla elnevezett Matematikai Intézetbe, nem fogadta el, úri luxusnak tartva a matematikai kutatást. Inkább a gyakorlatiasabb közgazdaságtudományt választotta, és belépett az MTA Közgazdaságtudományi Intézetébe. Ott is maradt 1990-ig, amikor nyugdíjba vonult. De a legutolsó évekig szorgalmasan bejárt az intézetbe, és részt vett a tudományos életben.

Tudományos munkásságát három nagy részre lehet osztani:

1. matematikai programozás,
2. közgazdasági szabályozáselmélet,
3. nyugdíjmodellezés.

1. A matematikai programozás feladata: célfüggvényt maximalizálni bizonyos feltételek mellett. Történetileg az első sikeresen megoldott feladat a lineáris programozás volt, ahol lineáris célfüggvényt maximalizáltak lineáris korlátok mellett. A siker kulcsa egy roppant hatékony algoritmus volt: az ún. szimplex módszer. Martos egyik legnagyobb hatású felfedezése az volt, hogy meghatározta a nemlineáris programozási feladatoknak egy széles körét, amelyre az eredetileg a lineáris programozásra kidolgozott szimplex módszer jól működik. Nemlineáris programozási kutatásait egy nagysikerű monográfiában foglalta össze 1974-ben, amelyre több mint száz Google-hivatkozást találtam.

2. A közgazdasági szabályozáselmélet a műszaki tudományokból kölcsönvett módszerrel vizsgálja, hogy miképp lehet egy gazdasági szabályozási rendszert működtetni, stabilizálni vagy optimalizálni. Martos Béla Kornai Jánossal együtt 1970-ben kezdett e témakörrel foglalkozni, és a vegetatív szabályozásról írt cikkük 1973-ban az Econometricában jelent meg. Az 1970-1980-as években Béla is ezen a területen dolgozott, főleg a különféle szabályozások ekvivalenciája érdekelte. 1980-ban Jánossal együtt egy tanulmánykötetet szerkesztettek: Szabályozás árjelzések nélkül, amely magyarul és angolul is megjelent. Bélának annyira megtetszett a témakör, hogy 1990-ben a szabályozáselméletről egy második monográfiát írt, ezúttal egyedül.

3. A nyugdíjmodellezés volt Béla utolsó kutatási területe. Sokunkkal együtt őt is Bod Péter és Augusztinovics Mária vonta be e gyorsan népszerűvé és fontossá váló kutatási területbe, 1990 körül. Béla főleg a nyugdíjak egyenlőtlenségével foglalkozott, és szellemes javaslatot tett a nyugdíjak keresetfüggőségének ésszerűsítésére.

Tudományszervezési tevékenységének súlypontjaként Béla 1968 és 1990 között az első magyar matematikai-közgazdaságtani folyóirat, a Szigma főszerkesztője volt. Ennek jelentőségét csak az értheti meg, aki kézbe veszi az akkori Közgazdasági Szemlét, és megállapítja, mennyire ritka volt benne a kvantitatív elemzés. Béla igényes szerkesztő volt, megkövetelte a világos szerkezetet és a világos kifejtést. Üldözte az angol szavakat, és csak a latin eredetű idegen szavakat tűrte meg. (Velem is harcolt, hogy fordítsam le a team-et csapatra, de sajnos nem voltam rá hajlandó.)

Nem lehet befejezni egy emlékezést Béláról, ha nem szólunk róla, mint emberről. Vidám és kiegyensúlyozott volt, nem nagyon panaszkodott. Sikeres kutatása mellett sok időt töltött családjával: első feleségével, Verával; lányával, Julival; vejével, Bécivel, és unokáival, Péterrel és Lillával. Vera halála után újból megnősült, és fiatalabb barátai, jómagam is inkább már Máriát ismertük meg. Fiatalabb korában természetjáró volt, megmászta a 2500 m magas tátrai csúcsokat. Élete végéig szenvedélyes bridzselő volt, aki az intézetben is bridzstanfolyamot tartott az 1970-es években. Sokat olvasott, és szeretett beszélgetni (nem szónokolni!) Idősebb éveiben megtanult főzni, és vacsoravendégeként tanúsíthatom, hogy ebben is mester volt.

Ha volt hibája, akkor az túlzott szerénysége volt. Soha nem tolta magát előtérbe, soha nem dicsekedett, pedig tisztában volt képességeivel. Azt gondolhatta, hogy amit így elért, az is elég. Igaza volt.

Béke veled, Béla!

Simonovits András

ARROW-TÍPUSÚ LEHETETLENSÉGI TÉTELEK[1]

MALA JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

1 Történelmi bevezetés

A szavazás elmélete a francia felvilágosodás korába nyúlik vissza, amikor a társadalmi változások következtében egy igazságos szavazási rendszer megalkotása szükségessé vált. Az első észrevételek, eredmények két francia akadémikus, Condorcet [11] és Borda [10] nevéhez fűződnek, de Laplace [27] is közölt eredményeket a területen. Az első észrevétel az volt, hogy ha legalább három jelöltre történik szavazás, akkor a plurális szavazási eljárás (tehát amelyben a szavazat nem más, mint egy jelölt megadása, és a legtöbb szavazatot kapott jelölt a győztes) könnyen siralmas eredményre vezethet, mert megtörténhet, hogy a szavazók olyan jelöltet választanak meg, akit jókora többség elutasít az összes többi jelölttel szemben. Ezért Condorcet egy olyan jelölt megválasztását szorgalmazta (már amennyiben ilyen létezik), akit a többi jelölt mindegyikével szemben valamilyen többség támogat. Ilyen ú.n. Condorcet-győztes létezése általában valóban nem garantálható, amint azt az alábbi példa mutatja. Tegyük fel, hogy három jelöltünk van (legyenek ezek a, b és c), továbbá három szavazónk (jelöljük őket $1, 2, 3$-mal) és a szavazóink az alábbi preferenciákkal rendelkeznek a jelöltekre vonatkozóan:

$$1:\ a\ b\ c;\quad 2:\ b\ c\ a;\quad 3:\ c\ a\ b\,, \tag{1}$$

tehát az 1-es szavazó leginkább az a-t, utána a b-t, legkevésbé a c-t preferálja, s.í.t.

Hogy a fenti problémát megkerülje, Borda egy új szavazási rendszert javasolt, amely ma Borda-pontozás néven ismeretes (ő maga érdemi szavazásnak nevezte).[2] A Borda-pontozás során a leadott szavazat nem más, mint egy listája az n jelöltnek, kezdve az illető szavazó által legjobbnak tartott jelölttől az általa legkevésbé támogatottig. A szavazók legjobb jelöltjei $n-1$ pontot kapnak, a második legjobbak $n-2$-t, s.í.t., tehát a legutolsók nem kapnak pontot. Az a jelölt a győztes, aki a legtöbb pontot szerzi meg az összesítésnél. Megjegyezzük, hogy a Borda-pontozás nem Condorcet típusú szavazási eljárás, azaz a Borda-győztes különbözhet a Condorcet-győztestől (sőt, az is megeshet, hogy a Condorcet-győztest semmilyen pontozáson alapuló eljárás sem hozza ki győztesként).

---

[1]Beérkezett: 2007. május 30. E-mail: `jozsef.mala@math.bke.hu`. A szerző köszönettel tartozik az OTKÁnak a nyújtott támogatásért. A szerző megköszöni az egyik bíráló lelkiismeretes munkáját, megjegyzéseit, javaslatait, melyek javítottak a cikk minőségén.

[2]Borda eljárását a francia akadémia alkalmazta is a jelöltek kiválasztására, mígnem egy frissen megválasztott tag javasolta az eltörlését. Az új tag Bonaparte Napóleon volt.

A francia forradalom leverése után hosszú időre megcsappant az érdeklődés a szavazási rendszerek vizsgálata iránt, talán csak Charles Dodgson [15, 16, 17] (ismertebb nevén Lewis Carroll) vizsgálódásait érdemes kiemelni, aki egy olyan rendszert tartott volna ideálisnak, ahol a szavazók stratégiai szavazással (azaz megfelelő őszintétlen szavazat leadásával) nem juthatnak előnyhöz. Érdemes megemlíteni, hogy a Borda pontozás korántsem mentes ettől a lehetőségtől.

Az áttörés Kenneth Arrow [3] munkásságával kezdődött az 1950-es évek elején, aki lényegében megmutatta, hogy olyan szavazási rendszer, amely kiküszöböli a fent említett két fogyatékosságot, tehát az (1)-ben bemutatott ciklikus jelenséget valamint a stratégiai szavazás lehetőségét (azaz őszinteségre bírja a szavazót), nem létezik, jobban mondva, csak gyakorlatban használhatatlan rendszerek jöhetnek szóba. Az Arrow-tétel óriási hatással volt az ezután meginduló kutatásokra, ez a terület ma is intenzíven fejlődik.

Jelen dolgozat szándéka —a kiterjedt szakirodalom miatt— csak az lehet, hogy ízelítőt adjon az Arrow-féle problémakörből. A válogatás ezért jórészt szubjektív, de igyekeztünk olyan kutatási irányokat is bemutatni, melyek jövőbeli alkalmazásokkal kecsegtetnek. A dolgozat felépítése az alábbi: Az első szakasz a többségi szavazásra vonatkozó néhány olyan eredményt ismertet, melyeknek hasznát vesszük az Arrow problémakör illusztrálásánál. A második szakaszban az Arrow tétel Wilson-féle [40] általánosítását igazoljuk, a harmadik szakaszban Gibbard [21], Blair és Pollak [8] valamint Banks [4] tételeit ismertetjük, mint próbálkozásokat az Arrow tétel feloldására. A negyedik szakasz az Arrow tételt tárgyalja az optimum függvényes modellben, majd az ötödik szakasz az útfüggetlen optimum függvények elméletét ismerteti, mint az utóbbi években fejlődésnek indult ígéretes területet (lásd [6, 12, 24, 26, 33, 36]).

2 Jelölések, alapvető fogalmak, egycsúcsú preferenciák, többségi szavazás, napirendi szavazás

Ha csak mást nem mondunk, végig feltesszük, hogy az alternatívák A halmaza és a szavazók V halmaza véges és legalább két elemű, bár a tételek egy része végtelen A esetére is igaz. Egy X véges halmaz elemszámát jelölje $\#X$. Ha csak mást nem mondunk, V-t azonosítjuk az $\{1, \ldots, m\}$ halmazzal. Ha R egy (bináris) reláció az A-n, azaz $R \subset A \times A$, akkor xRy esetén időként —a gráfelméleti szóhasználattal élve— azt mondjuk, hogy xy egy (irányított) éle az R-nek.

2.1. Definíció. *Legyen a T egy reláció az A-n. Azt mondjuk, hogy a T egy bajnokság, ha T antiszimmetrikus (xTy és yTx esetén $x = y$) és teljes (xTy vagy yTx).*

A bajnokságokat, mint valódi bajnokságok eredményeit interpretálhatjuk, melyekben bármely két résztvevő játszott egymással, és $x \neq y$ esetén xTy

azt jelenti, hogy x legyőzte y-t.

2.2. Definíció. *Egy tranzitív (xRy és yRz esetén xRz) és teljes relációt gyenge rendezésnek, egy antiszimmetrikus gyenge rendezést pedig lineáris rendezésnek nevezünk. Jelölje $\mathcal{WL}(A)$ ill. $\mathcal{L}(A)$ a gyenge ill. lineáris rendezések halmazát az A-n.*

2.3. Definíció. *Az R reláció szigorú részén azt az $R^{\succ}$ relációt értjük, melyre minden $x, y \in A$ esetén $xR^{\succ}y \Leftrightarrow [xRy$ és $\neg yRx]$, az R közömbös részén pedig azt az $R^{\sim}$ relációt értjük, melyre minden $x, y \in A$ esetén $xR^{\sim}y \Leftrightarrow [xRy$ és $yRx]$.*

Minden R reláció tehát egy $R^{\succ}$ szigorú részre (amely aszimmetrikus, tehát $xR^{\succ}y$ esetén $\neg yR^{\succ}x$) és egy $R^{\sim}$ közömbös részre (amely szimmetrikus, tehát $xR^{\sim}y$ esetén $yR^{\sim}x$) esik szét.

2.4. Definíció. *A $\mathcal{WL}(A)^m$-beli $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$ rendezett m-est profilnak nevezzük. Ha $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(A)^m$, akkor szigorú profilról beszélünk.*

Az R_i komponenst úgy interpretáljuk, mint az $i \in V$ szavazó preferenciarelációját, amely tehát a szavazó alternatívapárokra vonatkozó preferenciáiból áll össze gyenge (vagy speciális esetben lineáris) rendezéssé. Az, hogy az R_i egy gyenge rendezése az A-nak úgy értelmezhető, hogy szavazónk rangsorolni képes az alternatívákat (gyenge rendezésnél a közömbösség megengedett, lineáris rendezés esetén azonban nem).

2.5. Definíció. *Ha az R egy reláció az A-n, $\emptyset \neq B \subset A$, akkor az R-nek a B-re való megszorításán a $(B \times B) \cap R$ relációt értjük (a B-n), és azt $R|_B$-vel jelöljük. Ha $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$ egy profil, akkor legyen $\mathbf{R}|_B = (R_1|_B, \dots, R_m|_B)$.*

Az $R|_B$ reláció tehát a B-ben futó élek (és csak azok) megtartásával keletkezik az R-ből.

2.6. Definíció. *Ha $(R_1, \dots, R_m)$ egy szigorú profil, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, akkor az $xMy \Leftrightarrow \#\{i \in V \mid xR_iy\} \geq \alpha m$ relációt α-többségi relációnak nevezzük. Az $\alpha = 1/2$ esetben inkább azt mondjuk, hogy az M az egyszerű többségi reláció.*

Az alábbi tétel azt mondja, hogy egyszerű többségi relációként ($\alpha = 1/2$) minden bajnokságot megkaphatunk, az $\alpha > 1/2$ esetben azonban bizonyos értelemben éppen fordított a helyzet.

2.7. Állítás (McGarvey [32], Mala [29]). *Az alábbi állítások igazak:*

i) tetszőleges bajnoksághoz található olyan szigorú profil, melynek egyszerű többségi relációja éppen ez a bajnokság;

ii) minden $\alpha > 1/2$-hez található olyan bajnokság, mely nem az α-többségi relációja semmilyen szigorú profilnak sem.

Bizonyítás. i). Legyen T egy tetszőleges bajnokság az $A = \{a_1, \dots, a_n\}$-n és legyen $1 \leq i \leq n$. Ha az x_s-ek azok az alternatívák, amelyeket az a_i

legyőzött a T-ben ($s = 1, \ldots, k$), az y_t-k pedig azok, amelyek legyőzték az a_i-t ($t = 1, \ldots, n-k-1$), akkor tekintsük az alábbi R_{2i-1} és R_{2i} lineáris rendezéseket:

$$R_{2i-1}: \ a_i x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{n-k-1}; \quad R_{2i}: \ y_{n-k-1} \ldots y_1 a_i x_k \ldots x_1 .$$

Ekkor az $(R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}, R_{2n})$ profil többségi relációja éppen T. Valóban, ha $aTb, a \neq b$, akkor $a = a_i$ valamely $i \in \{1, \ldots, n\}$-nel, továbbá $b = x_s$ valamely $s \in \{1, \ldots, k\}$-val. Ekkor $aR_{2i-1}b, aR_{2i}b$, továbbá az a és a b ellentétes sorrendben szerepelnek az összes többi R_{2j-1}, R_{2j} lineáris rendezéspárban ($j \neq i$), tehát aMb, de nem bMa.

ii). Először is megjegyezzük, hogy tetszőleges T bajnokságra és $(R_1, \ldots, R_m)$ szigorú profilra érvényes a következő

$$\sum_{aTb} \#\{i \mid aR_ib\} = \sum_{i=1}^{m} \#(R_i \cap T) \tag{2}$$

egyenlőség, hiszen mindkét oldalon azon T-beli élek elemszáma áll (multiplicitással), amelyek az R_i-knek is élei ($i = 1, \ldots, m$).

Legyen $\alpha > 1/2$ tetszőleges. Erdős és Moon [20] egy tétele szerint ha az A halmaz n elemszáma elég nagy, akkor található olyan T bajnokság az A-n, melyben minden aciklikus élhalmaz elemszáma kisebb, mint $\alpha\binom{n}{2}$. Ha T az α-többségi relációja lenne valamely $(R_1, \ldots, R_m)$ szigorú profilnak, akkor aTb esetén $\#\{i \mid aR_ib\} \geq \alpha m$ teljesülne és így összeadással adódnék, hogy

$$\sum_{aTb} \#\{i \mid aR_ib\} \geq \binom{n}{2}\alpha m . \tag{3}$$

Másrészt $1 \leq i \leq m$ esetén igaz, hogy $\#(R_i \cap T) < \alpha\binom{n}{2}$, (hiszen $R_i \cap T$ aciklikus élhalmaza R_i-nek és így T-nek is) ahonnan ismét összeadással kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \#(R_i \cap T) < m\alpha\binom{n}{2} , \tag{4}$$

A (2), (3) és (4) állítások azonban ellentmondanak egymásnak. □

2.8. Megjegyzés. A 2.7. állításbeli *ii*) állításnál valójában több is mondható, nevezetesen megmutatható, hogy adott $\alpha > 1/2$ esetén *ii*) *majdnem minden* bajnokságra teljesül, ami úgy értendő, hogy azon bajnokságok számaránya, amelyekre teljesül, tart az egyhez, amint az A elemszáma minden határon túl növekszik.

2.9. Példa. Tekintsük az alábbi szavazási eljárást. Az alternatívákat egy adott $a_1 \ldots a_n$ sorrendben ütköztetjük egymással egyszerű többségi alapon. Ez azt jelenti, hogy először a_1 és a_2 között döntenek a szavazók, majd a győztes és a_3 között, s így tovább a sor végéig. Nevezzük ezt az eljárást napirendi szavazásnak. Az elnevezés arra utal, hogy a parlamentben egy törvényjavaslat esetén először a törvényjavaslat módosításának módosítása és a módosítása között döntenek, majd a győztes alternatíva és a törvényjavaslat között, végül ennek győztese és az eredeti, hatályban álló törvény között. Mivel a 2.7. állítás miatt az egyszerű többségi reláció tartalmazhat Hamilton-kört, azaz olyan irányított kört, amely minden csúcson átmegy és csak egyféleképpen[3], ezért világos, hogy a napirendi szavazás eredménye nagymértékben függ a napirendtől, vagyis az $a_1 \dots a_n$ sorrendtől.

Létezik azonban a lineáris rendezéseknek egy nevezetes osztálya, melyről feltételezhető, hogy bizonyos körülmények között a szavazók preferenciarelációi (már amennyiben ha azok is lineáris rendezések) ide esnek. Ha ez teljesül, akkor már —mint látni fogjuk— a többségi relációban nem fordulhatnak elő körök.

Tegyük fel ugyanis, hogy az alternatívák a szavazók preferenciáitól függetlenül úgy elrendezhetők egy sorozatba, hogy ha két alternatíva a szavazó ideálisnak vélt alternatívájának ugyanazon oldalán helyezkedik el a skálán, akkor szavazó közülük mindig az ideális alternatívához közelebbit választja. Ilyenek a preferenciák például akkor, ha a pártok egy ideológiai bal-jobb skálán helyezhetők el. A formális definíció a következő:

2.10. Definíció. *Az R lineáris rendezésre azt mondjuk, hogy egycsúcsú az $a_1 \dots a_n$ alapsorrendre nézve, ha található olyan $1 \leq p \leq n$, melyre $p \leq s \leq t$ vagy $p \geq s \geq t$ esetén $a_s R a_t$. Az a_p alternatívát az R csúcsának nevezzük. Ha egy profil minden komponense egycsúcsú valamely rögzített alapsorrendre nézve, akkor a profilt egycsúcsúnak nevezzük. Ha y az alapsorrendben x és z (itt mindegy, hogy x vagy z van előbb az alapsorrendben) közé esik (a határokat is beleértve), akkor ezt $y \in [x, z]$-vel jelöljük.*

Ha R egycsúcsú és $y \in [x, z]$, akkor xRy esetén x és az R csúcsa (az alapsorrendre nézve) y-nak ugyanazon oldalán kell, hogy legyen, ezért yRz-nek teljesülnie kell, s így az R tranzitivitása miatt kapjuk, hogy igaz a következő

2.11. Lemma. *Legyen az R egy egycsúcsú lineáris rendezés. Ha az x, y, z alternatívákra $y \in [x, z]$, akkor xRy esetén xRz.*

2.12. Tétel (Black [7]). *Ha M egy egycsúcsú profil többségi relációja, akkor $xM^{\succ}y$ és $yM^{\succ}z$ esetén $xM^{\succ}z$.*

Bizonyítás. Három esetet tekintünk.

1. eset. $x \in [y, z]$. Ha $xM^{\succ}z$ nem teljesülne, azaz zMx állna fenn, akkor a 2.11. lemma miatt zMy is állna, ellentmondásban $yM^{\succ}z$-vel.

2. eset. $y \in [x, z]$. $xM^{\succ}y$ azt jelenti, hogy a szavazóknak több, mint a fele x-et preferálja az y-nal szemben. A 2.11. lemma miatt ezek a szavazók x-et z-vel szemben is preferálják, tehát $xM^{\succ}z$.

3. eset. $z \in [x, y]$. Ez az eset nem jöhet létre, ellenkező esetben ugyanis az $yM^{\succ}z$ feltétel és a 2.11. lemma miatt $yM^{\succ}x$ állna fenn, ami ellentmond $xM^{\succ}y$-nak. □

[3]Sőt, ha a szavazók preferenciarelációit egyenletes eloszlás jellemzi, akkor ez 1-hez közeli valószínűséggel bekövetkezik (Bell [5])

A fentiek alapján állíthatjuk, hogy bármely $\mathbf{R}$ egycsúcsú profilhoz tartozik Condorcet-győztes, sőt, ha $\emptyset \neq B \subset A$, akkor $\mathbf{R}|_B$-hez is, hiszen könnyen láthatóan $\mathbf{R}|_B$ maga is egycsúcsú profil.

2.13. Definíció. *Egy relációt kvázitranzitívnak nevezünk, ha a szigorú része tranzitív. Egy teljes kvázitranzitív relációt kvázilineárisnak nevezünk.*

A fenti definícióval a 2.12. tétel úgy is fogalmazható, hogy minden egycsúcsú profil egyszerű többségi relációja kvázitranzitív (vagy ami most ugyanaz: kvázilineáris).

Az egycsúcsúságot általánosabban is értelmezhetjük: ha adott egy G fa (tehát egy olyan gráf, mely nem tartalmaz kört és összefüggő, azaz bármely két csúcsa között fut út) az A-n, akkor egy lineáris rendezést egycsúcsúnak nevezünk a G-re nézve, ha minden G-beli útra nézve egycsúcsú. Ide kívánkozik, bár a későbbiekben nem lesz szükségünk rá, Demange [14] tétele:

2.14. Tétel. *Ha egy profil valamennyi komponense egycsúcsú valamely fára nézve, akkor a többségi relációhoz tartozik Condorcet-győztes.*

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben nem állítható, hogy a többségi reláció kvázitranzitív, a többségi reláció nagyon is tartalmazhat irányított köröket.

A továbbiakban röviden áttekintünk néhány, a racionalitás bizonyos fokozataival összefüggő olyan definíciót és állítást, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

2.15. Állítás. *Ha az R egy tranzitív reláció, akkor minden $x, y, z \in A$-ra*

$$i)\ xRy,\ yR^{\succ}z \Rightarrow xR^{\succ}z \qquad ii)\ xR^{\succ}y,\ yRz \Rightarrow xR^{\succ}z\ .$$

A fenti állítás egyszerű következménye, hogy minden tranzitív reláció kvázitranzitív:

2.16. Állítás. *Ha az R egy kvázilineáris reláció, akkor minden $x, y, z \in A$-ra*

$$i)\ xRy,\ yR^{\succ}z \Rightarrow xRz; \qquad ii)\ xR^{\succ}y,\ yRz \Rightarrow xRz\ .$$

2.17. Definíció. *Az R relációra azt mondjuk, hogy ciklikus, ha található olyan $k \in I\!N, a_1, \ldots, a_k \in A$ melyekre $a_i R^{\succ} a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Ha az R nem ciklikus, akkor aciklikusnak nevezzük.*

Az alábbi állítás nyilvánvaló:

2.18. Állítás. *Minden kvázitranzitív reláció aciklikus.*

2.19. Definíció. *Az R reláció maximális elemeinek halmazán az*

$$\{x \in A \mid \neg\exists y \in A : yR^{\succ}x\} = \operatorname{argmax} R$$

halmazt értjük.

Ha az R egy teljes reláció, akkor nyilván

$$\operatorname{argmax} R = \{x \in A \mid \forall y \in A : xRy\}.$$

Az aciklikus relációk fontosságát mutatja az alábbi:

2.20. Állítás. *Legyen az A véges halmaz, és legyen az R egy reláció az A-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

i) $\operatorname{argmax} R|_X \neq \emptyset$*, ha* $\emptyset \neq X \subset A$

ii) *R aciklikus.*

3 Arrow tétele

Ebben a szakaszban a nevezetes Arrow-féle lehetetlenségi tétel talán legismertebb általánosítását tárgyaljuk. Az Arrow tétel [3] arról szól, hogy ha az alternatívák száma legalább 3, akkor nem létezik olyan összjóléti függvény, mely eleget tesz néhány elemi racionalitási (pl. az összpreferencia tranzitivitása) ill. demokratikussági (pl. a Pareto-tulajdonság, diktátormentesség) kritériumnak. Az általánosítás (Wilson [40]) egyidejűleg két irányban történik: egyrészt megengedjük, hogy az értelmezési tartomány bizonyos értelemben szűk legyen, másrészt a (az egyébként nehezen kifogásolható) Pareto-feltételt elejtjük. Sajnos a Wilson-tétel sem hoz pozitívumot az elméletbe: a fenti lazább feltételek mellett is csak degenerált, gyakorlatban használhatatlan összjóléti függvények elégítik ki a kirótt feltételeket.

3.1. Definíció. *Ha $\mathcal{R}(A)$ jelöli a teljes relációk halmazát az A-n és $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$, akkor egy $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(A)$ függvényt összjóléti függvénynek nevezünk és az $F(\mathbf{R})$ függvényértékeket összpreferenciának (vagy társadalmi preferenciának) hívjuk. Ha az F értékei csak bizonyos P tulajdonságú teljes relációk lehetnek, akkor P-összjóléti függvényről beszélünk. Így például beszélhetünk tranzitív, kvázitranzitív, aciklikus stb. összjóléti függvényekről.*

A továbbiakban néhány, az elméletben standardnak tekintett példát mutatunk összjóléti függvényre.

3.2. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $T(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$xT(\mathbf{R})y \Leftrightarrow \#\{i \in V \mid xR_iy\} \geq \#\{i \in V \mid yR_ix\}\,. \tag{5}$$

A $T(\mathbf{R})$ reláció nyilván teljes, ezért a T többségi függvény egy összjóléti függvény. A Condorcet-paradoxonhoz hasonlóan könnyen látható, hogy T ciklikus, ha $|A|, |V| \geq 3, \mathcal{L}(A)^m \subset \mathcal{D}$. Ha azonban $\mathcal{D}$ az A egy valamely alapsorrendjére nézve egycsúcsú profilok halmaza, akkor T (a 2.12. tétel miatt) egy kvázitranztív összjóléti függvény, sőt, ha a $|V|$ páratlan, akkor a T tranzitív is.

3.3. Példa. A Borda pontozásból nyilván egy tranzitív összjóléti függvényt kapunk, ha az alternatívákat az elért Borda-pontszámoknak megfelelően rangsoroljuk.

3.4. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $P(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$xP(\mathbf{R})y \Leftrightarrow \exists i \in V : xR_i y \,. \tag{6}$$

A $P(\mathbf{R})$ reláció nyilván teljes, ezért a P ú.n. gyenge Pareto függvény egy összjóléti függvény. Világos, hogy $xP(\mathbf{R})^{\succ}y$ pontosan akkor teljesül, ha $xR_i^{\succ}y$ minden $i \in V$-re, s innen az R_i-k tranzitivitása alapján világos, hogy a P kvázitranzitív.

3.5. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $\bar{P}(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$x\bar{P}(\mathbf{R})y \Leftrightarrow [\exists i \in V : xR_i^{\succ}y] \quad \text{vagy} \quad [\forall i \in V : xR_i^{\sim}y] \,. \tag{7}$$

A $\bar{P}(\mathbf{R})$ reláció nyilván teljes, ezért a $\bar{P}$ ú.n. erős Pareto függvény egy összjóléti függvény. Világos, hogy $x\bar{P}(\mathbf{R})^{\succ}y$ pontosan akkor teljesül, ha xR_iy minden $i \in V$-re és $xR_i^{\succ}y$ legalább egy $i \in V$-re. Innen az R_i-k tranzitivitása és a 2.15. állítás alapján világos, hogy a $\bar{P}$ kvázitranzitív.

3.6. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $F(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$xF(\mathbf{R})y \Leftrightarrow \exists i, j \in V, i \neq j : xR_iy, xR_jy \,. \tag{8}$$

3.7. Megjegyzés. A 3.6. példa F (ú.n. vétómentes) összjóléti függvénye aciklikus, ha $m > n$, azaz, ha $\#V > \#A$. Ha ugyanis találnánk olyan páronként különböző $a_1, \ldots, a_k \in A$ alternatívákat, melyekre $s = 1, \ldots, k$ esetén $a_sF(\mathbf{R})^{\succ}a_{s+1}$ (az $a_{k+1} = a_1$ konvencióval), akkor mivel minden s-hez legfeljebb egy olyan $i \in V$ szavazó található, akire $a_{s+1}R_ia_s$, ezért $m > n \geq k$ miatt található olyan $i \in V$, aki semelyik s-hez sem tartozik, azaz akire $a_sR_i^{\succ}a_{s+1}$ minden $s = 1, \ldots, k$-ra. Ez azonban lehetetlen, hiszen az R_i aciklikus.

3.8. Defiíció. *Azt mondjuk, hogy az F összjóléti függvény teljesíti a párok függetlensége feltételt (*$\mathbf{PF}$*-et), ha minden $x, y \in A$-ra és tetszőleges $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profilokra teljesül, hogy $\mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}}$ esetén $F(\mathbf{R})|_{\{x,y\}} = F(\mathbf{S})|_{\{x,y\}}$.*

A Borda pontozást kivéve a fenti példák mindegyike teljesíti $\mathbf{PF}$-et, amint az a megfelelő definíciókból azonnal következik. A Borda pontozás esetében tekintsük az alábbi két profilt:

$$\mathbf{R} : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline a & c \\ c & b \\ b & a \end{array} \qquad \qquad \mathbf{R}' : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline a & c \\ b & b \\ c & a \end{array}$$

Ha B a Borda-féle összjóléti függvény, akkor $aB(\mathbf{R})^{\succ}b$ és $aB(\mathbf{R}')^{\sim}b$, jóllehet $\mathbf{R}|_{\{a,b\}} = \mathbf{R}'|_{\{a,b\}}$.

A párok függetlensége feltétel esetén nem fordulhat elő az a furcsa eset, hogy két alternatíva közötti társadalmi preferenciát befolyásolják más alternatívapárokra vonatkozó preferenciák, továbbá, ha **PF** nem teljesül, előfordulhat, hogy stratégiai meggondolások eredményeként a szavazók akaratával szembenálló eredmények születnek. Riasztó példaként tekintsük a Borda féle pontozásos rendszerben a következő 15 szavazós szituációt:

1	7	7
a	c	b
b	b	c
c	a	a

ahol a profil fejlécében szereplő számok jelzik, hogy az alattuk lévő (őszinte) preferenciarendezés hány szavazóhoz tartozik. A Borda pontszámok a következők: $a:2$, $b:22$, $c:21$. A c támogatói azonban csökkenthetik a rivális b alternatíva pontszámát, ha azt a legutolsó helyre rangsorolják:

1	7	7
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Ezt felismervén, b támogatói is érdekeiknek megfelelően szavaznak:

1	7	7
a	c	b
b	a	a
c	b	c

Így tehát az esélytelen a nevető harmadikként győztese lett a szavazásnak.

PF ellen szól viszont az alábbi érvelés:

7	6	5
a	c	b
b	a	c
c	b	a

A fenti szavazási szituációban az általánosság nem túl nagy megszorítása mellett feltehetjük, hogy a a győztes. Tegyük most fel, hogy b kiesik a versenyből (pl., mint jelölt visszalép). Az új profil:

7	6	5
a	c	c
c	a	a

ahol viszont nem az a, hanem nyilvánvalóan a c a győztes.

Ma is vita tárgya, hogy **PF**-re szükség van-e (lásd pl. [30, 31, 37, 38]).

3.9. Definíció. *Ha* $\mathbf{R} \in \mathcal{WL}(A)^m$, *akkor* $\mathbf{R}_K^\succ$ *jelentse azt, hogy* $x\mathbf{R}_K^\succ y \Leftrightarrow xR_i^\succ y, i \in K$.

3.10. Definíció. *Legyen az F egy összjóléti függvény és legyen $x, y \in A, x \neq y$. Egy $K \subset V$ koalíciót (x,y)-erősnek (inverz-(x,y) erősnek) nevezünk, ha tetszőleges $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil esetén, melyre $x\mathbf{R}_K^\succ y$, teljesül igaz, hogy $xF(\mathbf{R})^\succ y$ ($yF(\mathbf{R})^\succ x$). Ha egy koalíció minden $x, y \in A, x \neq y$ esetén erős (inverz-erős), akkor erősnek (inverz erősnek) nevezzük.*

Ha egy koalíció (x,y) erős (inverz-(x,y) erős), akkor nyilván minden nála bővebb koalíció is (x,y) erős (inverz-(x,y) erős).

Az $\mathcal{L}(A)^m \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ esetben a többségi függvénynél egy koalíció nyilván pontosan akkor erős, ha a szavazóknak több, mint a felét tartalmazza.

3.11. Definíció. *Egy összjóléti függvényt Arrow-típusúnak nevezünk, ha tranzitív (azaz csak gyenge rendezéseket vesz fel), és teljesíti a párok függetlensége feltételt.*

3.12. Példa. Legyen $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$. Ekkor az alábbi függvények Arrow-típusúak:

1. Legyen $Q \in \mathcal{WL}(A)^m$ rögzített és legyen $F(\mathbf{R}) = Q$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re.
2. Legyen $F(\mathbf{R}) = R_1$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re.
3. $F(\mathbf{R}) = R_1^{-1}$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re.

Sajnos, ha $|A| \geq 3$ és $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$, akkor a fentieknél lényegesen ,,demokratikusabb" példát Arrow-típusú összjóléti függvényre nem lehet adni, amint azt a 3.24. tételben látni fogjuk.

3.13. Definíció. *Egy $\mathcal{D}$ értelmezési tartományra azt mondjuk, hogy (x,y,z)-teljes, ha $x, y, z \in A$ páronként különbözőek és $\mathcal{D}|_{\{x,y,z\}} = \mathcal{WL}(\{x,y,z\})^m$ vagy $\mathcal{D}|_{\{x,y,z\}} = \mathcal{L}(\{x,y,z\})^m$.*

3.14. Definíció. *Legyen $\mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$. A $\mathcal{D}$-t összefüggőnek nevezzük, ha minden $x, y, u, v \in A, x \neq y, u \neq v$ esetén található olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ sorozat az A-ban, ahol $a_1 = x, a_2 = y, a_{k-1} = u, a_k = v$, hogy a $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (a_i, a_{i+1}, a_{i+2})-teljes minden $i = 1, \ldots, k-2$-re.*

3.15. Definíció. *Legyen az F egy összjóléti függvény. Ha valamely $x, y \in A$-ra $xF(\mathbf{R})^\succ y$ teljesül minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén, akkor az F-et elfogultnak nevezzük.*

Az elfogultság nyilván egy hátrányos tulajdonság, hiszen ekkor bizonyos összpreferenciák nem valósulhatnak meg a szavazók semmilyen preferenciái esetén.

3.16. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$ és legyen a $\mathcal{D}$ összefüggő. Ha az F Arrow-típusú összjóléti függvény nem elfogult, akkor minden (x,y)-erős (inverz-(x,y)-erős) koalíció egyben erős (inverz-erős) is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az F-re teljesülnek a tétel feltételei, és tegyük fel, hogy a $K \subset V$ koalíció (x,y)-erős. Az az eset, amikor a K

koalíció (x, y) inverz erős, hasonlóan igazolható. Mivel a $\mathcal{D}$ összefüggő, ezért található olyan $a \in A \setminus \{x, y\}$ melyre igaz, hogy a $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (x, y, a)-teljes.

1. állítás. A K koalíció (x, a)-erős. Legyen ugyanis $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil, melyre $x\mathbf{R}_K^{\succ}a$. Az $\mathbf{R}$ profil számunkra érdekes részét egy egyszerű ábrán szemléltethetjük:

$$\mathbf{R}: \quad \begin{array}{cc} K & V \setminus K \\ \hline x & [xa]_{\mathbf{R}} \\ a & \end{array}$$

ahol $[xa]_{\mathbf{R}}$ a $V \setminus K$ koalíció tagjainak az (x, a) alternatívapárra vonatkozó tetszőleges preferenciáit képviseli. Mivel az F nem elfogult, ezért található egy olyan $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profil, melyre

$$yF(\mathbf{S})a \ . \tag{9}$$

Legyen most $\mathbf{T} \in \mathcal{D}$ egy olyan profil, melyre

$$\mathbf{T}|_{\{a,x\}} = \mathbf{R}|_{\{a,x\}} \tag{10}$$

és

$$\mathbf{T}|_{\{y,a\}} = \mathbf{S}|_{\{y,a\}} \ , \tag{11}$$

továbbá

$$x\mathbf{T}_K^{\succ}y \ . \tag{12}$$

Ábrán:

$$\mathbf{T}: \quad \begin{array}{cc} K & V \setminus K \\ \hline x & [xa]_{\mathbf{R}}[ya]_{\mathbf{S}} \\ [ya]_{\mathbf{S}} & \end{array}$$

ahol például $[ya]_{\mathbf{S}}$ a $V \setminus K$ oszlopában azt jelenti, hogy a $V \setminus K$-beliek $\mathbf{T}$-beli, (y, a) alternatívapárra vonatkozó preferenciái megegyeznek az $\mathbf{S}$ profilbeli (y, a) párra vonatkozó preferenciáikkal. Ilyen $\mathbf{T}$ profil nyilván létezik.

Mivel a K egy (x, y)-erős koalíció, ezért (12) miatt $xF(\mathbf{T})^{\succ}y$, továbbá (9) és (11) valamint a párok függetlensége feltétel miatt $yF(\mathbf{T})a$, s így a 2.15. állítás miatt $xF(\mathbf{T})^{\succ}a$, innen pedig (10) és a párok függetlensége feltétel alapján kapjuk, hogy $xF(\mathbf{R})^{\succ}a$. Tehát a K egy (x, a)-erős koalíció.

2. állítás. A K egy (a, y) erős koalíció. A bizonyításhoz most tekintsünk egy tetszőleges olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre $a\mathbf{R}_K^{\succ}y$. Mivel az F nem elfogult, ezért találunk olyan $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre $aF(\mathbf{S})x$. Tekintsünk egy, az alábbi ábrának megfelelő $\mathbf{T}$ profilt:

$$\mathbf{T}: \quad \begin{array}{cc} K & V \setminus K \\ \hline [ax]_{\mathbf{S}} & [ay]_{\mathbf{R}}[ax]_{\mathbf{S}} \\ y & \end{array}$$

Az 1. állításhoz hasonlóan igazolható, hogy $aF(\mathbf{R})^{\succ}y$, tehát a K koalíció (a, y) erős.

3. állítás. A K koalíció erős minden $\{x, y, a\}$-beli párra. Valóban, az 1. és a 2. állításokat alkalmazva könnyen adódik az eredmény.

Most már beláthatjuk, hogy a K koalíció (u, v)-erős minden (u, v) párra. A $\mathcal{D}$ összefüggősége miatt találhatók olyan $a_1, \ldots, a_k$ alternatívák ($k \in I\!N$), melyekre igaz, hogy a $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) teljes (ahol $a_1 = x, a_2 = y, a_{k-1} = u, a_k = v$) minden $i = 1, \ldots, k-2$ esetén. Ekkor azonban a 3. állítás miatt a K koalíció (y, a_1)-erős, innen kapjuk, hogy (a_1, a_2)-erős, végül kapjuk, hogy (u, v)-erős. Bebizonyítottuk tehát, hogy a K koalíció erős. □

3.17. Definíció. *Egy F összjóléti függvényt közömbösnek nevezünk, ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén $F(\mathbf{R}) = A \times A$.*

A közömbösség nyilván egy nemkívánatos tulajdonság, hiszen egy ilyen tulajdonságú függvény által semmilyen információ nem nyerhető egy profilból.

3.18. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, továbbá, hogy a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(A)$ egy nem közömbös és nem elfogult Arrow-típusú összjóléti függvény. Ekkor a V vagy erős, vagy inverz erős.*

Bizonyítás. Mivel az F nem közömbös, ezért található egy olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil, és x, y alternatívák, melyekre $xF(\mathbf{R})^{\succ}y$. Legyen most a egy olyan alternatíva, melyre igaz, hogy az $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (x, y, a)-teljes és tekintsünk egy olyan $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre $a\mathbf{S}^{\succ}_V x$ és $a\mathbf{S}^{\succ}_V y$ teljesül, továbbá $\mathbf{S}|_{\{x,y\}} = \mathbf{R}|_{\{x,y\}}$. Ilyen S profil nyilván létezik. Ábrán:

$$\mathbf{S} : \quad \begin{array}{c} V \\ \hline a \\ {[xy]}_{\mathbf{R}} \end{array}$$

A párok függetlensége miatt $xF(\mathbf{S})^{\succ}y$. Ha $aF(\mathbf{S})^{\succ}y$, akkor a párok függetlensége miatt a V egy (a, y) erős koalíció és így a 3.16. lemma miatt a V erős. Ha $yF(\mathbf{S})a$, akkor a 2.15. állítás és $xF(\mathbf{S})^{\succ}y$ miatt $xF(\mathbf{S})^{\succ}a$, s így a V inverz erős ismét a 3.16. lemma miatt. □

A továbbiakban néhány állítást mondunk ki a szavazók halmazán tekintett speciális halmazrendszerekre. Egyrészt ki fogjuk mutatni, hogy az (inverz) erős koalíciók rendelkeznek ezzel a specialitással, másrészt belátjuk, hogy ez a specialitás az egy elem (a diktátor) általi generálást jelenti.

3.19. Definíció. *Egy $\mathcal{X}$ halmazrendszerre azt mondjuk, hogy monoton, ha $X \in \mathcal{X}$, $X' \supset X$ esetén $X' \in \mathcal{X}$. Az ilyen halmazrendszereket felszállónak is nevezik.*

3.20. Definíció. *Egy $\mathcal{X}$ halmazrendszerre azt mondjuk, hogy zárt a véges metszetre, ha $X_1, \ldots, X_t \in \mathcal{X}$, $t \geq 2$ esetén $\bigcap_{s=1}^{t} X_s \in \mathcal{X}$.*

A 3.20. definícióban nyilván elég $t = 2$-t venni, akkor is ugyanazt a fogalmat kapjuk.

3.21. Definíció. *Egy X_0-beli $\mathcal{X}$ nemüres halmazrendszerre, melyre $\emptyset \notin \mathcal{X}$, azt mondjuk, hogy egy szűrő az X_0 felett, ha monoton, valamint zárt a véges metszetre nézve. Ha a fentieken kívül még az*

$$X \notin \mathcal{X} \quad \textit{esetén} \quad X_0 \setminus X \in \mathcal{X} \tag{13}$$

tulajdonság is teljesül, akkor ultraszűrőről beszélünk.

Ha $\emptyset \neq Y_0 \subset X_0$ és $\mathcal{X} = \{X \mid Y_0 \subset X \subset X_0\}$, akkor az $\mathcal{X}$ nyilván szűrő az X_0 felett, és pontosan akkor ultraszűrő, ha az Y_0 egyelemű. A fenti tulajdonságú $\mathcal{X}$-eket főszűrőnek, egyelemű Y_0 esetén pedig alapszűrőnek nevezzük, és azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X}$-et az Y_0 generálja. Az ultraszűrők maximális szűrők, amennyiben minden szűrő része egy ultraszűrőnek. Végtelen X_0 esetén ennek az állításnak az igazolása transzfinit eszközöket igényel, véges X_0 esetén azonban könnyen igazolható az alábbi állítás:

3.22. Állítás. *Legyen a X_0 egy véges halmaz. Ekkor*

i) minden X_0 feletti szűrő főszűrő;

ii) minden X_0 feletti ultraszűrő alapszűrő.

Bizonyítás. i). Ha az $\mathcal{X}$ szűrő egy X_0 feletti szűrő, akkor az X_0 végessége és a végesmetszet tulajdonság miatt $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{X}$. Így tehát a monotonitás miatt az $\mathcal{X}$ valóban főszűrő.

ii). Ha az $\mathcal{X}$ egy ultraszűrő az X_0-n, akkor *i)* miatt az $\mathcal{X}$ főszűrő. Belátjuk, hogy $\{x\} \in \mathcal{X}$ valamilyen $x \in X_0$-ra. Ha ez nem lenne igaz, akkor (13) miatt $X_0 \setminus \{x\} \in \mathcal{X}$ minden $x \in X_0$-ra, s így $\emptyset = \bigcap_{x \in X_0}(X_0 \setminus \{x\}) \in \mathcal{X}$, ami ellentmondás. Tehát $\mathcal{X}$ valóban alapszűrő. □

3.23. Definíció. *Egy F összjóléti függvényt diktatórikusnak (inverz diktatórikusnak) nevezünk, ha található olyan $i \in V$ melyre az $\{i\}$ koalíció erős (inverz erős). Ilyenkor az i-t diktátornak (inverz diktátornak) nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy egy összjóléti függvény esetében legfeljebb egy diktátor létezhet. Ha azonban az i egy diktátor, akkor $xR_i^{\sim}y$ még nem jelenti feltétlenül azt, hogy $xF(\mathbf{R})^{\sim}y$. Tekintsük példának következő összjóléti függvényt: $\mathbf{R} \in \mathcal{WL}(A)^m$ esetén legyen $xF(\mathbf{R})y$ pontosan akkor igaz, ha minden $i \in V$-hez, melyre $yR_i^{\succ}x$ teljesül, található olyan $j \in V, j < i$, melyre $xR_j^{\succ}y$. Az F-nél az 1 diktátor, azonban ha $xR_1^{\succ}y$, akkor az $F(\mathbf{R})|_{\{x,y\}}$ preferenciát a többi szavazó preferenciáinak hierarchikus rendje (a 2-től lefelé az m-ig) határozza meg.

3.24. Tétel (Wilson [40]). *Ha $|A| \geq 3$, akkor minden Arrow-típusú összjóléti függvényre, melynek értelmezési tartománya összefüggő, az alábbi tulajdonságok valamelyike igaz:*

i) közömbös   ii) elfogult   iii) inverz diktatórikus   iv) diktatórikus.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(A)$ összjóléti függvény teljesíti a tétel feltételeit. Tegyük fel továbbá, hogy az F nem közömbös és nem elfogult. Belátjuk, hogy ekkor vagy az erős vagy az inverz erős koalíciók ultraszűrőt alkotnak a V-n. Innen a 3.22. állítás alapján már következik tételünk állítása. Tegyük fel egyelőre, hogy a V koalíció erős, s így az erős koalíciók $\mathcal{U}$ halmaza nemüres.

Mivel a V erős, ezért $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Az erős koalícióknál bővebb koalíciók is erősek, ezért az $\mathcal{U}$ monoton.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{U}$ zárt a végesmetszet képzésre nézve. Legyen $K, L \in \mathcal{U}$, és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil, melyre $x\mathbf{R}^{\succ}_{K\cap L}y$. Legyen az a egy harmadik alternatíva és $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ egy, az alábbi ábrának megfelelő profil:

$$\mathbf{S}: \quad \begin{array}{ccc} K\cap L & K\setminus L & V\setminus K \\ \hline x & [xy]_{\mathbf{R}} & a \\ a & a & [xy]_{\mathbf{R}} \\ y & & \end{array} .$$

Ekkor $xF(\mathbf{S})^{\succ}a$, hiszen a K erős koalíció. Továbbá $aF(\mathbf{S})^{\succ}y$, hiszen az L feltevésünk szerint egy erős koalíció s így a nála bővebb $(K\cap L)\cup(V\setminus K) = L\cup(V\setminus K)$ koalíció is erős. Innen a tranzitivitás miatt $xF(\mathbf{S})^{\succ}y$, majd tekintettel a párok függetlenségére kapjuk, hogy $xF(\mathbf{R})^{\succ}y$. Beláttuk tehát, hogy a $K\cap L$ koalíció erős.

Belátjuk végül, hogy a (13) tulajdonság teljesül. Tegyük fel, hogy $K \subset V, K \notin \mathcal{U}$. Ekkor található olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil és $x, y \in A$, melyre $x\mathbf{R}^{\succ}_{K}y$ és mégis $yF(\mathbf{R})x$. Legyen az a egy harmadik alternatíva, és legyen az $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil, melyre $y\mathbf{S}^{\succ}_{V\setminus K}a$. Legyen végül $\mathbf{T} \in \mathcal{D}$ egy olyan profil, amely megfelel az alábbi ábrának:

$$\mathbf{T}: \quad \begin{array}{cc} K & V\setminus K \\ \hline x & [xy]_{\mathbf{R}} \\ [ya]_{\mathbf{S}} & a \end{array} .$$

Ekkor a párok függetlensége miatt $yF(\mathbf{T})x$, és mivel a V erős, $xF(\mathbf{T})^{\succ}a$ is teljesül, ahonnan a 2.15. állítás miatt $yF(\mathbf{T})^{\succ}a$. Innen a párok függetlensége feltétel alapján kapjuk, hogy $yF(\mathbf{S})^{\succ}a$. Mivel az $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil volt, melyre $y\mathbf{S}^{\succ}_{V\setminus K}a$, ezért bebizonyítottuk, hogy a $V\setminus K$ koalíció erős az (y, a) párra, s így a 3.16 lemma alapján kapjuk, hogy $V\setminus K \in \mathcal{U}$.

Beláttuk tehát, hogy az $\mathcal{U}$ egy ultraszűrő, s így abban az esetben, amikor a V erős, a lemma bizonyításával készen vagyunk. A 3.18. lemma miatt az egyetlen másik lehetőség az, hogy a V inverz erős. Ebben az esetben viszont a fenti bizonyítást követve kapjuk, hogy most az inverz erős koalíciók alkotnak ultraszűrőt. $\square$

3.25. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy összjóléti függvény teljesíti a Pareto-feltételt, ha a V erős.*

Egy Pareto-feltételt kielégítő összjóléti függvény tehát nem lehet elfogult. A 3.24. tétel egyszerű következménye az alábbi, Arrow-tól származó tétel:

3.26. Következmény (Arrow [3]). *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, és legyen az F egy Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül*

i) $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$;

ii) a Pareto-feltétel.

Ekkor az F diktatórikus.

Bizonyítás. Valóban, a Pareto-feltétel miatt a 3.24. tételben az i), ii) és iii) tulajdonságok nem teljesülhetnek, s így az F csak diktatórikus lehet. □

Legyen $\mathcal{D}$ az A egy adott rendezésére nézve egycsúcsú profilok halmaza. Ha $|V|$ páratlan, akkor a T többségi függvény $\mathcal{D}$-re való megszorítása nyilván teljesíti a tételbeli feltételeket, kivéve azt, hogy $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$, mégsem diktátor senki sem.

Ha $\mathcal{L}(A)^m \subsetneqq \mathcal{D} \subsetneqq \mathcal{WL}(A)^m$, akkor sem feltétlenül igaz az Arrow tétel. Legyen ugyanis $\mathcal{D} = (\mathcal{L}(A) \cup \{O\})^m$ (ahol $O = A \times A$), legyen $|A| \geq 3$, $|V| \geq 2$ és legyen az F összjóléti függvény az $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilnál az alábbiak szerint megadva:

$$F(\mathbf{R}) = \begin{cases} R_1 & \text{ha } R_i \neq O \text{ minden } i \in V\text{-re;} \\ O & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez az F összjóléti függvény könnyen ellenőrizhetően Arrow-típusú, teljesül a Pareto-feltétel is, de az F mégsem diktatórikus.

Ha az Arrow tételben az F tranzitivitását elejtjük, akkor már nem igaz a tétel. Valójában már akkor sem igaz, ha a tranzitivitást kvázitranzitivitásra enyhítjük, amint azt a Pareto függvény példája mutatja (Lásd a 3.4. példát).

4 Oligarchiák, vétó és kollégium

Az Arrow (és a Wilson) tétel egy kifogásolható pontja az összpreferenciától megkövetelt tranzitivitás, amelyet úgy interpretálhatunk, mint társadalmi szintű racionalitást. Egyrészt eleve kérdés, hogy helyes-e az egyénekre jellemző racionalitást a társadalomtól is megkövetelni, és ezáltal a társadalmat valamiféle „személyiségként" kezelni, másrészt a fenti racionalitás matematikai szempontból is túl erősnek tűnik, hiszen az $F(\mathbf{R})$ társadalmi relációnak elsősorban az a szerepe, hogy segítségével kiválasszuk az alternatívák egy adott részhalmazában a maximális elemeket. Ez pedig akkor is lehetséges, ha csak annyit követelünk meg, hogy az összpreferencia aciklikus legyen (lásd a 2.20. állítást). Mivel az aciklikus, **PF**-et kielégítő összjóléti függvények elmélete ma sem lezárt terület, érthető, hogy az első eredmények speciális aciklikus, nevezetesen kvázitranzitív összjóléti függvényekre születtek. Az egyik ilyen tétel ([21]) szerint a racionalitásnak ez a fajta enyhítése sem hoz „enyhülést", továbbra is csak gyakorlatban használhatatlan összjóléti függvények jöhetnek szóba. Az aciklikus (és **PF**-et teljesítő) összjóléti függvények esetében a kép valamivel árnyaltabb, de az általános esetben ezek használhatósága is kérdéses.

4.1. Definíció. *Egy F összjóléti függvény esetében egy K koalíciót vétóerősnek nevezünk az (x, y) pár fölött $(x, y \in A, x \neq y)$, ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil esetén abból, hogy $x\mathbf{R}_K^{\succ}y$, következik, hogy $xF(\mathbf{R})y$. Ha a K minden x, y*

pár fölött vétóerős, akkor vétóerősnek mondjuk. Az $i \in V$ szavazó vétóerős, ha az $\{i\}$ koalíció vétóerős.

A definícióból világos, hogy minden erős koalíció egyben vétóerős is.

4.2. Definíció. *Egy kvázitranzitív összjóléti függvényt mely teljesíti a párok függetlensége feltételét kvázi Arrow-típusú függvénynek nevezünk.*

4.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel. Ekkor minden (x, y)-erős koalíció egyben erős is.*

Bizonyítás. A 3.16. lemma bizonyítása most is megy, ott ugyanis az F-ről nem használtuk ki, hogy tranzitív, csupán azt, hogy kvázitranzitív. □

A 3.24. tétel bizonyítását követve és az értelemszerű kis módosításokat megtéve kapjuk, hogy igaz az alábbi két lemma:

4.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel, továbbá $\mathcal{D}$ összefüggő. Ekkor az erős koalíciók szűrőt alkotnak.*

4.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel, továbbá $\mathcal{D}$ összefüggő. Ekkor egy nem vétóerős koalíció komplementere erős.*

4.6. Definíció. *Egy F összjóléti függvényt oligarchikusnak nevezünk, ha létezik oligarchia, vagyis olyan koalíció, mely erős és minden tagja vétóerős.*

4.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel. Ekkor az F oligarchikus.*

Bizonyítás. Az erős koalíciók $\mathcal{W}$ halmaza a 4.4 lemma miatt szűrő, s a V végessége miatt ez egy K koalíció által generált főszűrő. Állítjuk, hogy K a keresett oligarchia. Valóban, ha a K-beli i szavazó nem lenne vétóerős, akkor a 4.5. lemma miatt a $V \setminus \{i\}$ koalíció erős lenne, s így a $K \cap (V \setminus \{i\}) = K \setminus \{i\}$ koalíció is erős lenne, ami lehetetlen, hiszen a $\mathcal{W}$-t a K generálja. A tételt ezzel bebizonyítottuk. □

A 4.7. tétel egyszerű következménye az alábbi tétel:

4.8. Következmény (Gibbard [21]). *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül*

i) $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$;

ii) a Pareto-feltétel.

Ekkor az F oligarchikus.

A 4.7. tétel bizonyításában szereplő K éppen a vétóerős szavazók halmaza, hiszen a K-n kívüliek nem lehetnek vétóerősek, mert a K erős. Megeshet azonban, hogy minden szavazó vétóerős, amint azt a Pareto függvény esete mutatja (lásd a 3.4. és 3.5. példákat).

Ha $\mathcal{D}$ valódi részhalmaza $\mathcal{L}(A)^m$-nek, akkor már nem feltétlenül igaz a 4.8 tétel. Legyen $\mathcal{D}$ az A egy adott rendezésére nézve egycsúcsú profilok halmaza. Ekkor a T többségi függvény nyilván teljesíti a 4.8. tétel feltételeit, kivéve i)-t. Most nincs olyan szavazó, aki vétóerős lenne, amennyiben $m \geq 2$.

4.9. Példa. Ha a 4.7. tételben az F kvázitranzitivitását elejtjük, akkor már nem igaz a tétel. Valójában már akkor sem igaz, ha a kvázitranzitivitást aciklikusságra enyhítjük. Legyen ugyanis $\#V > \#A, \mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$ és legyen F a 3.6. példa vétómentes függvénye. Az F ekkor a 3.7. megjegyzés miatt aciklikus, továbbá a kvázitranzitivitást kivéve teljesíti a 4.7. tétel valamennyi feltételét, azonban nincs olyan szavazó, aki vétóerős lenne.

4.10. Definíció. *Legyen az R egy reláció az A-n. Ha az $a_1, \ldots, a_k \in A$ sorozat csupa különböző elemből áll, akkor $a_1 R a_2, \ldots, a_{k-1} R a_k$ esetén irányított egyszerű útról, és ha a fentieken kívül még $a_k R a_1$ is fennáll, akkor egyszerű irányított körről beszélünk. Irányított egyszerű utak egy rendszerét pont-diszjunktnak nevezzük, ha a hozzájuk tartozó csúcsok halmazai páronként diszjunktak.*

4.11. Definíció. *Azokat az aciklikus összjóléti függvényeket, melyekre teljesül a párok függetlensége feltétel, döntési függvényeknek nevezzük.*

Az elnevezést indokolja, hogy a 2.20. állítás miatt pontosan az aciklikus relációk azok a relációk, melyekre igaz, hogy az alternatívák bármely nemüres részhalmazában van maximális elemük.

4.12. Tétel. (Blair-Pollak [8]) *Legyen $\#A = n \geq 4, n > m$ és legyen adott az F döntési függvény, melyre teljesül*

i) $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$;

ii) a Pareto-feltétel.

Ekkor valaki legalább $(n-m+1)(n-1)$ pár fölött vétóerős.

Bizonyítás. A tétel állításával ellentétben, tegyük fel, hogy mindenki kevesebb, mint $(n-m+1)(n-1)$ pár fölött vétóerős.

Szükségünk lesz a következő gráfelméleti tételre, amelynek bizonyítása meghaladja e cikk kereteit, így azt mellőzzük (lásd [9]):

Tétel. *Legyen $\#A = n \geq 4, n > m$. Ha adottak a D_i $(i = 1, \ldots, m)$ irreflexív (tehát $x D_i x$ semmilyen $x \in A$-ra sem teljesül) relációk az A-n, úgy, hogy D_i legalább $(m-1)(n-1)+1$ élet tartalmaz $(i = 1, \ldots, m)$, akkor találhatók olyan $e_i \in D_i, (i = 1 \ldots, m)$ élek, hogy az $\{e_1, \ldots, e_m\}$ élrendszer pont-diszjunkt egyszerű utak egyesítése.*

Visszatérve tételünk bizonyításához, minden $i = 1, \ldots, m$ esetén definiáljuk a D_i relációt az A-n az alábbi módon:

$$aD_ib \Leftrightarrow \text{az } i \text{ nem vétóerős a } (b, a) \text{ fölött.}$$

Indirekt feltevésünk miatt a D_i-k mindegyike legalább $n(n-1)-(n-m+1)(n-1)+1=(n-1)(m-1)+1$ élet tartalmaz.

A fenti tétel miatt található olyan pont-diszjunkt egyszerű utak egyesítéseként előálló $E=\{e_i\}_{i=1}^m$ élrendszer, melyre $e_i \in D_i$, ha $i \in V$. Új élek hozzávételével egészítsük ki az E élrendszert egy $a_1,\dots,a_{m+k}$ egyszerű irányított körré. Legyen ebben a körben $e_i=(a_{i^*},a_{i^*+1}), i=1,\dots,m$. A kényelmesebb jelölésmód érdekében nevezzük át a V szavazóit úgy, hogy az i új neve i^* legyen minden $i \in V$-re, és legyen az új névhalmaz V^*. Ekkor tehát azt mondhatjuk, hogy a $i \in V^*$ szavazó nem vétóerős az (a_{i+1},a_i) párra nézve. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in V^*$-ra található olyan $\mathbf{R}^i \in \mathcal{D}$ profil, melyre $a_{i+1}(R_i^i)^{\succ}a_i$ és $a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}$.

Másrészt, ha $i \in \{1,\dots,m+k\}\setminus V^*$, akkor legyen $\mathbf{R}^i \in \mathcal{D}$ egy olyan profil, melyre $a_i(R_j^i)^{\succ}a_{i+1}$ minden $j \in V^*$-ra. Mivel az F-re teljesül a Pareto-feltétel, ezért $a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}$, ha $i \in \{1,\dots,m+k\}\setminus V^*$ (a szokásos $a_{m+k+1}=a_1$ konvencióval). Az eddigieket összevetve kapjuk, hogy minden $i=1,2,\dots,m+k$-ra igaz, hogy $a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}$. Ha találnánk olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre minden $i=1,2,\dots,m+k$-nál igaz, hogy

$$\mathbf{R}|_{\{a_i,a_{i+1}\}}=\mathbf{R}^i|_{\{a_i,a_{i+1}\}}, \quad \text{ha} \quad i=1,\dots,m+k\ ,$$

akkor készen volnánk, hiszen ekkor a párok függetlensége feltétel és

$$a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}, \quad (i=1,2,\dots,m+k)$$

miatt az $F(\mathbf{R})$ reláció ciklikus lenne, ellentétben feltételezésünkkel.

Ilyen profil azonban található, hiszen ha a $t \in V^*$ szavazót rögzítjük, akkor a $\left\{R_t^i|_{\{a_i,a_{i+1}\}}\right\}_{i=1,\dots,m+k}$ preferenciahalmaz $\mathcal{D}=\mathcal{WL}(A)^m$ ill. $\mathcal{D}=\mathcal{WL}(A)^m$ esetén egyaránt kiegészíthető az A lineáris ill. gyenge rendezésévé (ekkor mindkét esetben az $a_{m+k}R_t^ia_1$ és a $a_{t+1}R_t^ia_t$ szigorú preferenciák ellentétes irányúak az $a_1\dots a_{m+k}$ körön), s így $\mathbf{R}=(R_i)_{i\in V^*}$ megfelel, hiszen $i)$ miatt $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$. □

A 4.12. tételben a $(n-m+1)(n-1)$ korlát az $m \geq 3$ esetben a lehető legjobb. Legyen ugyanis $\mathcal{D}=\mathcal{L}(A)^m$ vagy $\mathcal{D}=\mathcal{WL}(A)^m$, és ha $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, akkor $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $a_sF(\mathbf{R})a_t \Leftrightarrow [1 \leq t \leq m-1$ és $\exists i,j \in V, i \neq j : a_sR_ia_t, a_sR_ja_t]$ vagy $[m \leq t \leq n$ és $\exists i \in V : a_sR_ia_t]$. Mivel $m \geq 3$, ezért az $F(\mathbf{R})$ teljessége nyilvánvaló. Minden szavazó az (a_s,a_t) pár fölött vétóerős, ahol $m \leq t \leq n, 1 \leq s \leq n$, azaz éppen $(n-m+1)(n-1)$ pár fölött. Az F definíciójából világos, hogy a párok függetlensége és a Pareto-feltétel is teljesül. Az aciklikusság igazolásához indirekte, tegyük fel, hogy valamely $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilra az $F(\mathbf{R})$ reláció ciklikus, legyen az $b_1,\dots,b_k$ egy olyan A-beli sorozat, melyben ismétlődés nem fordul elő és minden $t=1,\dots,k$-ra $b_tF(\mathbf{R})^{\succ}b_{t+1}$ teljesül. Ilyen sorozat nyilván található. Az F definíciója alapján csak az olyan t-kre találhatunk (és akkor is csak egy) olyan i szavazót, akire $b_{t+1}R_ib_t$, melyekre $b_{t+1}=a_s$ valamilyen $s=1,\dots,m-1$-re. Mivel m szavazónk van, ezért lesz egy olyan i szavazó, akire $b_{t+1}R_i^{\succ}b_t$ minden $t=1,\dots,k$-ra, ami ellentmondás, hiszen R_i aciklikus.

A szakasz hátralévő részében a Banks-tétellel foglalkozunk. Ez a tétel aciklikus összjóléti függvényekről szól, és azt mondja, hogy ha $\#V \geq \#A$ és a Pareto-feltétel teljesül, akkor mindig találhatunk olyan szavazót, aki nélkül nincs erős koalíció. Egy ilyen szavazó nyilván túl nagy hatalommal rendelkezik, így tehát ez is egy negatív eredmény. Az eredmény igen általános, hiszen az igazoláshoz még a párok függetlensége feltételre sincs szükség.

4.13. Definíció. *A V-beli $\mathcal{W}$ monoton halmazrendszert egyszerű játéknak nevezzük, ha $\emptyset \notin \mathcal{W}$.*

A $\mathcal{W}$-beli koalíciókat úgy interpretálhatjuk, mint —bizonyos értelemben— nyertes koalíciókat, melyek nyertes volta valamilyen előre megadott szabályból következik.

4.14. Definíció. *Egy $\mathcal{W}$ egyszerű játékot valódinak nevezünk, ha abból, hogy $K \in \mathcal{W}$, következik, hogy $V \setminus K \notin \mathcal{W}$.*

A fenti természetes követelmény azt fogalmazza meg, hogy egy nyertes koalíción kívüli egyének nem alakíthatnak nyertes koalíciót.

4.15. Definíció. *Ha $\mathcal{W}$ egy valódi egyszerű játék, és adott az A alternatívahalmaz, akkor $\mathbf{R} \in \mathcal{WL}(A)^m$ esetén legyen az $F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})$ reláció az a teljes reláció az A-n, melynek $F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ}$ szigorú része az alábbiak szerint adott:*

$$xF_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ}y \Leftrightarrow \exists K \in \mathcal{W} : x\mathbf{R}_K^{\succ}y.$$

Mivel a $\mathcal{W}$ egyszerű játék valódi, ezért a fenti $F_{\mathcal{W}}$ összjóléti függvény jóldefiniált.

4.16. Definíció. *Egy $\mathcal{W}$ egyszerű játékot vétómentesnek nevezünk, ha*

$$\bigcap \mathcal{W} = \emptyset.$$

4.17. Definíció. *Egy $\mathcal{W}$ vétómentes egyszerű játék esetén legyen*

$$\nu(\mathcal{W}) = \min\{\#\mathcal{W}' \mid \mathcal{W}' \subset \mathcal{W},\ \bigcap \mathcal{W}' = \emptyset\}\ .$$

A $\nu(\mathcal{W})$ számot a $\mathcal{W}$ Nakamura-számának nevezzük.

Egy $\mathcal{W}$ vétómentes egyszerű játék Nakamura-száma tehát az olyan nyerő koalíciók minimális száma, melyeknek nincs közös eleme. A fenti definíció fontosságát mutatja az alábbi lemma:

4.18. Lemma. *Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ páronként különböző alternatívák és $K_1, \ldots, K_k$ koalíciók. Pontosan akkor található olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(A)^m$ profil, melyre $a_i\mathbf{R}_{K_i}^{\succ}a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra, ha $\bigcap_{j=1}^k K_j = \emptyset$.*

Bizonyítás. Elégségesség. Minden $i \in V$-re legyen $B_i = \{(a_j, a_{j+1}) \mid i \in K_j\}$. Mivel most minden $i \in V$-hez található olyan $j \in \{1, \ldots, k\}$ melyre $i \notin K_j$, ezért minden $i \in V$-hez található olyan $j \in V$, melyre $(a_j, a_{j+1}) \notin B_i$.

Ezért B_i aciklikus és mivel még aszimmetrikus is, így nyilván kiterjeszthető egy R_i lineáris rendezéssé. Az $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ profil rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Szükségesség. Ha $\bigcap_{j=1}^{k} K_j \neq \emptyset$ lenne, akkor $i \in \bigcap_{j=1}^{k} K_j$ esetén $a_j R_i a_{j+1}$ teljesülne minden $j = 1, \ldots, k$-ra, ami ellentmond annak, hogy R_i aciklikus. □

4.19. Tétel (Nakamura [35]). *Ha $\mathcal{W}$ egy valódi és vétómentes egyszerű játék, akkor az $F_{\mathcal{W}}$ összjóléti függvény pontosan akkor aciklikus, ha $\#A < \nu(\mathcal{W})$.*

Bizonyítás. Szükségesség. A $\nu(\mathcal{W}) = \nu$ definíciója alapján találhatók olyan $K_1, \ldots, K_\nu \in \mathcal{W}$ koalíciók, melyek metszete üres. A tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy $|A| \geq \nu$, s így találhatunk ν páronként különböző elemet az A-ban, legyenek ezek $a_1, \ldots, a_\nu$. Ekkor a 4.18. lemma miatt létezik olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(A)^m$ profil, melyre $a_i \mathbf{R}_{K_i}^{\succ} a_{i+1}$, $i = 1, \ldots, \nu$. Így azonban $a_i F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ} a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, \nu$-re, azaz $F_{\mathcal{W}}$ nem aciklikus.

Elégségesség. Indirekte, tegyük fel, hogy az $F_{\mathcal{W}}$ nem aciklikus, tehát találhatók olyan páronként különböző $a_1, \ldots, a_k$ alternatívák, melyekre minden $i = 1, \ldots, k$-ra $a_i F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ} a_{i+1}$. Így tehát $a_i \mathbf{R}_{K_i}^{\succ} a_{i+1}$ bizonyos $K_i \in \mathcal{W}$ koalíciókra ($i = 1, \ldots, k \leq \#A$). Ekkor azonban a 4.18. miatt $\bigcap_{i=1}^{k} K_i = \emptyset$, ami alapján $k \geq \nu(\mathcal{W})$, s így $\#A \geq \nu(\mathcal{G})$, ellentmondás. □

4.20. Definíció. *Egy összjóléti függvényt kollégiuminak nevezünk, ha valamely szavazó minden erős koalíciónak tagja.*

4.21. Definíció. *Ha F egy összjóléti függvény, akkor jelölje $\mathcal{W}_F$ az erős koalíciók halmazát.*

4.22. Lemma. *Ha az F nem kollégiumi összjóléti függvényre teljesül a Pareto-feltétel, akkor $\nu(\mathcal{W}_F) \leq m$.*

Bizonyítás. A $\mathcal{W}_F$ halmazrendszer most nyilván egy valódi egyszerű játék, amely az F nem kollégiumi volta miatt vétómentes. Legyen $\nu(\mathcal{W}_F) = \nu$ és legyen $K_1, \ldots, K_\nu \in \mathcal{W}_F$, $\bigcap_{i=1}^{\nu} K_i = \emptyset$. Ekkor a K_i-k közül akárhánynak a metszetét is vesszük, az nem része egy, a metszetben nem szereplő indexű K_i-nek, hiszen ellenkező esetben a $\{K_i\}_{i=1}^{\nu}$ rendszer nem volna minimális, ellentétben ν definíciójával. Innen indukcióval világos, hogy

$$m - \nu \geq \left| \bigcap_{i=1}^{\nu} K_i \right| = 0\,.$$

□

4.23. Tétel (Banks [4]). *Tegyük fel, hogy $m \leq n$ és legyen $\mathcal{D} \supset \mathcal{L}(A)^m$. Ha az F aciklikus összjóléti függvényre teljesül a Pareto-feltétel, akkor az F kollégiumi.*

Bizonyítás. Ha a tétel állításával ellentétben az F nem volna kollégiumi, akkor a 4.22. lemma miatt $\nu(\mathcal{W}_F) \leq m$ teljesülne és ez az $m \leq n$ feltételünkkel együtt azt eredményezné, hogy $\nu(\mathcal{W}_F) \leq n$. Mivel a $\mathcal{W}_F$ most vétómentes, így a 4.19. tétel szerint az $F_{\mathcal{W}_F}(\mathbf{R})$ reláció ciklikus valamely $\mathbf{R}$ profil esetében.

Másrészt nyilván $F_{\mathcal{W}_F}(\mathbf{R})^{\succ} \subset F(\mathbf{R})^{\succ}$, tehát az $F(\mathbf{R})$ is ciklikus, ellentétben feltételezésünkkel. $\square$

A következő állítás mutatja, hogy a 4.23. és a 4.12. tételek nem igazak, ha $\#A > \#V$:

4.24. Állítás. *Ha $\#V > \#A$, akkor létezik olyan, a Pareto-feltételt kielégítő döntési függvény, melynél senki sem vétóerős semmilyen alternatívapár fölött.*

Bizonyítás. Legyen $\#V = m$, $\#A = n$, $m > n$, $\frac{n-1}{n} < \alpha \leq \frac{m-1}{m}$, $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$. Tetszőleges $x, y \in A$ esetén álljon fenn $xF(\mathbf{R})y$ pontosan akkor, ha $\#\{i \in V \mid xR_iy\} > (1-\alpha)m$. Mivel $\alpha > \frac{1}{2}$, ezért az $F(\mathbf{R})$ egy teljes reláció minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re. Tehát F egy összjóléti függvény. Az F definíciója alapján az F-re teljesül a párok függetlensége feltétel, továbbá $\alpha \leq \frac{m-1}{m}$ miatt minden $m-1$ tagú koalíció erős, ezért teljesül a Pareto-feltétel, sőt, senki sem vétóerős semmilyen alternatívapár fölött. Az F aciklikusságának igazolásához indirekte, tegyük fel, hogy az $a_1, \dots, a_k$ olyan, páronként különböző A-beli alternatívák, melyekre $a_iF(\mathbf{R})^{\succ}a_{i+1}$ minden $i = 1, \dots, k$-ra. A $K_i = \{j \in V \mid a_iR_ja_{i+1}\}$ jelöléssel az F definíciója alapján ekkor látszik, hogy $\#K_i \geq \alpha m$ minden $i = 1, \dots, k$-ra. Ezért a de-Morgan szabályt felhasználva kapjuk, hogy $\#\bigcap_{i=1}^k K_i = \#\left(\bigcup_{i=1}^k K_i^c\right)^c = m - \#\bigcup_{i=1}^k K_i^c \geq m - \sum_{i=1}^k \#K_i^c \geq m - m(1-\alpha)k \geq m - m(1-\alpha)n > m - m\frac{1}{n}n = 0$. A fenti egyenlőtlenség-sorozatból következik, hogy $\#\bigcap_{i=1}^k K_i > 0$, azaz $\bigcap_{i=1}^k K_i \neq \emptyset$. Ez indirekt feltételezésünkkel együtt ellentmond a 4.18. lemmának, tehát F valóban aciklikus. $\square$

5 Bináris alapú optimum függvények

Ebben a fejezetben és a későbbiekben is az állítások, tételek bizonyítását jórészt mellőzzük. Ennek oka, hogy a bizonyítások vagy pusztán technikai jellegűek, jóformán semmit sem adva az elmélet lényegéhez, vagy éppen nehezek és hosszúak, ezért a terjedelmi korlátok nem teszik lehetővé azok megadását.

5.1. Definíció. *Egy $c : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ típusú függvényt optimum függvénynek nevezünk, ha $c(X) \subset X$ minden $X \subset A$-ra teljesül, továbbá $c(X) = \emptyset$-ből következik, hogy $X = \emptyset$.*

A későbbiekben ismertetendő modellben minden profilhoz hozzárendelünk egy c optimumfüggvényt, és a $c(X)$-et úgy interpretáljuk, mint az X-beli társadalmilag —vagy legalábbis a szavazási rendszer tervezője által— optimálisnak tekintett alternatívák halmazát az adott profilnál.

5.2. Definíció. *Legyen f_1 és f_2 két optimum függvény. Az f_1 és f_2 optimum függvények $f_1 \cup f_2$ egyesítését ill. $f_1 \cap f_2$ közös részét az $(f_1 \cup f_2)(X) = f_1(X) \cup f_2(X)$, ill. $(f_1 \cap f_2)(X) = f_1(X) \cap f_2(X)$ egyenlőségekkel definiáljuk.*

Világos, hogy két optimum függvény egyesítése is optimum függvény.

5.3. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy öröklődő, ha* $X \subset Y \subset A$ *esetén* $c(Y) \cap X \subset c(X)$.

Az öröklődést úgy illusztrálhatjuk, hogy azok a magyarok, akik világbajnokok, egyben magyar bajnokok is. A definícióból könnyen következik az alábbi

5.4. Állítás. *Két öröklődő optimum függvény egyesítése is öröklődő.*

5.5. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy kiterjedő, ha* $X, Y \subset A$ *esetén* $c(X) \cap c(Y) \subset c(X \cup Y)$.

A definíció tehát azt mondja, hogy egy kiterjedő optimum függvény esetében ha egy alternatíva két halmazban is optimális, akkor optimális azok egyesítésében is.

5.6. Megjegyzés. Ha a c optimum függvény kiterjedő, akkor indukcióval könnyen adódik, hogy $X_i \subset A$, $i = 1, \ldots, k$ esetén $\bigcap_{i=1}^{k} c(X_i) \subset c(\bigcup_{i=1}^{k} X_i)$.

5.7. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy bináris alapú, ha található olyan R reláció az A-n, melyre* $c(X) = \operatorname{argmax} R|_X$ *minden* $X \subset A$ *halmazra teljesül, és ilyenkor R-re azt mondjuk, hogy a c egy alaprelációja. Ha az R választható aciklikusnak, kvázitranzitívnak ill. tranzitívnak, akkor aciklikus, kvázitranzitív ill. tranzitív alapú optimum függvényről beszélünk.*

A bináris alapú optimum függvények igen fontosak, hiszen az ilyen függvények helyettesíthetők egy (teljes) relációval, s így kapcsolatba hozhatók az összjóléti függvényekkel.

5.8. Állítás. *Egy bináris alapú optimumfüggvénynek minden alaprelációja aciklikus, s így minden bináris alapú optimumfüggvény aciklikus alapú.*

5.9. Tétel. *Egy c optimum függvény pontosan akkor bináris alapú, ha öröklődő és kiterjedő.*

5.10. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy vesztesfüggetlen, ha* $c(Y) \subset X \subset Y \subset A$ *esetén* $c(X) = c(Y)$.

Egy c vesztesfüggetlen optimum függvény esetében tehát, ha eltávolítunk néhány „vesztest” az $X \setminus c(X)$ halmazból, akkor a keletkezett szűkebb halmaz „győzteseinek” halmaza megegyezik $c(X)$-szel.

5.11. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy két vesztesfüggetlen optimum függvény egyesítése is vesztesfüggetlen.

5.12. Tétel (Schwartz [39]). *Egy c optimum függvény pontosan akkor kvázitranzitív alapú, ha öröklődő, kiterjedő és vesztesfüggetlen.*

5.13. Definíció. *Egy c optimum függvény teljesíti az Arrow féle racionalitási feltételt (***ARF***-et), ha* $X \subset Y \subset A$ *és* $c(Y) \cap X \neq \emptyset$ *esetén* $c(Y) \cap X = c(X)$.

Megjegyezzük, hogy egy **ARF**-et teljesítő optimum függvény nyilván mindig öröklődő.

5.14. Példa. Legyen $p \in I\!N$ és legyen $R \in \mathcal{L}(A)$ rögzített, úgy, hogy $a_1 R a_2 R \ldots R a_n$. Ha $X \subset A$, $|X| > p$, akkor legyen $c_p(X)$ az R szerinti p legjobb eleme az X-nek, azaz legyen $c_p(X) = Y$, ahol $Y \subset X$, $|Y| = p$, $Y R (X \setminus Y)$. Különben legyen $c_p(X) = X$. A c_p optimum függvény öröklődő, hiszen egy alternatíva pozíciója egy szűkebb halmazban nem romolhat. A vesztesfüggetlenség is világos, hiszen ha szűkítjük a szóban forgó halmazt úgy, hogy annak p legjobb elemét megtartjuk, akkor a p legjobb elem ugyanaz marad. Ha $2 \le p < n$, akkor viszont a c_p nem kiterjedő s így az 5.9. tétel miatt nem is bináris alapú. Legyen ugyanis $X = \{a_1, a_3, \ldots, a_{p+1}\}$, $Y = \{a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}\}$, akkor $c_p(X) \cap c_p(Y) = \{a_3, \ldots, a_{p+1}\}$, míg $c_p(X \cup Y) = X \cup Y = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$.

5.15. Tétel. *Egy c optimum függvény pontosan akkor gyenge rendezés alapú, ha teljesíti* **ARF**-*et.*

5.16. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy teljesíti a kinyilvánított preferencia feltételt (***MPF***-et), ha $X, Y \subset A$ esetén abból, hogy $x \in c(X)$, $y \in X \setminus c(X)$, következik, hogy ha $x \in Y$, akkor $y \notin c(Y)$.*

A fenti definíció egyszerű átfogalmazásaként adódik a következő

5.17. Állítás. *Egy c optimumfüggvény pontosan akkor teljesíti* **MPF**-*et, ha $x, y \in X \cap Y$, $x \in c(X)$, $y \in c(Y)$ esetén $x \in c(Y)$.*

A kinyilvánított preferencia feltétel szerint ha az alternatívák egy adott megengedett halmazában az x alternatíva optimális, de az y nem, akkor ha egy másik megengedett halmazban az x jelen van, akkor az y ott szintén nem lehet optimális. Ez bináris hátteret sejtet, valóban, a következő tétel szerint az **MPF** nem új feltétel:

5.18. Tétel. ARF *és* **MPF** *ekvivalensek.*

5.19. Definíció. *Egy optimumfüggvényt részlegesen bináris alapúnak nevezünk, ha található olyan L lineáris rendezés, melyre* $\operatorname{argmax} L|_X \in c(X)$ *minden $\emptyset \neq X \subset A$-ra teljesül.*

Egy bináris alapú optimumfüggvény részlegesen is bináris alapú, amint az könnyen látható.

5.20. Állítás. *Egy c optimumfüggvény pontosan akkor részlegesen bináris alapú, ha minden $\emptyset \neq X \subset A$ esetén található olyan $x \in c(X)$, melyre minden $Y \subset X$ esetén igaz, hogy*

$$x \in Y \;\Rightarrow\; x \in c(Y)\,. \tag{14}$$

Mivel öröklődő optimumfüggvény esetén a (14)-ben szereplő x tetszőlegesen választható a $c(X)$-ben, ezért igaz az

5.21. Állítás. *Egy öröklődő optimum függvény mindig részlegesen bináris alapú.*

6 A modell kiterjesztése

6.1. Definíció. *Ha* $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$, *akkor egy* $c^* : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(A)$ *függvényt, melyre minden* $X \in \mathcal{S}$ *esetén* $c^*(X) \subset X$, *továbbá* $X \in \mathcal{S}$, $c^*(X) = \emptyset$ *esetén* $X = \emptyset$, *általánosított optimum függvénynek nevezünk.*

A szokásos értelmezés szerint az $\mathcal{S}$ halmaz a megengedett alternatíva halmazok családja. Ebben a modellben tehát lehetőség nyílik arra, hogy olyan eseteket is kezeljünk, amikor egy jelölt —mondjuk stratégiai megfontolásból— visszalép a megmérettetéstől.

6.2. Definíció. *Legyen* $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$. *Egy* $F : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \to \mathcal{P}(A)$ *függvényt összoptimum függvénynek nevezünk, ha minden* $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$*-re az* $F(\mathbf{R}, \cdot\,)$ *függvény egy általánosított optimum függvény. Ha* $\mathcal{S} = \{A\}$, *akkor egyszerű összoptimum függvényről, ha pedig* $\mathcal{S} = \mathcal{P}(A)$ *(tehát amikor* $F(\mathbf{R}, \cdot\,)$ *egy optimum függvény) akkor teljes összoptimum függvényről beszélünk.*

6.3. Definíció. *Egy* F *összoptimum függvény teljesíti a Pareto-feltételt, ha* $x, y \in X \in \mathcal{S}$, $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ *esetén* $x\mathbf{R}_V^{\succ}y$*-ból következik, hogy* $y \notin F(\mathbf{R}, X)$.

6.4. Definíció. *Egy* F *összoptimum függvény teljesíti a függetlenségi feltételt, ha abból, hogy* $X \in \mathcal{S}$, $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{R}|_X = \mathbf{S}|_X$, *következik, hogy* $F(\mathbf{R}, X) = F(\mathbf{S}, X)$.

6.5. Definíció. *Egy* F *összoptimum függvény teljesíti az Arrow féle racionalitási feltételt (**ARF**-et), ha minden* $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$*-re az* $F(\mathbf{R}, \cdot\,)$ *optimum függvényre teljesül, hogy* $X, Y \in \mathcal{S}$, $X \subset Y$, $F(\mathbf{R}, Y) \cap X \neq \emptyset$ *esetén* $F(\mathbf{R}, Y) \cap X = F(\mathbf{R}, X)$.

6.6. Definíció. *Ha* F *egy összoptimum függvény, és található olyan* $i \in V$, *melyre minden* $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{S}$ *esetén* $F(\mathbf{R}, X) \subset \operatorname{argmax} R_i|_X$, *akkor az* i*-t diktátornak, az* F*-t diktatórikusnak nevezzük.*

6.7. Definíció. *Egy összoptimum függvényre azt mondjuk, hogy Arrow-típusú, ha*

i) *teljesíti a függetlenségi feltételt;*
ii) *teljesíti az Arrow féle racionalitási feltételt (**ARF**-et).*

6.8. Tétel (Arrow [3]). *Legyen* $|A| \geq 3$, *és* $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$. *Ha* F *egy teljes Arrow-típusú összoptimum függvény, amely teljesíti a Pareto-feltételt, akkor az* F *diktatórikus.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, akkor ha $xRy \Leftrightarrow x \in F(\mathbf{R}, \{x, y\})$, akkor az $\mathbf{R} \to R$ hozzárendelés az 5.15. tétel miatt egy Arrow-típusú összjóléti függvény mely teljesíti a Pareto-feltételt is, tehát Arrow tétele (3.26. következmény) miatt diktatórikus az ottani értelemben. Ebből viszont következik a tétel állítása. □

Az egyszerű összoptimum függvény fogalma lehetővé teszi, hogy az ú.n. Hansson-féle függetlenségi feltételt definiáljuk. Ily módon az Arrow-féle problémát megfogalmazhatjuk egyszerű összoptimum függvényes modellben is.

Sajnos, mint látni fogjuk (6.11. tétel), a megfelelő negatív tartalmú tétel itt is áll.

6.9. Definíció. *Egy F egyszerű összoptimum függvény teljesíti a Hansson-féle függetlenségi feltételt, ha minden olyan $x, y \in A$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ esetén, melyre $\mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}}$, abból, hogy $x \in F(\mathbf{R})$ és $y \notin F(\mathbf{R})$, következik, hogy $y \notin F(\mathbf{S})$ (itt és a továbbiakban is $F(\mathbf{R}, A)$ helyett $F(\mathbf{R})$-t írunk).*

6.10. Definíció. *Legyen az F egy egyszerű összoptimum függvény. Azt mondjuk, hogy a $K \subset V$ koalíció erős, ha minden $x, y \in A$-ra és minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re teljesül, hogy $x\mathbf{R}_K^{\succ}y$ esetén $y \notin F(\mathbf{R})$.*

6.11. Tétel (Hansson [23]). *Legyen $|A| \geq 3$ és $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$. Ha az F egyszerű összoptimum függvényre teljesül a Pareto-feltétel és a Hansson-féle függetlenségi feltétel, akkor az F diktatórikus.*

Bizonyítás. Legyen az L egy rögzített lineáris rendezés az A-n, és ha $X \subset A$, akkor minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $\mathbf{R}^X = (R_1^X, R_2^X, \ldots, R_m^X)$ az alábbi profil:

$$\mathbf{R}^X : \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & m \\ \hline R_1|_X & R_2|_X & \ldots & R_m|_X \\ L|_{A\setminus X} & L|_{A\setminus X} & \ldots & L|_{A\setminus X} \end{array}$$

tehát a $\mathbf{L} = (L, L, \ldots, L)$ jelöléssel $\mathbf{R}^X|_X = \mathbf{R}|_X, \mathbf{R}^X|_{A\setminus X} = \mathbf{L}|_{A\setminus X}$, továbbá $X(\mathbf{R}^X)_V^{\succ}Y$. Vagyis arról van szó, hogy az $\mathbf{R}^X$ profilban az X-beli alternatívák között az $\mathbf{R}$-beli preferenciák teljesülnek, a szigorúan alattuk lévő $A \setminus X$-beliekre pedig az L-beli preferenciák.

Legyen $\mathbf{R} \in \mathcal{D}, x, y \in A$ esetén az $F^*(\mathbf{R})$ reláció az alábbiak szerint megadva az A-n:

$$xF^*(\mathbf{R})y \Leftrightarrow x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}}) \; .$$

Állítjuk, hogy F^* egy Arrow-típusú összjóléti függvény. Először is megjegyezzük, hogy a Pareto-feltétel miatt $F(\mathbf{R}^X) \subset X$ mindig teljesül, ha $\emptyset \neq X \subset A$, s így az $X = \{x, y\}$ esetben kapjuk, hogy $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$ vagy $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$, tehát $F^*(\mathbf{R})$ egy teljes reláció minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re, s így az F^* egy összjóléti függvény.

A bizonyítás további részében többször használni fogjuk a Hansson-féle függetlenségi feltétel alábbi átfogalmazását:

$$\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D},\ \mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}},\ x \in F(\mathbf{R}),\ y \in F(\mathbf{S}) \ \Rightarrow \ x \in F(\mathbf{S}) \; . \tag{15}$$

A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, $xF^*(\mathbf{R})y$ és $yF^*(\mathbf{R})z$. Mivel $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$ teljesül, ezért ha $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$, akkor $\mathbf{R}^{\{x,y\}}|_{\{x,y\}} = \mathbf{R}^{\{x,y,z\}}|_{\{x,y\}}$ miatt (15) alapján $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$. Mivel $y \in F(\mathbf{R}^{\{y,z\}})$, így ha $z \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$, és így a fentiek miatt megint csak $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$. Tehát $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$-nek mindenképpen teljesülnie kell, ezért, ha $z \in F(\mathbf{R}^{\{x,z\}})$, akkor megint csak a fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,z\}})$. Így tehát $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,z\}})$, s így $xF^*(R)z$.

Az F^*-ra teljesül a párok függetlensége feltétel is, hiszen ha $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}}$, akkor $\mathbf{R}^{\{x,y\}} = \mathbf{S}^{\{x,y\}}$.

Beláttuk tehát F^* egy Arrow-típusú összjóléti függvény. Az F^*-ra teljesül a Pareto-feltétel, hiszen ha $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, $x\mathbf{R}_V^{\succ}y$, akkor $F(\mathbf{R}^{\{x,y\}}) = x$ az F-re vonatkozó Pareto-feltétel miatt, s így $xF^*(\mathbf{R})^{\succ}y$.

A 3.26. következmény feltételei tehát teljesülnek F^*-ra, s így F^* diktatórikus, legyen a diktátor i. Állítjuk, hogy ekkor az i diktátora F-nek is. Tegyük fel, hogy $x \in F(\mathbf{R})$, és állításunkkal ellentétben, tegyük fel, hogy $yR_i^{\succ}x$ valamely $y \in A$-ra. Ekkor $yF^*(\mathbf{R})^{\succ}x$, így tehát $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$, $x \notin F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$, de ekkor a Hansson-féle függetlenségi feltétel miatt kapjuk, hogy $x \notin F(\mathbf{R})$, ellentmondás. □

Az alábbi könnyen igazolható állítás mutatja, hogy bizonyos értelemben az egyszerű összoptimum függvényekre vonatkozó Hansson-féle függetlenségi feltétel gyengébb, mint a Arrow-típusú összjóléti függvényekre vonatkozó párok függetlensége feltétel:

6.12. Állítás. *Legyen az $F : \mathcal{D} \to \mathcal{WL}(A)$ egy Arrow-típusú összjóléti függvény. Ekkor a $G(\mathbf{R}) = \operatorname{argmax} F(\mathbf{R})$ egyszerű összoptimum függvényre teljesül a Hansson-féle függetlenségi feltétel.*

A következő, összoptimum függvényekről szóló tétel kiutat jelenthet a lehetetlenségi tételek köréből abban a speciális esetben, amikor a megengedett halmazok közös része nemüres, azaz létezik egy olyan alternatíva (nevezhetjük status quo-nak), amely minden helyzetben —mondjuk döntésképtelenség esetében— adoptálható.

6.13. Tétel (Gibbard-Hylland-Weymark [22]). *Legyen $|A| \geq 3$, $|V| \geq 2$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$. Tegyük fel, hogy $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$, és tegyük fel, hogy $\#\mathcal{S} > 1$. Tetszőleges $\mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ esetén található olyan Arrow-típusú összoptimum függvény, mely teljesíti a Pareto-feltételt és mégsem diktatórikus.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcap \mathcal{S}$. Ha $(\mathbf{R}, X) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ akkor legyen $F_0(\mathbf{R}, X) = \{x \in X \mid x\mathbf{R}_V a\}$, és legyen $F(\mathbf{R}, X) = \operatorname{argmax} R_1|_{F_0(\mathbf{R},X)}$. Mivel ha $X \in \mathcal{S}$, akkor $a \in F_0(\mathbf{R}, X) \subset X$, ezért az F nyilván egy összoptimum függvény. Belátjuk, hogy F-re teljesül a Pareto-feltétel. Tegyük fel, hogy $(\mathbf{R}, X) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}, x, y \in X, x\mathbf{R}_V^{\succ}y$. Két eset lehetséges:

1. eset: $y \notin F_0(\mathbf{R}, X)$. Ekkor nyilván $y \notin F(\mathbf{R}, X)$. 2. eset: $y \in F_0(\mathbf{R}, X)$. Ekkor $x\mathbf{R}_V^{\succ}y$ miatt $x \in F_0(\mathbf{R}, X)$, és így $xR_1^{\succ}y$ miatt $y \notin F(\mathbf{R}, X)$ megint csak teljesül.

Az F-re teljesül a függetlenségi feltétel, hiszen ha $(\mathbf{R}, X)$, $(\mathbf{S}, X) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ és $\mathbf{R}|_X = \mathbf{S}|_X$, akkor $a \in X$ miatt $F_0(\mathbf{R}, X) = F_0(\mathbf{S}, X)$, s így valóban $F(\mathbf{R}, X) = F(\mathbf{S}, X)$.

Belátjuk, hogy F-re teljesül az Arrow-féle racionalitási feltétel. Tegyük fel, hogy $X, Y \in \mathcal{S}$, $X \subset Y$. Tegyük fel, hogy $x \in F(\mathbf{R}, Y) \cap X$ tetszőleges. Ekkor $x \in X$, továbbá $x\mathbf{R}_V a$ és minden $y \in F_0(Y)$-ra teljesül, hogy xR_1y. Ezért $x \in X$ és $X \subset Y$ miatt világos, hogy $x \in F(\mathbf{R}, X)$.

Tegyük fel most, hogy $x \in F(\mathbf{R}, X)$ tetszőleges és hogy $F(\mathbf{R}, Y) \cap X \neq \emptyset$, mondjuk, $x_0 \in F(\mathbf{R}, Y) \cap X$. Az előző paragrafus miatt $x_0 \in F(\mathbf{R}, X)$, ezért xR_1x_0. Ha $y \in F_0(\mathbf{R}, Y)$ tetszőleges, akkor x_0R_1y, ezért xR_1y, s így $x \in F(\mathbf{R}, Y) \cap X$.

Az F nem diktatórikus, hiszen bárki bármely olyan alternatívát megvétózhat a-n kívül, amely megengedett halmazba tartozik (és ilyen létezik, mert a tétel $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$ és $\#\mathcal{S} > 1$ feltételeiből következik, hogy található legalább kételemű megengedett halmaz). □

7 Útfüggetlen optimum függvények

A gyakorlatban, amikor a legjobb (vagy legalábbis a számunkra elfogadható) alternatívákat keressük, gyakran járunk el úgy, hogy először az alternatívák néhány áttekinthető részhalmazában keressük meg a legjobb elemeket, így megszabadulván az esélytelenektől. Ezt az eljárást folytatjuk a megmaradt halmazzal, s.í.t., amíg el nem jutunk a legjobb alternatíváknak egy végsőnek tekintett halmazához. Erre a módszerre szükség lehet például, amikor a kommunikációs vagy a logisztikai költségek magasak. Megeshet azonban, hogy az eljárás végeredménye függ a részhalmazok megválasztásától. Például a többségi relációt alapul véve, a napirendi szavazás nagymértékben függ a napirendtől (lásd a 2.9. példát), tehát az ütköztetendő alternatívapárok megválasztásától. Minimális konzisztencia-követelmény ezért, hogy az eljárás végeredménye ne függjön az általunk választott részhalmazoktól, az ,,úttól”, melyen hozzá jutunk. A következő definíció ezt fogalmazza meg a legegyszerűbb esetben, de látni fogjuk, hogy ez már magában hordozza a fenti általános kívánalmat is.

7.1. Definíció. *Az $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ típusú függvényeket halmazfüggvényeknek hívjuk. Egy halmazfüggvényre azt mondjuk, hogy útfüggetlen, ha $f(X \cup Y) = f(f(X) \cup Y)$ teljesül minden $X, Y \subset A$-ra.*

Mint látható, a definíció általában halmaz függvényekre lett kimondva. Ennek oka, hogy a későbbiekben az útfüggetlen optimumfüggvények vizsgálatánál szükségünk lesz erre az általános fogalomra. A következő állítást az $Y = \emptyset$ választással kapjuk a 7.1. definícióban:

7.2. Állítás. *Egy f útfüggetlen halmazfüggvény mindig idempotens, azaz $f(f(X)) = f(X)$ minden $X \subset A$-ra.*

A 7.1. definíció egyenes következménye továbbá, hogy ha adott az $X \subset A$ halmaz egy tetszőleges felbontása, melyben a halmazok nem feltétlenül diszjunktak, de még csak nem is feltétlenül különbözők, akkor ha ezekből a halmazokból felépítünk egy többszörösen összetett kifejezést az egyesítés művelet és a c útfüggetlen halmazfüggvény segítségével, majd az eredményt c-be helyettesítjük, akkor az eredmény mindig $c(X)$ lesz. Példának tekintsük az $A \circ B = c(A \cup B)$ műveletet, amely a fentiek alapján tehát asszociatív.

Arrow maga is foglalkozott az útfüggetlenség problémájával [3], elismerve, hogy az **ARF**-re (lásd az 5.13. definíciót) inkább csak azért volt szüksége, hogy az útfüggetlenséget biztosítsa. A 6.8. tétel viszont nem igaz, ha az **ARF** feltételt az útfüggetlenséggel helyettesítjük. Így tehát az útfüggetlen optimum függvények tanulmányozása az Arrow problémakör nézőpontjából is indokolt.

A következő tétel egyszerű jellemzését adja az útfüggetlen optimum függvényeknek:

7.3. Tétel. *Egy optimum függvény pontosan akkor útfüggetlen, ha öröklődő és vesztesfüggetlen.*

Bár az útfüggetlenség definíciója egy bizonyos fokú racionalitást fogalmaz meg, nem minden útfüggetlen optimum függvény bináris alapú, amint az alábbi példa mutatja:

7.4. Példa. A 7.3. tétel és az 5.14. példában elmondottak alapján állíthatjuk, hogy a c_k optimumfüggvény egy nem bináris alapú útfüggetlen optimum függvény.

7.5. Példa. Legyen a P egy kvázitranzitív reláció az A-n és $X \subset A$ esetén legyen $f(X) = \operatorname{argmax} P|_X$. Ekkor az 5.12. és a 7.3. tételek alapján az f egy útfüggetlen optimum függvény.

7.6. Példa. Legyen a R egy tranzitív reláció az A-n és $X \subset A$ esetén legyen $f(X) = \{x \in A \mid \exists y \in X : yRx\}$. Ekkor f egy útfüggetlen halmazfüggvény.

A 7.3. tétel alapján az 5.4. és az 5.11. megjegyzések alapján kapjuk az alábbi állítást:

7.7. Tétel. *Két útfüggetlen optimum függvény egyesítése is útfüggetlen.*

A 7.3. és az 5.9. valamint az 5.12. tételek alapján állíthatjuk, hogy ha egy útfüggetlen optimumfüggvény bináris alapú, akkor kvázitranzitív alapú. Az 5.14. példa alapján azonban világos, hogy nem minden útfüggetlen optimum függvény bináris alapú. A későbbiekben látni fogjuk, hogy egy-egy értelmű kapcsolat van az n-elemű A halmazon tekintett útfüggetlen optimumfüggvények és antimatroidok között, melyek száma aszimptotikusan 2^{2^n} ([28]), míg a bináris alapú optimumfüggvények száma nyilván legfeljebb $3^{\binom{n}{2}}$. A $3^{\binom{n}{2}}/2^{2^n}$ arány azonban gyorsan tart a 0-hoz, amint az n tart a végtelenhez.

A következő nevezetes tétel egyszerű jellemzését adja az útfüggetlen optimum függvényeknek:

7.8. Tétel (Aïzerman és Malisevszkij [2]). *Egy c optimum függvény pontosan akkor útfüggetlen, ha találhatók olyan $L_1, \ldots, L_k$ lineáris rendezések az A-n, melyekre igaz, hogy minden $X \subset A$ esetén*

$$c(X) = \{\operatorname{argmax} L_1|_X, \ldots, \operatorname{argmax} L_k|_X\} . \tag{16}$$

7.9. Definíció. *Ha $X \subset Y \subset A$ akkor legyen $[X, Y] = \{Z \subset A \mid X \subset Z \subset Y\}$. Az $[X, Y]$ halmazt intervallumnak nevezzük.*

7.10. Definíció. *A $\mathcal{P}(A)$-nak egy partíciójára azt mondjuk, hogy intervallum eltolásra zárt, ha igaz, hogy ha $[X, Y]$ egy részhalmaza valamely C osztálynak, akkor $Z \subset A \setminus Y$ esetén $[X \cup Z, Y \cup Z]$ is részhalmaza valamely osztálynak (amely esetleg nem csak a C-től függ, hanem magától az $[X, Y]$-tól is).*

7.11. Definíció. *Ha c egy halmazfüggvény, akkor $X \subset A$ esetén legyen* $\mathrm{arc}(X) = \{Y \subset A \mid c(Y) = c(X)\}$, *és legyen* $k_c(X) = \bigcup \mathrm{arc}(X)$.

7.12. Tétel. *Ha a c egy útfüggetlen optimum függvény, akkor a* $\mathrm{P} = \{\mathrm{arc}(X) \mid X \subset A\}$ *halmazcsalád egy intervallumokból álló, eltolásra zárt partíciója $\mathcal{P}(A)$-nak és az üres halmaz egymaga alkot osztályt. Fordítva, tegyük fel, hogy* $\emptyset \notin \mathrm{P}$ *és a* P *egy intervallumokból álló, eltolásra zárt partíciója $\mathcal{P}(A)$-nak, és az üres halmaz egymaga alkot osztályt. Ekkor található egy olyan egyértelműen meghatározott c útfüggetlen optimum függvény, melyre* $\{\mathrm{arc}(X) \mid X \subset A\} = \mathrm{P}$.

7.13. Példa. Tegyük fel, hogy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és hogy egy döntéshozó testület egy adott helyzetben (mondjuk egy adott profilnál) olyan c útfüggetlen optimum függvényt szeretne, melyre

$$c\{1,3,4\} = \{1,3\} \quad \text{és} \quad c\{2,3,4\} = \{2,4\}\,. \tag{17}$$

Ha létezik ilyen c, akkor a 7.12. tétel miatt a hozzá tartozó P partíció osztályainak részei lesznek a $[24, 234]$ és a $[13, 134]$ intervallumok (a könnyebb olvashatóság kedvéért a kapcsos zárójeleket és a vesszőket elhagytuk). Mivel a P eltolásra zárt, ezért a $[124, 1234]$ és a $[123, 1234]$ nem diszjunkt intervallumok is részei a P bizonyos osztályának. De ekkor $[124 \cap 123, 1234] = [12, 1234]$ is része a P ezen osztályának. Ha most a

$$\{[24, 234], [13, 134], [12, 1234]\} \tag{18}$$

halmazt kiegészítjük az elfajuló intervallumokból álló

$$\{\emptyset, [1,1], [2,2], [3,3], [4,4], [14,14], [23,23], [34,34]\} \tag{19}$$

halmazzal, akkor könnyen láthatóan egy eltolásra zárt P partícióját kapjuk a $\mathcal{P}\{1,2,3,4\}$-nek. Így tehát a 7.12. tétel miatt a P-hez tartozó c optimum függvény útfüggetlen, és természetesen a kezdeti $c\{1,3,4\} = \{1,3\}$ és $c\{2,3,4\} = \{2,4\}$ feltételek is teljesülnek.

A továbbiakban egy c útfüggetlen optimum függvény és a hozzárendelt k_c halmazfüggvény közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Ez a kapcsolat elvezet a konvex geometriákhoz és az antimatroidokhoz, melyek elmélete kiterjedt és széles alkalmazási területtel bírnak. A közölt eredményeket nem bizonyítjuk, egyrészt helyszűke miatt, másrészt a (jól követhető) bizonyításaik megtalálhatók a hivatkozott irodalomban.

7.14. Tétel. *Ha c egy útfüggetlen optimum függvény, akkor k_c-re igazak az alábbi állítások:*

i) $k_c(\emptyset) = \emptyset$;

ii) $X \subset A$ *esetén* $X \subset k_c(X)$ *(bővülő);*

iii) $X \subset A$ *esetén* $k_c(k_c(X)) = k_c(X)$ *(idempotens);*

iv) $X \subset Y \subset A$ *esetén* $k_c(X) \subset k_c(Y)$ *(monoton);*

v) *minden* $X \subset A$ *esetén található olyan* $M \subset A$, *melyre* $k(M) = k(X)$, *és ha* $k(Y) = k(X)$, *akkor* $M \subset Y$ *(található legszűkebb feszítő halmaz).*

7.15. Definíció. *A 7.14. tétel i)–v) feltételeit kielégítő halmazfüggvényeket konvex lezárásnak nevezzük.*

A következő néhány példára vonatkozó állítás a definíció alapján könnyen bizonyítható:

7.16. Példa. Legyen a R egy parciális rendezés az A-n és $X \subset A$ esetén legyen $f(X) = \{x \in A \mid \exists y \in X : yRx\}$. Ekkor f egy konvex lezárás.

7.17. Tétel. *Ha* k_1 *és* k_2 *konvex lezárások, akkor* $k_1 \cap k_2$ *is konvex lezárás.*

7.18. Példa. Legyen A egy véges ponthalmaz $\mathbb{R}^d$-ben, és $X \subset A$ esetén legyen $k(X) = \operatorname{conv}(X) \cap A$, ahol $\operatorname{conv}(X)$ az X konvex burka, tehát az a legszűkebb konvex halmaz, amely tartalmazza az X-et. Ekkor a k egy konvex lezárás.

7.19. Példa. Legyen adott a G fa az A csúcshalmazzal. Ha $X \subset A$ esetén $k(X)$ az a legszűkebb csúcshalmaz, melyre a $G[k(X)]$ indukált részgráf összefüggő, akkor k egy konvex lezárás.

7.20. Definíció. *Ha* k *egy halmazfüggvény, akkor legyen minden* $X \subset A$*-ra* $c_k(X) = \bigcap \operatorname{arc}(X)$.

7.21. Tétel. *Ha* k *egy konvex lezárás, akkor* c_k *egy útfüggetlen optimum függvény.*

7.22. Tétel. *A* $c \to k_c$ *ill.* $k \to c_k$ *leképezések kölcsönösen egyértelmű leképezések az útfüggetlen optimum függvények és a konvex lezárások ill. a konvex lezárások és az útfüggetlen optimum függvények között, továbbá egymás inverzei. A két leképezés között fennáll továbbá az alábbi duális kapcsolat:*

$$i)\ \ c_{k_1 \cap k_2} = c_{k_1} \cup c_{k_2}\,; \qquad ii)\ \ k_{c_1 \cup c_2} = k_{c_1} \cap k_{c_2}\,.$$

7.23. Definíció. *Ha* k *egy halmazfüggvény, akkor jelölje* $\mathcal{F}_k$ *a* k *zárt halmazainak családját, tehát az* $\{X \subset A \mid k(X) = X\}$ *halmazt.*

7.24. Definíció. *Ha* $\mathcal{F}$ *egy* A*-beli halmazrendszer, akkor* $X \subset A$ *esetén legyen* $k_{\mathcal{F}}(X) = \bigcap \{Y \in \mathcal{F} \mid X \subset Y\}$.

7.25. Definíció. *Egy* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ *halmazrendszert konvex geometriának nevezünk, ha*

i) $\emptyset, A \in \mathcal{F}$;

ii) $X, Y \in \mathcal{F}$ *esetén* $X \cap Y \in \mathcal{F}$;

iii) $X \in \mathcal{F}$, $X \neq A$ *esetén található olyan* $x \in A \setminus X$, *melyre* $X \cup x \in \mathcal{F}$. *Az* $\mathcal{F}$ *elemeit konvex halmazoknak nevezzük.*

7.26. Tétel. *A $k \to \mathcal{F}_k$ ill. a $\mathcal{F} \to k_{\mathcal{F}}$ leképezések kölcsönösen egyértelmű leképezéseket határoznak meg a konvex lezárások és a konvex geometriák ill. a konvex geometriák és a konvex lezárások között, továbbá egymás inverzei.*

7.27. Definíció. *Egy A-beli $\mathcal{A}$ halmazrendszert antimatroidnak nevezünk, ha*

i) $\emptyset, A \in \mathcal{A}$;

ii) $X, Y \in \mathcal{A}$ *esetén* $X \cup Y \in \mathcal{A}$;

iii) $X, Y \in \mathcal{A}$, $Y \backslash X \neq \emptyset$ *esetén található olyan* $x \in Y \backslash X$, *melyre* $X \cup x \in \mathcal{A}$.

7.28. Tétel. *Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer az A-n pontosan akkor konvex geometria, ha az $\{F^c \mid F \in \mathcal{F}\}$ halmazrendszer antimatroid.*

7.29. Tétel. *Legyenek P és Q véges ponthalmazok az $\mathbb{R}^d$-ben, úgy, hogy* $\operatorname{conv}(P) \cap \operatorname{conv}(Q) = \emptyset$. *Ekkor*

$$\{X \subset P \mid \operatorname{conv}(X \cup Q) \cap P = X\} \tag{20}$$

egy konvex geometria a P-n.

A (20) típusú konvex geometriákat konvex burkolásnak nevezzük. Az alábbi reprezentációs tétel igaz:

7.30. Tétel (Kashiwabara [25]). *Minden konvex geometria izomorf valamely konvex burkolással.*

7.31. Definíció. *Ha az $\mathcal{F}$ egy konvex geometria, akkor egy $X \in \mathcal{F}$-re azt mondjuk, hogy metszet-irreducibilis, ha $Y, Z \in \mathcal{F}$, $Y \cap Z = X$-ből következik, hogy $Y = X$ vagy $Z = X$.*

7.32. Tétel (Edelman és Saks [19]). *A 7.8. tételben a reprezentációhoz elegendő lineáris rendezések minimális száma egyenlő az $\mathcal{F}_{k_c}$ halmazban a páronként összehasonlíthatatlan metszet-irreducibilis halmazok maximális számával.*

7.33. Példa. Tekintsük a 7.13. példában szereplő útfüggetlen optimum függvényt. A (18) és (19) halmazrendszerek egyesítéséből adódó halmazrendszerből kiolvasható az $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{k_c}$ konvex geometria:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 14, 23, 34, 234, 134, 1234\}\ .$$

A metszet-irreducibilis halmazok $\mathcal{M}$ családja $\mathcal{F}$-ben:

$$\mathcal{M} = \{\emptyset, 1, 2, 14, 23, 234, 134, 1234\}\ ,$$

innen pedig látható, hogy $\mathcal{M}$-ből legfeljebb kettő összehasonlíthatatlan halmaz választható ki. A 7.32. tételből következik, hogy a c lineáris reprezentációjához elegendő lineáris rendezések számának minimuma kettő. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2341 és az 1432 rendezések megfelelőek.

Irodalom

1. Aïzerman, M. és Aleskerov, F.: *Theory of Choice*, North-Holland, (1995)
2. Aïzerman, M. és Malishevski, A. V.: General theory of best variants choice: some aspects, *IEEE Transactions on Automatic Control*, V.AC-26 5 (1981) 1030–1041.
3. Arrow, K. J.: Social Choice and Individual Values, 2$^{\text{nd}}$ edition, Wiley, New York, (1963)
4. Banks, J. S.: Acyclic social choice from finite sets, *Social Choice and Welfare,* 12 (1995) 293–310.
5. Bell, C. E.: A random voting graph almost surely has a Hamiltonian cycle when the number of alternatives is large, *Econometrica*, 49 (1981) 1597–1603.
6. Bilbao, J. M. és Edelman, P. H.: The Shapley value on convex geometries, *Discrete Applied Mathematics*, 103 (2000) 33–40.
7. Black, D.: *The Theory of Committees and Elections*, Kluwer Academic Publishers, 1958.
8. Blair D. H. és Pollak, R. A.: Acyclic collective choice rules, *Econometrica*, 50 (1982) 931–943.
9. Blair D. H. és Pollak, R. A.: Polychromatic acyclic tours in colored multigraphs, *Mathematics of Operations Research*, 8 (3) (1983) 471–476.
10. Borda, J. C.: Mémoire sur les Élections au Scrutin, *Histoire de l' Académie Royale des Sciences*, (1781)
11. Condorcet, Caritat, Marquis de, M.J.A.M.: Essai sur l' Application de l' Analyse a la Probabilité des *Decisions rendues a la pluralitedes voix L' Imprimerie Royale,* Paris, (1785)
12. Danilov, V. és Koshevoy, G.: Mathematics of Plott choice functions, *Mathematical Social Sciences,* 40 (2005) 245–272.
13. Deb, R.: Binariness and rational choice, *Mathematical Social Sciences,* 5 (1983) 97–106.
14. Demange, G.: Single-peaked orders on a tree, *Mathematical Social Sciences*, 3 (4) (1982) 389–397.
15. Dodgson, Rev. C. L.: A Discussion of the Various Methods of Procedure in Conducting Elections (az előszó 1873. december 18-ára datálva) 15+1 oldal.
16. Dodgson, Rev. C.L.: Suggestions as to the Best Method of Taking Votes, Where More than Two Issues are to be voted on, (az előszó 1874. júius 13-ára datálva) 15+1 oldal.
17. Dodgson, Rev. C. L.: A Method of Taking Votes on More than Two Issues, 1876. február 23., 20 oldal.
18. Edelman, P. H. és Jamison, R. E.: The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata,* 19 (1985) 247–270.
19. Edelman, P. H. és Saks M. E.: Combinatorial representation and convex dimension of convex geometries, *Order,* 5 (1988) 23–32.
20. Erdős, P. és Moon, J. W.: On sets of consistent arcs in a tournament, *Canadian Mathematical Bulletin,* 8 (1965) 269–271.
21. Gibbard, A. F.: Social choice and the Arrow condition, Mimeograph (Harvard Egyetem) 1969

22. Gibbard, A. F. és Hylland, A. és Weymark, J. A.: Arrow's theorem with a fixed feasible alternative, *Social Choice and Welfare,* 4 (1987) 105–115.
23. Hansson, B.: Voting and group decision functions, *Synthese,* 20 (1969) 526-537.
24. Johnson, M. R. és Dean, R. A.: Locally complete path independent choice functions and their lattices, *Mathematical Social Sciences,* 42 (2001) 53–87.
25. Kashiwabara, K., Nakamura, M. és Okamoto, Y.: The affine representation theorem for abstract convex geometries, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 30 (2005) 129–144.
26. Koshevoy, G. A.: Choice functions and abstract convex geometries, *Mathematical Social Sciences*, 38 (1999) 35–44.
27. Laplace, P-S.: Leçons de Mathématiques, données à l'École Normale en 1795, *Journal de l' École Politechnique, tome II, septième et huitième cahiers* (1812)
28. Lovász László személyes közlése.
29. Mala, J.: On λ-majority voting paradoxes, *Mathematical Social Sciences*, 37 (1999) 39–44.
30. www.wallis.rochester.edu/miniconf03/maskin.pdf
31. www.sss.ias.edu/publications/papers/papereleven.pdf
32. McGarvey, D. C.: A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica*, 21 (1953) 608–610.
33. Monjardet, B. és Raderanirina, V.: The duality between the semi-lattice of anti-exchange closure operators and path-independent choice operators, *Mathematical Social Sciences*, 41 (2001) 131–150.
34. Moulin, H.: Choice functions over a finite et: a summary, *Social Choice and Welfare,* 2 (1985) 147–160.
35. Nakamura, K.: The vetoers in a simple game with ordinal preferences, *International Journal of Game Theory*, 8 (1979) 55–61.
36. Plott, C. R.: Path independence, rationality and social choice, *Econometrica,* 41 (1973) 1075–1091.
37. Saari, D. G.: Mathematical structure of voting paradoxes: I. Pairwise votes, *Economic Theory,* 15, Issue 1 (2000)
38. Saari, D. G.: Mathematical structure of voting paradoxes: II. Positional voting, *Economic Theory,* 15, Issue 1, (2000)
39. Schwartz, T.: Choice functions, 'rationality' conditions and variations of the weak axiom of revealed preference, *Journal of Economic Theory*, 13 (1976) 414–427.
40. Wilson, R. B.: Social choice without the Pareto principle, *Journal of Economic Theory*, 5 (1972) 14–20.

ARROW-TYPE IMPOSSIBILITY THEOREMS

This review article considers the famous Arrow impossibility theorem of social choice theory with its generalizations. The theorem is about the impossibility of a voting system that satisfies a couple of innocent-looking conditions. We show that the impossibility remains in two models in a very general setting. We give the

proofs of the theorems showing the basic methods of the theory at the same time. We also survey the theory of path independent choice functions, a new approach to resolve Arrow's theorem.

POZÍCIÓS JÁTÉKOK[1]

PLUHÁR ANDRÁS
Szegedi Tudományegyetem

A pozíciós játékok többnyire véges, kétszemélyes, zérusösszegű, teljes információs játékok, amelyekben még kevert stratégiák alkalmazására sincs szükség. A pozíciós játékok megadási módjuk miatt viszont mátrixjátékként nem kezelhetők jól, így a vizsgálatukra változatos matematikai eszköztár alakult ki. Jelen áttekintés célja ezek vázlatos ismertetése, néhol kiterjesztése.

1 Bevezetés

A *pozíciós játék* pontos definíciója nem adható meg, mindenféle játékot beleérthetünk, ahol a nyerés feltétele valamely alakzat eléréséhez/elkerüléséhez kapcsolódik. Első közelítésben *pozíciós játék*, vagy *hipergráf játék* alatt a következőt értjük. Adott egy $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, \mathcal{H})$ hipergráf, azaz $\mathcal{H} \subset 2^V$. A V halmaz elemei alkotják a *táblát*, míg az $\mathcal{H}$ elemei az ún. *nyerő* halmazok. Két játékos, a kezdő és a második, vagy I és II, felváltva választja a tábla elemeit. Amelyikük elsőként megszerezi egy nyerő halmaz összes elemét az megnyeri a játékot.

Az X játékos nyer (döntetlent ér el) kifejezés alatt azt értjük, hogy mindkét játékos tökéletes játéka esetén ez lenne az eredmény. Ha a tábla véges, akkor használhatjuk az alábbi tételt:

1. Tétel (Zermelo-Neumann, [12, 20]). *Egy teljes információs, véges, kétszemélyes játékot vagy az egyik játékos nyeri vagy a játék döntetlen.*

Megjegyzés. Az 1. tételre Zermelo adott bizonyítást[2], így többnyire Zermelo tételként, vagy ún. játékelméleti *tertium non datur*[3] elvként hivatkozzák.

1. Példa. Tic-Tac-Toe. I és II felváltva tesz egy jelet a 9 négyzetből álló, 3×3-as tábla egy-egy mezőjére. Aki hamarabb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót, az nyer.

2. Példa. Tic-Toc-Tac-Toe. Ez a Tic-Tac-Toe 3-dimenziós változata, aminek a táblája $4 \times 4 \times 4$-es kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, lap és test főátlók, összesen 76 darab.

---

[1] Beérkezett: 2007. május 30. *1991 Mathematics Subject Classification.* 91A24, 90D42, 05C65. A kutatást támogatta az OTKA T034475 és T049398 pályázata. E-mail: `pluhar@inf.u-szeged.hu`.

[2] Az első bizonyítás hiányos volt, ezt később Kőnig Dénes és Kalmár László javította ki, lásd [20].

[3] Azaz a *harmadik eset nem létezik.* Végtelen játékokra más a helyzet, u. i. a *kiválasztási axióma* használatával készíthető olyan játék, amelynek kimenetele *eldönthetetlen.*

3. Példa Amőba (5-in-a-row). Itt a tábla a végtelen négyzetrács (a gyakorlatban lehet a 19×19-es go tábla vagy füzetlap). A játékosok felváltva jelölik a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer.

4. Példa k-amőba (k-in-a-row). A fentihez hasonló, csak ebben k egymást követő jel kell a nyeréshez.

A gyakorlatból tudjuk, a kezdőjátékos (itt I) előnyös helyzetben van a fentiekben. Ez matematikai eszközökkel is belátható, sőt sokkal általánosabban igaz:

2. Tétel (Hales-Jewett, [31]). *Bármely* $(V, \mathcal{H})$ *hipergráf játékban a kezdő nyer, vagy döntetlen az eredmény.*[4]

Bizonyítás. Ez az ún. *stratégia lopás* módszerrel[5] kapható meg. Általános pozíciós játékokra Alfred Hales és Robert Jewett mondta ki a [31]-ben. Ha II nyerne, azaz lenne *nyerő stratégiája*[6], akkor I is használhatná ezt, hiszen a saját, korábbi lépései sohasem ártanak. Vagyis I megfeledkezhet az első lépéséről, és ha a stratégia ezt kérné, akkor úgy tehet, mintha éppen most lépné meg ezt, és az esedékes lépését tetszőlegesen helyezheti el. $\square$

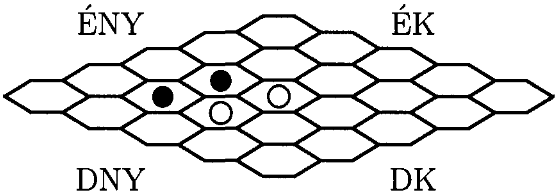
Az 1. és 2. tételek sokszor megmondják, *mi* lesz az eredmény, de arról keveset árulnak el, *hogyan* játszunk. Ez már a példáinkban sem egyszerű, általában még kevésbé várható. A tic-tac-toe könnyen láthatóan döntetlen, míg a tic-toc-tac-toe-t I nyeri. Az utóbbi igazolásához viszont 1500 óra gépidőt használt fel Oren Patashnik a hetvenes évek végén, és megjegyezhető nyerő stratégiát eddig nem találtak rá, lásd [16, 42]. Az amőbát (legalábbis a go táblán) a kezdő nyeri, a k-amőba pedig döntetlen, ha $k \geq 8$. A $k = 6, 7$ esetén viszont nem tudjuk, mi az igazság, lásd [2, 16, 28].

Általában sincs ez másképpen, sok kérdésre van jó válaszunk, még többre viszont nincs. A pozíciós játékoknak számtalan meglepő kapcsolata van a matematika egymástól távoleső területeivel; ezért is olyan nehezek és egyben vonzók a problémái. Ezekre láthatunk újabb példákat a továbbiakban.

2 Topológia

Kezdjük a hex játékkal; ezt Piet Hein 1942-ben, lásd [34] és John Nash 1948-ban találta ki egymásról nem tudva. Egy hatszögekből álló, rombusz alakú $n \times n$-es táblára felváltva helyezhet I fehér és II fekete korongokat. I célja egy összefüggő fehér út létrehozása az északnyugati és délkeleti, II-é pedig egy fekete úté az északkeleti és délnyugati oldalak között. A hex —ellentétben jónéhány csak matematikai szempontból érdekes játékkal— izgalmas, addiktív játék. Feladványokat közölnek, versenyeket rendeznek belőle; ilyenkor az $n = 10$ vagy $n = 11$ a tábla méret. (A legjobb eredményt Kohei Noshita érte el, $n \leq 8$-ra ismert a nyerő stratégia, lásd [41].)

[4] Ha egyik fél sem nyer véges lépésben, akkor döntetlennek tekintjük a játékot.
[5] A módszert először John Nash alkalmazta a hex játék vizsgálatára, lásd [16, 26].
[6] A stratégia egy f függvény, amely a tábla egy állapotához a teendő lépést rendeli.



1. ábra. Az 5×5-ös hex tábla

Az első definíciónk értelmében a hex *nem* hipergráf játék, hiszen a nyerő halmazok *nem egyformák* a két játékosra. Érdemes tehát a $(V, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *aszimmetrikus* hipergráf játékot bevezetni, ahol értelemszerűen az I illetve II akkor nyer, ha a $\mathcal{H}_1$ illetve a $\mathcal{H}_2$ egy elemét hamarabb elfoglalja, ahol $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset 2^V$.

Nyilvánvalónak tűnik, hogy csak az egyik játékos nyerhet a hexben. Ez így is van, de ekvivalens a szintén egyszerűnek tűnő *Jordan-féle görbetétellel*[7]. Szintén előkelő rokonsága van a topológiában az alábbi, ún. *hex tételnek*:

3. Tétel (Nash-Gale). *Ha a hex tábla összes mezőjét kiszínezzük fehérrel vagy feketével, akkor vagy lesz fehér északnyugati-délkeleti, vagy fekete északkelet-délnyugati út.*

Azaz döntetlen még akkor sem lehetséges, ha a két játékos erre törekedne. Kombinálva ezt az eredményt a 2. tétel ötletével (és felhasználva, hogy a $\mathcal{H}_1$ képe egy megfelelő tengelyes tükrözésnél éppen a $\mathcal{H}_2$) kapjuk, hogy:

4. Tétel (John Nash, 1949). *A kezdő játékos nyer a hexben.*[8]

Visszatérve a topológiai kapcsolatokra, 1979-ben igazolta David Gale, hogy a hex tétel és a *Brouwer-féle fixpont tétel* ekvivalensek, lásd [26]. Vele egyidőben, tőle függetlenül Lovász László az ún. *Sperner lemmából* vezette le a hex tételt klasszikus könyvében, [40]. Ehhez hasonló módon bizonyították Hochberg és társai [35], hogy a Sperner lemmából következik az ún. *konnektor tétel*. Később Chris Hartman foglalta össze egy nagyon gazdaságos ciklikus bizonyításban a következő eredményeket, lásd [33]. Az egyszerűség kedvéért a 2-dimenziós eseteket mondjuk ki, az n-dimenziós eset a fenti cikkben elérhető.

Legyen T az ABC háromszög egy háromszögezése, melynek a pontjai az alábbi módon színezettek: (i) Az A, B és C pontok színei rendre 1, 2 és 3. (ii) Az ABC háromszög oldalain fekvő pontok az oldal egyik végpontjának a színét kapják.

Sperner lemma. T-ben van olyan háromszög, amelynek csúcsai három különböző színt kaptak.

---

[7]Egy egyszerű, zárt görbe a síkot két —egy külső és egy belső— összefüggő részre osztja.

[8]A tétel a pozíciós játékok talán legismertebb eredménye. Ugyanakkor egy tisztán egzisztencia bizonyítás, amelyben a létezésén kívül semmit sem tudunk meg a nyerő stratégiáról. Nagyon nehéz, ún. PSPACE-teljes probléma megmondani, hogy *melyik* fél nyer, ha adott az $n \times n$-es hex tábla egy részleges kitöltése, [48].

Legyen G egy, a külső oldalát kivéve, háromszög lapokból álló síkgráf. Rögzítsük a külső oldalon az x, y, z pontokat ebben a körüljárási irányban. Az $[x, y]$ *intervallum* az x-t, y-t és a köztük lévő pontokat jelenti. (Az $[y, z]$ és $[z, x]$ analóg módon.) G pontjainak egy C részhalmaza *konnektor*, ha a C által feszített részgráf összefüggő, és tartalmaz pontot az $[x, y]$, $[y, z]$ és $[z, x]$ intervallumok mindegyikéből.

Konnektor tétel. Ha két színnel színezzünk a fenti módon definiált G pontjait, akkor abban lesz egy C egyszínű konnektor.[9]

Legyen $e_1 = (1, 0)$ és $e_2 = (0, 1)$ a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységvektorok, és az $a, b \in \mathbb{Z}^2$, melyre $a_i \leq b_i$ $i = 1, 2$-re. A $D(a, b)$ *doboz* pedig a következő pontok halmaza: $D(a, b) := \{(x_1, x_2) : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ és } x_i \text{ egész } i = 1, 2\}$. D két pontja *szomszédos*, ha mindkét koordinátájuk legfeljebb egy egységgel tér el.

Pouzet lemma. Ha egy $f : D(a, b) \mapsto \{\pm e_1, \pm e_2\}$ függvényre minden $x \in D(a, b)$-re teljesül az $x + f(x) \in D$, akkor vannak olyan szomszédos x és y pontok, hogy $f(x) = -f(y)$.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a hex tábla felfogható, mint az előbbi D. Ebben $x, y \in D$ akkor szomszédosak, ha $x - y$ vagy $y - x$ eleme $\{0, 1\}^2$-nak, és az egyik játékosnak a D doboz alsó és felső, a másiknak a jobb és bal oldalát kell összekötni. Hasonlóan történhet d-dimenziós hex tábla megadása is.

Brouwer-féle fixpont tétel. Ha egy f folytonos függvény az R^2 egységgömbjét önmagába viszi, akkor van olyan x, melyre $f(x) = x$.

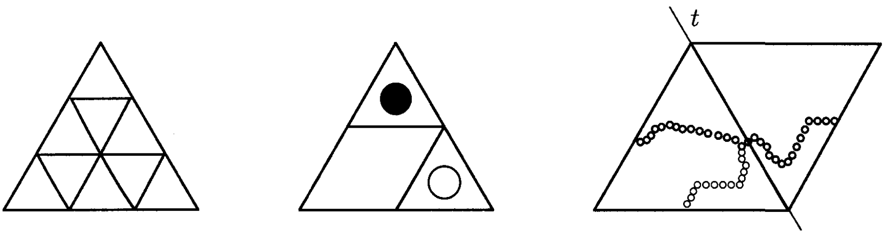
Cris Hartman az alábbi utat adja a [33]-ban: Sperner lemma $\Rightarrow$ konnektor tétel $\Rightarrow$ hex tétel $\Rightarrow$ Pouzet lemma $\Rightarrow$ Brouwer-féle fixpont tétel[10] $\Rightarrow$ Sperner lemma.

A konnektor tételt (és az y-játékot) a hex tétel (hex játék) általános formájának tartják, bár mint látható, ekvivalensek. Az egymásból levezethetőség igazából mindkét irányban *könnyű*, amely az alábbi ábrán látható.

A baloldal a 4-es y-játék; vegyük észre, hogy a szomszédság a gráfon olyan, mint a hexben a mezők között. A középső ábrán egy kitöltött hex táblát kiegészítettünk egy csupa fehér ill. fekete pontot tartalmazó háromszöggel, amely egy lejátszott y-játékra vezet.

[9]Craige Schensted és Charles Titus, illetve Claude Shannon már 1952-ben bevezette az ún. *y-játékot*. Ennek a táblája a szabályos háromszög rács szintén szabályos háromszög alakú darabja és a cél egy konnektor megszerzése, ahol a háromszög csúcsai a rögzített pontok. A konnektor tétel miatt az y-játék nem lehet döntetlen, így azt a 2. tétel miatt a kezdő nyeri.

[10]Természetesen a véges módszerek csak ϵ-approximációt adhatnak. Azaz adott $\epsilon > 0$-ra olyan x létezését, amelyre $\|f(x) - x\|_2 < \epsilon$. A fixponthoz még a szokásos kompaktsági érvelés szükséges.



2. ábra. A 4×4-es y-játék tábla, a kiegészített hex tábla és a t-re tükrözött y-játék

A konnektor tétel miatt van egy egyszínű konnektor, de ez egy egyszínű nyerő halmazt jelent az eredeti hex táblán. Végül a jobb oldali ábrán egy lejátszott y-játék tábláját tükrözzük a t-tengelyre, a szélső sort félbevágva. Ezzel egy (szimmetrikusan) kitöltött hex táblát kapunk. A hex tétel miatt létező nyerő halmaznak az eredeti táblából kilógó részeit ,,visszatükrözve" egy egyszínű konnektort kapunk.

Sávszélesség. Hochberg és társai a [35]-ben a konnektor tétel felhasználásával a T_n, az n oldalélű háromszögrács (y-játék tábla) *sávszélességére* adtak alsó korlátot.[11] A sávszélesség meghatározása már speciális gráfokra is nehéz feladat; valójában már 3 maximális fokszámú fákra is NP-teljes, [29]. Meglepő tehát, hogy egy nem triviális esetben a játékok segítenek ebben.

Fordított játékok. A hex tétel felveti az ún. *fordított játék*, (a [16]-ban *misère game*) lehetőségét. Általában egy fordított játékban az nyer, aki az eredetiben veszítene. A fordított hex sem lehet döntetlen, a stratégia lopás egy kifinomult változatával mutatható meg az alábbi tétel a [38]-ból:

Misère hex tétel. A kezdő nyer a fordított $n \times n$-es hexben, ha n páros, különben a második nyer. Továbbá a vesztes félnek van olyan stratégiája, amellyel nem veszít a tábla összes mezejének elfoglalása előtt.

Vegyük észre, hogy az állítás második feléből következik az első; ezen alapszik az említett stratégia. Megmutatható, hogy gondolatmenet alkalmazható a fordított y-játékra is, ott a tábla pontszámának, $|V(T_n)|$, paritásán múlik a nyerés, páros méretre I, páratlanra II nyer. Hasonlóan definiálhatjuk a fordított hipergráf játékokat, amelyek, ha lehet, még nehezebbek, mint a normál változat, hiszen a 2. tétel sem használható rájuk.[12]

3 Párosítások és matroidok

Nagyon hatékony eszköz a játékelméletben a párosítás. Egy klasszikus feladatban I és II egyforma érméket helyez egy köralakú asztalra. Az átfedés

[11]Legyen $G = (V(G), (G))$ egy egyszerű gráf. Az η *cimkézés* $V(G)$ bijekciója $\{1, \ldots, |V(G)|\}$-be. Az η *sávszélessége* $B(\eta, G) = \max\{|\eta(u) - \eta(v)| : uv \in (G)\}$. A G gráf *sávszélessége* $B(G) := \min_\eta\{B(\eta, G)\}$. $B(T_n) = n + 1$, míg például az $n \times n$-es négyzetrácsra, a $P_n \times P_n$-re $B(P_n \times P_n) = n$.

[12]Ebben a sokkal általánosabb *kombinatorikus játékokra* hasonlítanak, bővebben [16, 19].

nem megengedett, és az veszít, aki nem tud lépni. A kezdő könnyen nyer a középpontba téve, majd az ellenfél lépéseit erre tükrözve. (Persze ha az asztal nem középpontosan szimmetrikus, alig tudunk valamit.) Egy tengelyes tükrözéssel nyerhető a $n \times (n+1)$-es hex is a közelebbi oldalakat összekötni kívánó félnek, [16, 27].

A hipergráf játékok párosítási stratégiái a [31]-ből származnak. Alfred Hales és Robert Jewett vezette be a $HJ(n,d)$-vel jelölt játékokat, ahol n és d természetes számok. A $HJ(n,d)$ táblája egy d dimenziós kocka, amelyik n^d kisebb kockából van összerakva úgy, hogy a nagy kocka minden éle mentén n kis kocka fekszik. Formálisan a hipergráf alaphalmaza a d hosszú sorozatok, ahol minden koordináta egy 1 és n között lévő egész szám, azaz $V(HJ(n,d)) = \{1,\dots,n\}^d$. A hipergráf élei azon n elemű részhalmazok, melyeknek elemei sorba rendezhetők oly módon, hogy egy rögzített koordinátában az $1,2,\dots,n$, az $n,n-1,\dots,1$ vagy konstans értéket vesznek fel a sorozatok. Persze a $HJ(3,2)$ nem más, mint a tic-tac-toe, a $HJ(4,3)$ pedig a tic-toc-tac-toe.

Definíció. Egy $\chi : V \mapsto \{1,\dots,k\}$ az $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ hipergráf *jó színezése*, ha minden $A \in \mathcal{H}$ halmaz képe legalább kételemű. A minimális k, amelyre van jó színezés, $\mathcal{F}$ *kromatikus száma*, jele $\chi(\mathcal{F})$.

Ha egy $\mathcal{F}$ hipergráfra a $\chi(\mathcal{F}) > 2$, akkor a rajta értelmezett ott játék nem végződhet döntetlenül. Az y-játék mellett például a $HJ(3,3)$ is ilyen. Másrészt a $HJ(4,3)$ példa arra, hogy I-nek lehet nyerő stratégiája egy $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ játékban akkor is, ha $\chi(\mathcal{F}) = 2$.

Hales–Jewett tétel. Bármely n természetes számra létezik olyan $d > 0$ egész, hogy a $HJ(n,d)$ játék hipergráfjának kromatikus száma nagyobb, mint kettő.

Így az a kérdés, milyen n és d mellett érhet el döntetlent II? Ennek kimondásához szükség van az ún. Kőnig-Hall tételre, lásd [40].

Adott véges halmazoknak egy $\{A_i\}_{i=1}^m$ véges rendszere. Egy $S = \{s_i\}_{i=1}^m \subseteq \cup_{i=1}^m A_i$ *diszjunkt reprezentáns rendszer*, ha $s_i \neq s_j$, $i \neq j$-re és $s_i \in A_i$ az $i = 1,...,m$ esetén.

5. Tétel (Kőnig D.-Ph. Hall). *A véges halmazokból álló $\{A_i\}_{i=1}^m$ halmazrendszernek pontosan akkor létezik diszjunkt reprezentáns rendszere, ha minden $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ esetén $|\cup_{i\in I} A_i| \geq |I|$.*[13]

6. Tétel (Hales–Jewett). *Ha egy véges $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ hipergráf játékban minden $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ esetén $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$, akkor a játék döntetlen.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H} = \{A_1,\dots,A_m\}$, legyen $\mathcal{H}^* = \{A_1, A_1^*, A_2, A_2^*, \dots, A_m, A_m^*\}$, ahol $A_i = A_i^*$ minden $i = 1,\dots,m$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$ feltételből következik, hogy minden $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{H}^*$ választásra $|\cup_{A\in\mathcal{G}^*} A| \geq |\mathcal{G}^*|$, azaz a $\mathcal{H}^*$ rendszerre alkalmazható az 5. tétel. Legyen a

[13] Kőnig Dénes a tételt páros gráfokra vonatkozó alakban mondta ki. *Marshall Hall Jr.* 1949-ben belátta olyan végtelen halmazrendszerekre, amelyekben minden pont fokszáma véges, [32].

diszjunkt reprezentáns rendszer $S = \{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, \ldots, a_m, a_m^*\}$. II kövesse az alábbi stratégiát: Valahányszor I választ egy elemet S-ből (a_i-t vagy a_i^*-ot), akkor II válassza a megegyező indexűt (a_i^*-ot vagy a_i-t), különben tetszőlegesen léphet. I nem szerezheti meg A_i összes elemét egyetlen $i = 1, \ldots, m$-re sem, mert az $a_i, a_i^* \in A_i$ közül legalább az egyiket II szerzi meg. $\square$

Vegyük észre, hogy a $HJ(n,d)$ hipergráfban minden pont legfeljebb $\frac{1}{2}(3^d - 1)$ nyerő halmaznak eleme, ha n páratlan. Páros n-re ez a szám $2^d - 1$. Így a 6. tételt alkalmazva egyből kapjuk:

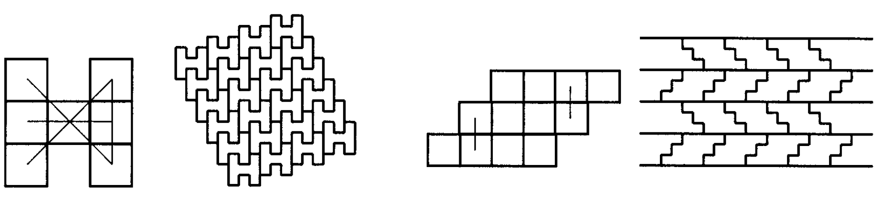
7. Tétel (Hales–Jewett, 1963). *A $HJ(n,d)$ döntetlen, ha $n \geq 3^d - 1$ és $n = 2l + 1$, vagy ha $n \geq 2^{d+1} - 2$ és $n = 2l$.*

Párosítási stratégiával ennél sokkal jobb korlát nem adható, más módszerrel viszont, ahogy azt látni fogjuk, igen. A fordított játék a paritástól (is) függ, I (II) nem veszít a fordított $HJ(n,d)$-ben, ha d páratlan (páros).[14]

A 6. tételt (Marshall Hall Jr. javításával) alkalmazhatjuk a végtelen táblán játszott k-amőbára. Ez $k \geq 15$ esetén döntetlent ad. Ha d-dimenziós táblán játszunk, akkor ez a korlát $k \geq 2(3^d - 1) - 1$, [44]. Hales és Jewett megadott egy párosítást, amely $k \geq 9$-re döntetlent ad, de ez nem a 6. tételen alapul, [16].

Segédjátékok. Egy párosítás nem más, mint a tábla szétvágása kisebb, könnyebben áttekinthető részekre. A résztáblákon a játékos egymástól független új, segédjátékokat játszik, amelyek együttesen a céljához segítik.

Ennek egyik első példája Shannon és Pollak ötlete, amellyel a 9-amőbára adtak döntetlen stratégiát. Ezt megjavította egy, a T. G. L. Zetters álnéven[15] színre lépő holland matematikus csoport, belátván, hogy már a 8-amőba is döntetlen, [16, 30].



3. ábra. A Shannon-Pollak parkettázás és a T. G. L. Zetters parkettázás

[14] A $\{1, \ldots, n\}^d$ kocka középpontjára szimmetrikus lépésekkel ez elérhető. Ha n páratlan, I elfoglalhatja a centrumot, különben II játszhat középpontos tükrözéssel.

[15] Az álnév régi fogás a matematikában, amikor úgy véli egy szerző, hogy támadásoknak lehet céltáblája a munkája miatt, pl. *Student, Blanche Descartes, Bourbaki, Alon Nilli* stb. A 7-amőba kimenetele máig nyitott, a megoldója bátran vállalhatná. (Ilyen a 6-amőba és a $HJ(5,3)$ is.)

II, ha lehetséges, azon a résztáblán/parkettán lép, mint I. A Shannon-Pollak parketta nyerő halmazait a vékony vonal jelöli; ez négy darab, három elemű halmaz. A T. G. L. Zetters parketta nyerőhalmazai a parketta három sora, négy 45 fokos átlója és a két, vékony vonallal jelölt pár. Egy kis munkával ellenőrizhető, hogy (i) a segédjátékokban nem veszít II, (ii) ha I nem nyer legalább egy segédjátékban, akkor nem nyerheti meg a 9- illetve 8-amőbát sem.

Valójában a fentiekben erősebb állításokat igazoltunk, mint amiket kimondtunk. A kezdő játékos akkor sem tud nyerő halmazt megszerezni, ha a másodiknak nincs lehetősége ellentámadni. Azaz hiába szerez meg II egy nyerő halmazt, a játék folyik tovább. Ez a pozíciós játékok ún. *építő-romboló* (Maker-Breaker) változata, ahol az építő akkor nyer, ha megszerez egy nyerő halmazt, míg a romboló akkor, ha ezt megakadályozza.[16] Ha II rombolóként nyer ebben az építő-romboló változatban, akkor döntetlene van az eredetiben is. Fordítva ez nem igaz, a tic-tac-toe-t a kezdő építőként megnyeri. Definiálható egy építő-romboló játék megfordítása is, nevezzük ezt *sumák-hajcsár* (Avoider-Enforcer) játéknak. Ebben a sumák nyer, ha elkerüli nyerő halmaz megszerzését, a hajcsár pedig akkor, ha rá tudja kényszeríteni ellenfélet egy nyerő halmaz elfoglalására.

A párosítások és a tábla egyéb felosztása hatékony módszer önmagában, vagy más eszközökkel kombinálva. További példák találhatóak erre a [8, 12, 14, 22, 45, 46, 49] számú írásokban.

Sávszélesség játék. Legyen egy n pontú G gráf sávszélessége $B(G)$, és a felek felváltva helyezzék G pontjaira a $\{1,\ldots,n\}$ számokat. Aki egy x pontot q-val számoz, úgy, hogy egy x-szel szomszédos pont y pont már számozott r-rel és $|q-r| \geq B(G)$, az veszít. Középpontos tükrözéssel a táblára és $\{1,\ldots,n\}$-re látható, hogy a $P_k \times P_k$ rácsra a kezdő pontosan akkor nyer, ha $k > 1$ és páratlan. Más gráfokra, mint pl. a T_k nem ismert, hogyan kell játszani, vagy az, hogy ki nyer.[17]

Shannon-féle kapcsoló játék. Ez a játék a hex, az y-játék és a David Gale által kigondolt *Brigit* mintájára készült, [16]. Ezekben az összekötős játékokban pontosan az egyik fél nyer, kézenfekvő hát, hogy építő-romboló formában beszéljünk róluk. Ha adott egy G gráf, akkor egy-egy élt[18] választva fordulónként az építő G egy *feszítőfáját* akarja megszerezni, míg a romboló célja az, hogy az építő éleiből álló részgráf ne legyen összefüggő.

8. Tétel (Alfred Lehman, 1964, [39]). *Tegyük fel, hogy a romboló kezdi a Shannon-féle kapcsoló játékot. Egy adott n-pontú G gráfra építő pontosan akkor nyer, ha G-ben van két diszjunkt feszítőfa, F_1 és F_2.*

---

[16] A nyerés eldöntése mind a normál, mind az építő-romboló változatban PSPACE-teljes feladat, ennek egyszerű bizonyítása található a [17] dolgozatban.

[17] Számos kombinatorikai tétel lehet efféle *elkerülhetetlenségi* játék alapja. A felsoroltak mellett a Ramsey, a van der Waerden és a Hales-Jewett tételek játék hátterét kutatták nagy erőkkel, [4, 11].

[18] A hex és az y-játék szintén alapozható egy-egy gráfra, de ott nem az éleket, hanem a pontokat szerzik meg a játékosok. Ez a látszólag kis eltérés egy teljesen más világba visz; itt képesek vagyunk a nyerő stratégiák leírására.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: A játék i-edik menetében F_1^i és F_2^i fákról beszélünk majd a G_i gráfban. ($G_1 = G$, $F_1^1 = F_1$ és $F_2^1 = F_2$.) Ha a romboló az i-edik lépésben nem az $E(F_1^i) \cup E(F_2^i)$-ből választ, akkor az építő bármit léphet. Ha mondjuk F_1^i-ből vesz egy e_i élt romboló, akkor az $E(F_1^i) \setminus \{e_i\}$ élek által feszített részgráf pontosan két, C_1^i és C_2^i, komponensből áll. Az építő ekkor egy olyan $f_i \in F_2^i$ élt választ, mely a C_1^i-t összeköti C_2^i-vel. (A fák alapvető tulajdonságai a [40]-ből felidézhetők.) Mivel az f_i él két végpontja, x_i és y_i többé nem szakad el egymástól, *húzzuk össze* az f_i élt.[19] Könnyen látható, ha F_1^i és F_2^i diszjunkt feszítőfái a G_i-nek, akkor az $F_1^{i+1} = F_1^i/f_i$ és $F_2^{i+1} = F_2^i/f_i$ szintén diszjunkt feszítőfák G_{i+1}-ben. Továbbá $|V(G_i)|-1 = |V(G_{i+1})|$, ezért $|V(G_{n-1})| = 1$, és az $\{f_1, \ldots f_{n-1}\}$ élek G egy feszítőfáját alkotják.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy az építő nyer és lopja el ezt a stratégiát a romboló. A játék végére a romboló megszerzi az F_r, az építő pedig az F_m feszítőfa éleit, amelyek G-ben vannak és diszjunktak. $\square$

Megjegyzés. A fenti érvelést eredetileg nem gráfokra, hanem *matroidokra* adták. A matroidoknak sok egyenértékű jellemzése van, nekünk most a *bázis* fogalma a legkényelmesebb. A véges V halmaz feletti $\mathcal{B}$ halmazrendszert egy *matroid bázisainak* nevezzük, ha

1. $\mathcal{B}$ nem-üres,

2. $\forall\, A, B \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in A \setminus B$ esetén $\exists\, y \in B \setminus A$, hogy $\{A \setminus \{x\}\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Ezzel a 8. tétel általánosabb formában így szól: Ha az építő-romboló $(V, \mathcal{B})$ pozíciós játékban a romboló kezd, akkor az építő pontosan akkor nyer, ha léteznek $A, B \in \mathcal{B}$ halmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Az élek törlése és kontrakciója természetes matroid műveletek, a 2. axióma mintha a fenti bizonyításra lenne szabva.[20] A 8. tétel olyan helyzetekben is működik, amikor párosítási stratégia biztosan nem létezik. Vegyük a teljes gráfot az $\{x, y, v, w\}$ pontokon, és a q, z pontokat úgy, hogy q szomszédos x-szel és y-nal, z pedig v-vel és w-vel.

4 A véletlen módszer és a súlyfüggvények

A véletlen módszerek a matematika legtöbb ágában jelentős szerepet játszanak, a kombinatorikában és a játékelméletben pedig alapvetőt. Az inkább a meglepő, hogy viszonylag későn jelentek meg a pozíciós játékokban. Az áttörést Erdős Pál és John Selfridge 1973-as eredménye, [24], hozta.[21]

[19] Az új gráfban, G_{i+1}-ben x_i és y_i helyett egy új, z_i pontot veszünk fel, melyet x_i és y_i összes szomszédjával kötünk össze, jelben $G_{i+1} = G_i/f_i$.

[20] A látszat csal, hiszen a matroidokat már Hassler Whitney [53] vizsgálta az 1930-as években. Lehman tétele jelentősen növelte a matroidok elfogadottságát. Ezt megelőzően pl. William Tutte néhány matroidokra vonatkozó klasszikus eredményét inkább gráfokra mondta ki, [36]. Azóta viszont a matroidok a kombinatorika, a kombinatorikus optimalizálás és a véges geometria fontos részévé váltak.

[21] John H. Conway híres békás problémája is *lehetett volna* volna a kezdet, [16]. Az ott használt súlyfüggvénynek viszont nincs közvetlen valószínűségi jelentése, talán emiatt maradt visszhangtalan.

9. Tétel (Erdős-Selfridge, 1973). *Tegyük fel, hogy egy* $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ *hipergráf játék építő-romboló változatában az építő kezd, és* $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. *Ekkor a romboló nyer.*

Bizonyítás. Legyen az építő i-edik lépése x_i, míg a rombolóé y_i, $X_i = \{x_1, \dots, x_i\}$, $Y_i = \{y_1, \dots, y_i\}$ és $A_i(I) = |A \cap X_i|$, illetve $A_i(II) = |A \cap Y_{i-1}|$. Egy $A \in \mathcal{H}$ halmaz *súlya* az i-edik lépésben:

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)} & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Egy $x \in V$ *elem súlya* $w_i(x) = \sum_{x\in A} w_i(A)$, a *potenciál* pedig $w_i = \sum_{A\in\mathcal{H}} w_i(A)$.

A romboló az ún. *mohó algoritmust* követi, azt a $z \in V \setminus (X_i \cup Y_{i-1})$ elemet veszi az i-edik lépésben, amelyre a $w_i(z)$ érték maximális. Ez a $w_i \geq w_{i+1}$ egyenlőtlenséget adja minden i-re. Valóban, $w_{i+1} \leq w_i - w_i(y_i) + w_i(x_{i+1})$, hisz a romboló i-edik lépése $w_i(y_i)$-vel csökkenti, míg az építő az $i+1$-edik lépése legfeljebb $w_i(x_{i+1})$-el növelheti a potenciált, hisz pontosan azoknak az x_{i+1}-et tartalmazó halmazok súlyát duplázza meg, amelyeknek nem eleme y_i. A mohó algoritmus miatt $w_i(y_i) \geq w_i(x_{i+1})$, így adódik a potenciál monotonitása. Másrészt $w_1 \leq 2w_0$ mivel x_1 azon halmazok súlyát duplázza, amelyeknek eleme.

Ezért a 9. tétel feltétele miatt $w_1 \leq 2w_0 = \sum_{A\in E(\mathcal{H})} 2^{-|A|+1} < 1$. Tegyük fel, hogy az építő megnyeri a játékot, mondjuk a k-adik lépésben. Ez azt jelenti, hogy van olyan $A^* \in \mathcal{H}$, amelyre $|A^*| = A^*_k(I)$, így

$$1 > w_1 \geq w_k = \sum_{A\in E(\mathcal{H})} w_k(A) \geq w_k(A^*) = 2^{-|A^*|+A^*_k(I)} = 2^0 = 1.$$

Azaz a feltevésünk, hogy az építő nyer, ellentmondásra vezet. □

Vegyük észre, hogy amíg a 6. tétel csak a *ritka*, de tetszőleges méretű, addig a 9. tétel a *sűrű*, de legfeljebb exponenciális méretű hipergráfokra adhat eredményt. A módszerek részben összevegyíthetőek, lásd [8, 11, 12].

A 9. tétel vezet a *hatékony derandomizációkhoz* és a játékok mélyebb megértéséhez. Ez konkrétan éppen Erdős egy régi tételének bizonyításából tünteti el a véletlent, mely szerint ha $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$ egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra, akkor $\chi(\mathcal{F}) \leq 2$. Vegyük észre, ha V pontjait egymástól függetlenül, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel színezzük kékre vagy pirosra[22], akkor az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} = \sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1}$. Mivel $\mathbb{E} < 1$, lennie kell egy jó színezésnek, [1]. Ezért az összes $2^{|V|}$ darab kettő színezésből legalább egy jó.

Az $\mathcal{F}$ paramétereiben polinom időben is adhatunk egy jó színezést: játsszon mindkét játékos úgy, mintha romboló lenne. A $w_i(A)$ súly annak a feltételes valószínűsége, hogy A például kék lesz, ha az i-edik lépéstől pénzfeldobással

[22] Ez egy érme ismételt feldobásával elérhető. A példa mutatja, mekkora ereje van a véletlennek.

színezünk. A játékok vizsgálatához is kapunk egy vezérfonalat, amely sokszor segít.

A véletlen heurisztika. Cseréljük ki a két tökéletesen játszó játékost két teljesen véletlenül játszóra. Nagyjából ugyanaz lesz a végeredmény.[23]

A valószínűségszámítási módszer és a pozíciós játékok elmélete közt szoros kapcsolat van. Lényegében minden módszernek az elsőből megvan a megfelelője a másodikból. 9. tétel, és főképpen a bizonyítási módszere, az ún. *első momentum módszer* derandomizálása. Így származtatható a (játékelméleti) második momentum módszer, Lovász lokális lemma stb, [1, 9, 12].

A 9. tétel éles, vannak olyan $\mathcal{F}$ hipergráfok, melyre $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} = 1$, és az építő nyer. Legyen T_n egy n-szintes bináris fa, $V = V(T_n)$ és $A \in \mathcal{H}$, ha A a gyökér és egy levél közti út pontjaiból áll. (Az építő a gyökeret foglalja el, majd maradékból mindig annak a részfának a gyökerét, amelyiket elkerülte a romboló.) Egy másik példa: $V = \cup_{i=1}^{n-1}\{x_i, y_i\} \cup z$, $A \in \mathcal{H}$ ha $z \in A$ ś $|A \cap \{x_i, y_i\}| > 0$ minden i-re. (Itt az építő z-t veszi először, majd ha a romboló egy $\{x_i, y_i\}$ pár egyik elemét választja, akkor ő a másikat.)

Beck József a [12]-ben vizsgálta a *kérdező-választó* (Picker-Chooser) és *választó-kérdező* (Chooser-Picker) játékokat. Itt a kérdező (Picker) kivesz két elemet, legyenek ezek $\{x_i, y_i\}$ az i-edik fordulóban, majd a választó (Chooser) dönthet, az egyiket a saját, a másikat a kérdező színére festi. Az első helyen álló játékos az építő, míg a másik a romboló szerepet kapja. A tapasztalat szerint a kérdező helyzete nem rosszabb, mintha egy építő-romboló játékot kellene játszania. Ezt a heurisztikát fejti ki Beck a [10]-ben, pontosabb formáját pedig szerzőtársaimmal a [21] dolgozatban adjuk meg:

10. Sejtés (Beck). *A kérdező nyeri a kérdező-választó (választó-kérdező) játékot az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfon, ha építő (romboló), mint második játékos nyeri az építő-romboló játékot az $\mathcal{F}$ hipergráfon.*

Egyelőre csak néhány játékra[24] bizonyított a 10. sejtés, lásd [10, 21], az általános eset nem igérkezik könnyűnek. Jóval korábban, lásd [13], felvetette Beck József a kérdező-választó játékhoz hasonló, az ún. megbízó-festő játékot. Ebben a megbízó a kérdező, a festő pedig a választó. A megbízó nyer, ha lesz egyszínű halmaz, különben a monotóniát kerülő festő a nyerő. A [13] tartalmazza a 9. tételt megbízó-festő játékokra; a bizonyítás a szokásos súlyfüggvény módszer.

Az érdekesség kedvéért most bemutatunk egy véletlen módszert használó gondolatmenetet; hasonlót Joel Spencer használt a *véglegesítés játék* (tenured game) elemzésben, [1, 50].

[23] Természetesen a véletlen heurisztika csak elv, sokszor érvényes, néha nem. De bármely játék esetén célszerű megnézni, hogy mit *jósol*. Véletlenül játszani viszont csak ritkán érdemes, lásd [15].

[24] Ilyenek a később említett *Ramsey játékok*. Továbbá még a 8. tétel, a 8-amőba és a $HJ(4,2)$ választó-kérdező változata. A 9. tétel választó-kérdező változatát egyelőre nem sikerült teljes erejében igazolni, bár ez a 10. sejtés egyik legérdekesebb speciális esete.

A 9. tétel megbízó-festő játékokra. *A festő nyer, ha*

$$\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1\ .$$

Bizonyítás. Színezze a festő a kapott elemeket pénzfeldobással. Nézzük meg, milyen valószínűséggel lesz egyszínű egy $A \in E(\mathcal{H})$ halmaz. Ha egy $\{x_i, y_i\} \subset A$, akkor nem lehet egyszínű A. Ha $|\{x_i, y_i\} \cap A| \leq 1$ minden i-re, akkor ez a valószínűség $2^{-|A|+1}$.

Ezért az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} \leq \sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$ a megbízó *bármely* stratégiája esetén. Ha a megbízónak lenne nyerő stratégiája, akkor minden játék végén lenne egyszínű halmaz, azaz $\mathbb{E} \geq 1$. Mivel a játék nem lehet döntetlen, így az 1. tétel miatt a festőnek van nyerő stratégiája. □

Elfogult játékok. Sűrű gráfokra is érdekessé tehető a Shannon-féle kapcsoló játék, ha a romboló nem egy, hanem több, mondjuk b élt vehet el egyszerre, [18]. Ha a K_n-n (n-pontú teljes gráf) játszunk, van egy b_0 *töréspont*, azzal, ha $b < b_0$, akkor az építő, ha $b > b_0$ akkor meg a romboló nyer.[25] A fenti példában $b_0 \approx n/\log n$, vagyis az építő élei akkor kötik össze a pontokat, ha ennél jóval kisebb a b, és akkor nem, ha $b >> b_0$. Az építő által megszerezhető részgráf más $\mathcal{P}$ tulajdonságai is érdekesek: Hamilton kör vagy hosszú utak léte, [7, 9, 51], a legnagyobb komponens mérete, [15], az átmérő, [3] vagy a minimális fokszám, [9, 52].

Az egyik legfontosabb eszköz a 9. tétel általánosítása, Beck József, [5]. A $(V, \mathcal{H}, a, b)$ hipergráf játék szabályaiban megegyezik a $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ játékkal, csak az egyik fél, (építő-romboló változatban az építő) a, a másik (romboló) pedig b elemet vehet fordulónként.

Erdős-Selfridge-Beck tétel. A $(V, \mathcal{H}, a, b)$ hipergráf játék építő-romboló változatában ha $\sum_{A\in\mathcal{H}} (1+b)^{1-|A|/a} < 1$, akkor a romboló nyer.

Igazolni a korábbi súlyfüggvények kis módosításával lehet. Ez a tétel is éles, azaz a feltételben egyenlőséget írva már nem igaz.

Felmerül, honnan lehet megtippelni, mit várjunk egy-egy gráf játékban, azaz milyen a és b érték mellett érhet el az építő egy $\mathcal{P}$ tulajdonságot? Itt újra a véletlen heurisztika játszik döntő szerepet, a véletlen gráfokra alapozva, [1].

A $G(n, p)$. A $G(n, p)$ valószínűségi mező úgy keletkezik, hogy az n pontú teljes gráf éleit egymástól teljesen függetlenül, p valószínűséggel hagyjuk meg.[26]

A $G(n, p)$-re vonatkozó eredmények jó része arról szól, ha adott egy $\mathcal{P}$ monoton gráftulajdonság,[27] akkor egy $G \in G(n, p)$ milyen $f_{\mathcal{P}}(p)$ valószínűséggel $\mathcal{P}$ tulajdonságú? Ha $\mathcal{P}$ nem triviális, akkor $f_{\mathcal{P}}(0) = 0$, $f_{\mathcal{P}}(1) = 1$, és

[25] A b_0 pontos értékének kiszámítása többnyire reménytelen, általában csak becslések adhatók.

[26] Sok más véletlen gráf modellt is használnak. A *perkoláció elméletben* rácsok éleit veszik p valószínűséggel, az ún. *kis-világ gráfok* leírására egy hatványtörvényt követő fokszám eloszlásúak közül húznak egyet egyenletes eloszlás szerint.

[27] A $\mathcal{P}$ attól monoton, ha egy G rendelkezik vele, akkor új éleket véve G-hez megmarad $\mathcal{P}$. Monoton pl. az összefüggőség, Hamilton kör léte, de nem ilyen Euler köré.

$f_{\mathcal{P}}(p)$ monoton növő p-ben. Sok esetben van egy olyan p_0 *küszöb*, ami körül ugrik fel $f_{\mathcal{P}}$ majdnem nulláról majdnem egyre, [1].

A véletlen gráf heurisztika. A $\mathcal{P}$ monoton gráftulajdonság elérését célzó, a K_n élein folyó építő-romboló játék b_0 töréspontja ott van, ahol a megegyező élsűrűséget adó p_0 küszöb értéke $\mathcal{P}$-nek a $G(n,p)$-ban. Pontosabban, $b_0 \approx a(1-p_0)/p_0$, vagy $p_0 \approx a/(a+b_0)$, [5].

Ez a heurisztika oly eredményes, hogy az a különleges, ha nem ad jó eredményt. Erre példa az átmérő játék, lásd [3]. Itt egy rögzített $d \in I\!N$-re az építő azt szeretné, ha a részgráfjának *átmérője* [28] nem haladná meg d-t. Jelöljük ezt $\mathcal{D}_d(a,b)$-vel, ahol a és b, mint eddig. A véletlen gráf heurisztika szerint az építőnek nyernie kellene az $\mathcal{D}_2(1,1)$ játékot, hisz egy véletlen $G \in G(n,1/2)$ gráfra nagy valószínűséggel $\mathrm{diam}(G) = 2$. Ez nincs így, a romboló nyeri a $\mathcal{D}_2(1,1)$ játékot, ha $n \geq 4$. (A romboló vesz egy xy élt, majd párosítást játszik: az építő egy xz lépésére yz-vel, az yz-re pedig xz-vel felel.) Ugyanakkor, ha az építő két élt vehet lépésenként, akkor majdnem helyreáll a rend; az építő nyeri a $\mathcal{D}_2(2,b)$ játékot, ha $b \leq 0.25n^{1/7}/(\ln n)^{3/7}$ és n elég nagy, lásd [3].

Magukon a véletlen gráfokon is értelmezhetők pozíciós játékok, itt követjük Miloš Stojaković és Szabó Tibor leírását az [51]-ből. Adott egy $(V,\mathcal{H},a,b)$ hipergráf játék. A $(V_p,\mathcal{H}_p,a,b)$ *véletlen játék* olyan játékok valószínűségi mezője, melyekre minden $x \in V$ egymástól függetlenül, p valószínűséggel kerül V_p-be, és az $\mathcal{H}_p = \{W \in \mathcal{H} : W \subset V_p\}$. Ha például $V = (K_n)$ és $\mathcal{H}$ a K_n gráf feszítőfái, akkor feltehető a kérdés, milyen p értékekre nyer az építő (romboló) nagy valószínűséggel a $(V_p,\mathcal{H}_p,a,b)$ véletlen játékban? Mint a véletlen gráf heurisztika alapján ez várható, lesz egy b^p töréspont, továbbá $b^p = \Theta(pn/\log n)$, feltéve hogy $p \geq c\log n/n$, valamely $c > 0$-ra, [51].

Egy pozíciós játékban a *lépés joga* is függhet a véletlentől. Yuval Peres és társai a [43]-ban egy olyan hexet vizsgálnak, ahol minden fordulóban érmedobással döntik el, hogy melyik fél léphet. Többféle alakú tábla definiálható, de a véletlen heurisztika hibátlanul jósol: ugyanakkora valószínűséggel nyer az egyik, mondjuk a fehér, a tökéletesen, mint a véletlenül játszó ellenfelek esetén. Meglepő módon az $n \times n$ véletlen hex bármely állásában az optimális stratégia polinom időben kiszámítható és a választandó mező mindkét félre ugyanaz. A játék szoros kapcsolatban van a hatszögrács perkoláció elméletével, és, határátmenetben, a konform leképzésekkel.

Általában is beszélhetünk egy $(V,\mathcal{H})$ játék véletlen változatáról; erre kiterjeszthető a 9. tétel.

Erdős-Selfridge véletlen játékra. Ha a $(V,\mathcal{H})$ hipergráf játék véletlen változatára $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|} < 1$, akkor azt legalább $1/2$ valószínűséggel nyeri a romboló.

Bizonyítás. Játszon a romboló úgy, mint a 9. tételben. Ekkor $I\!E[w_{i+1}] \leq I\!E[w_i] < 1$ minden i-re, és ebből a Markov egyenlőtlenség adja az állítást. □

[28] egy G gráf átmérője, $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y\in V(G)} d(x,y)$, ahol $d(x,y)$ az x és y pontok közti legrövidebb út hossza.

A második momentum módszer. Egy $G \in G(n, 1/2)$-ben a legnagyobb klikk mérete, $\omega(G)$ a legtöbb n-re nagy valószínűséggel egy k_n értékre koncentrálódik,[29] [1]. Ez a k_n, pontosabban a $q_n = k_n - 2 = 2\log_2 n - 2\log_2\log_2 n + 2\log_2 e - 3$ szám döntő szerepet játszik a *Ramsey játékokban.* Itt a felek a K_n éleit veszik, és a cél (vagy éppen elkerülendő dolog) egy K_q részgráf összes élének megszerzése. Beck József belátta a [10]-ben, hogy q_n a Ramsey játékok töréspontja nagy n-ekre. Pontosabban, ha q_n nincs nagyon közel egy egészhez, akkor $q \le \lfloor q_n \rfloor$-ra lesz egyszínű K_q, míg ha $q \ge \lceil q_n \rceil$, akkor ez elkerülhető.[30] A véletlen heurisztika megint jól működik, hisz a q_n nemcsak az építő-romboló, sumák-hajcsár, de a kérdező-választó játékokra is érvényes. Szintén a derandomizáció az ötlet a fokszám játékban, [3, 9, 52], itt az építő célja a K_n éleiből *minden pontnál* legalább $n/2 - k$ élt megszerezni. Ha $k \ge \sqrt{n \log n}$, akkor az építő, ha $k \le \sqrt{n}/24$, akkor a romboló nyer. Hasonló igaz kérdező-választó, vagy megbízó-festő játékokra; az utóbbi alsó korlátja különösen egyszerű.

A megbízó-festő fokszám játék. Itt a festő akkor nyer, ha az lesz olyan x, melynél a megbízó és festő által vett élek különbsége $\ge k$, ahol k előre adott. Ha $k^2 = \binom{n}{2} = m$, akkor a festő nyer.

Bizonyítás (Beck ötlete alapján, lásd [9]). Az $\mathcal{H}$ a gráf egy-egy pontjára illeszkedő élek halmazai. Egy $A \in \mathcal{H}$-ra jelölje $A_i(F)$ ill. $A_i(M)$ a festő ill. a megbízó által az i-dik forduló végéig elfoglalt elemeinek a számát. Továbbá az A súlya $w_i(A) = A_i(F) - A_i(M)$ és $w_i = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_i^2(A)$. A $w_i^2(A)$ *változása* (ha pont egy élét színezzük) $w_{i+1}^2 = w_i^2(A) \pm 2w_i(A) + 1$, ezért a festő *mindig* elérheti, hogy $w_i + 2 \le w_{i+1}$. A játék végén a $w_{m/2} \ge m$, ezért lesz olyan A^*, melyre $w_{m/2}^2(A^*) \ge m$, vagy $w_{m/2}(A^*) \ge \sqrt{m} = k$. Ekkor viszont az egyik játékosnak k-val több éle van az A^*-nak megfelelő pontnál, mint a másiknak. □

Ritka hipergráfok. Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfban minden $A \in \mathcal{H}$-ra az $|A| \ge n$ és A legfeljebb d másikkal éllel metsződik. Ekkor az ún. Lovász-féle lokális lemmából következik, ha $d \le 2^{n-3}$, akkor $\chi(\mathcal{F}) \le 2$, lásd [1, 23]. Sokáig nem volt azonban világos, hogyan találhatjuk meg gyorsan (polinom időben) az $\mathcal{F}$ egy jó színezését. Kicsivel erősebb feltételek mellett Beck József leírt egy ilyen algoritmust a [8]-ban. Ezek alapján azt várnánk, ha *d nem túl nagy* (például $d \le 2^{n/2}$), akkor az építő-romboló játékot a romboló nyeri a $\mathcal{H}$-n.

Általában ez a kérdés teljesen nyitott, de az ún. *majdnem diszjunkt* hipergráfok esetében többet tudunk. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf majdnem diszjunkt, ha $A \ne B \Rightarrow |A \cap B| \le 1$, minden $A, B \in \mathcal{H}$-ra. Ez teljesül a $HJ(n, d)$ játékokra; ekkor megmutatható, léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy a romboló nyer, ha $d < c_1 n^2 / \log n$, míg az építő nyer, ha $d > c_2 n^2$, lásd [11, 12]. Ha $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ majdnem diszjunkt és $|A| \le 3$ minden $A \in \mathcal{H}$, akkor polinom időben eldönthető az építő-romboló játék, lásd [37].

[29] A koncentráció bizonyításának eszköze a második momentum módszer.
[30] Vegyük észre, hogy ez lényegében teljesen pontos eredmény!

Újrafelhasznált játékok. A malomhoz (Nine Men's Morris) hasonló pozíciós játékok az alábbiak. Adott egy $\mathcal{H}$ hipergráf és egy n paraméter. Az első n lépesben a szokásos módon játszanak a felek, majd utánna a már lerakott (saját) jeleket Lehet áthelyezni. Ha egy építő-romboló $\mathcal{F}$ játékban a rombolónak van nyerő párosítási stratégiája, akkor ez használható az $\mathcal{RF}$ újrafelhasznált változatban is.[31] Nyitott kérdés viszont, hogy általánosítható-e a 9. tétel? Néhány, *Kaplansky típusú* újrafelhasznált játékra vannak nem triviális redmények.

Kaplansky eredeti problémájában az $\mathbb{R}^2$ pontjait vehetik felváltva a játékosok, $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Az nyer, akinek először k pontja egy olyan ℓ egyenesen, amin az ellenfelének nincsen pontja. (Az építő-romboló változatban építő akkor nyer, ha lesz olyan ℓ egyenes, amelyen neki k pontja van, míg a rombolónak egy sem.) A [6]-ban, többek közt szerepel olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok léte, hogy az n lépésig tartó játékot a romboló nyeri, ha $k > c_1 \log n$, és az építő nyeri, ha $k < c_2 \log n$. Az építő nyerése az $\mathbb{R}^2$ egy alkalmasan választott véges S halmazán és az alábbi tételen alapul. Itt

$$\Delta_2(\mathcal{F}) = \max_{x,y \in V} |\{A : x, y \in A \in \mathcal{H}\}| \, .$$

Tétel (Beck, [6]). Az építő kezdőként megnyeri a $(\mathcal{H}, p, q)$ építő-romboló játékot, ha

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \left(\frac{p+q}{p}\right)^{-|A|} \geq p^2 q^2 (p+q)^{-3} \Delta_2(\mathcal{H})|V|.$$

Ha csak a vízszintes, függőleges és ± 1 meredekségű egyeneseken játszunk, és $p = 2$, $q = 1$ akkor vannak olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy az újrafelhasznált Kaplansky játékot a romboló nyeri ha $k > c_1 \log n$, míg az építő nyer, ha $k < c_2 \log n$, lásd [47]. Ugyanitt található, hogy az általános esetben (azaz az $\mathbb{R}^2$ összes egyenesét tekintve) a romboló nyer, ha $k > 2n^{1/3}$.

Az utóbbi eredmény Szemerédi Endre és William Trotter egy klasszikus kombinatorikus geometriai tételén múlik.[32] Egy *illeszkedés* egy (p, L) pár, ahol $p \in \mathbb{R}^2$, L egy egyenes és $p \in L$.

Szemerédi-Trotter tétel. Vegyünk n pontot és m egyenest a síkon, és legyen I az illeszkedések száma. Ekkor $I \leq c(n + m + (nm)^{2/3})$, ahol c egy abszolút konstans.

Így ha m azon egyenesek száma, amelyek mindegyike legalább k pontját tartalmazza egy n-pontú halmaznak, akkor $m \leq c_2 n^2/k^3$, ha $k \leq \sqrt{n}$, ahol c_2 konstans. Ez garantálja, hogy a rombolónak mindig lesz egy olyan pontja, amelynek elmozdítása nem befolyásol egy megfelelő súlyfüggvényt, [47].

Alakzatok a síkon. Szintén a Kaplansky játék motiválta az alábbi típusú problémákat, lásd [14]. Adott egy k pontból álló D alakzat a síkon, és az

---

[31] Az $\mathcal{RF}$-amőbát a romboló nyeri, ha $k \geq 9$. A $k = 8$-ra már nem világos a helyzet.

[32] Ennek egy nagyon szép, a véletlen módszert használó bizonyítását adta Székely László, lásd [1].

építő akkor nyer, ha megszerzi az összes pontját valamely $\phi(D)$-nek, ahol ϕ az $I\!R^2$ mozgáscsoportjának egy eleme.

Tétel (Beck, [14]). Az építő nyeri az alakzat játékot a síkon minden véges D esetén.

Beck ötletes konstrukcióval egyfajta véges rácsot készít a D elforgatott, eltolt példányaiból, majd a fent említett, [6]-beli tételt alkalmazza.[33]

5 Nyitott problémák

Az eddigiekből talán az a kép alakult ki, hogy a hipergráf játékok elmélete nagyjából lezárt, jelentős új eredmények nem várhatók. Áttöréseket természetesen nem tudunk ígérni, de arról szó sincs, hogy ne lenne meg ennek a lehetősége. Tömérdek játékról alig tudunk valamit, illetve a PSPACE-teljesség miatt egészen kicsiny játékok sem oldhatók meg számítógéppel.[34] Néhány megoldatlan kérdéssel köszönünk el az Olvasótól, egy hosszabb listáért lásd [14].

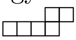
1. Nyer-e a kezdő játékos az 5-amőbában a végtelen táblán?

2. Ki nyeri az építő-romboló 6- illetve 7-amőbát?

3. Játszuk a 6-amőbát a következő formában. Az kezdő játékos egy elemet választhat, azután a játékosok 2-2 elemet vehetnek felváltva. Mi lesz a végeredmény?

4. Megnyerheti a kezdő a $HJ(5,3)$-at? Mi a helyzet az építő-romboló változattal?

5. Hogyan nyer a kezdő a 10×10-es hexben?

6. Egy építő-romboló játékban a végtelen négyzetrácson építő célja az alábbi D minta egy $\phi(D)$ példánya. $D =$  és ϕ egy izometria. Nyerhet az építő?

7. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra $|A| = n$ minden $A \in \mathcal{H}$ és minden $x \in V$-re $|\{A : x \in A\}| \le 2^{n-3}/n$. Ki nyeri az építő-romboló játékot $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$-n?

8. Egy d-reguláris G gráf éleit véve játszik fokszámjátékot építő és romboló. El tud érni építő $d/2 - c\sqrt{d \log d}$ fokszámot minden pontra, ahol $c > 0$, d-től és G-től független konstans? Esetleg $d/3$-at?

[33] A játék *hossza* ezzel a stratégiával óriási már akkor is, ha D egy szabályos ötszög csúcshalmaza.

[34] Az ún. állapotgráf vizsgálatára van szükség; ennek nagyjából $O(N3^N)$ pontja van, ahol $N = |V|$ a $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$-ra. Ez pl. a $HJ(5,3)$-ra $O(3^{125})$ pontú gráfot jelent, azaz reménytelen vállalkozás.

9. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Igaz, hogy ekkor a kérdező nyeri a választó-kérdező játékot $\mathcal{F}$-en?

10. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Igaz, hogy ekkor a romboló nyeri az újrafelhasznált építő-romboló játékot $\mathcal{F}$-en?

11. A K_n élein játszik $(1 : b)$ elfogult játékot építő és romboló. Építő akkor nyer, ha megszerez egy feszítőfát. Mi a legnagyobb $b(n)$ amelyre nyerhet? (Nyerhet, ha $b(n) = (1-\epsilon)n/\log n$, $\epsilon > 0$, $n > n_\epsilon$?)

12. $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ majdnem diszjunkt hipergráfra $|A| \leq 4$ minden $A \in \mathcal{H}$-ra. El lehet dönteni polinom időben, hogy ki nyeri az építő-romboló játékot $\mathcal{F}$-n?

13. PSPACE-teljes probléma eldönteni, hogy ki nyer egy tetszőleges választó-kérdező játékban?

14. Nyerhet a kezdő a Kaplansky játékban, ha $k \geq 4$?

15. Nyerhet a kezdő az alakzat játékban a síkon egymillió lépésnél kevesebbel, ha D a szabályos 17-szög csúcshalmaza?

Irodalom

1. N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Method*, Academic Press, New York, (1992)
2. L. V. Allis, H. J. van den Herik and M. P. Huntjens, Go-Moku solved by new search techniques. Proc. 1993 AAAI Fall Symposium on Games: Planning and Learning, AAAI Press Technical Report FS93-02, pp. 1-9, Menlo Park, CA.
3. J. Balogh, R. Martin and A. Pluhár, The diameter game. *Horizon of Combinatorics* konferencia, Balatonalmádi (2006).
4. J. Beck, Van der Waerden and Ramsey games. *Combinatorica* **1** (1981), 103–116.
5. J. Beck, Remarks on positional games. *Acta Math Acad Sci Hungar* **40** (1982), 65–71.
6. J. Beck, On a generalization of Kaplansky's game. *Discrete Mathematics* **42** (1982) 27–35.
7. J. Beck, Random graphs and positional games on the complete graph. *Annals of Discrete Mathematics* **28**(1985), 7–13.
8. J. Beck, An algorithmic approach to the Lovász Local Lemma. I. *Random Structures and Algorithms* **2** (1991), 343–365.
9. J. Beck, Deterministic graph games and a probabilistic intuition. *Combinatorics, Probability and Computing* **3** (1994), 13–26.
10. J. Beck, Positional games and the second moment method. *Combinatorica* **22** (2) (2002) 169–216.

11. J. Beck, Tic-Tac-Toe. Contemporary combinatorics, 93–137, *Bolyai Soc. Math. Stud.*, **10**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.
12. J. Beck, Positional Games. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005), 649–696.
13. J. Beck, *Lecture notes, Rutgers University* New Brunswick 1993.
14. J. Beck, *Tic-Tac-Toe Theory.* Cambridge University Press (2006).
15. M. Bednarska, and T. Łuczak, Biased positional games and the phase transition. *Random Structures and Algorithms* **18** (2001), no. 2, 141–152.
16. E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways For Your Mathematical Plays*, Volume **2**. Academic Press, New York 1982.
17. J. M. Byskov, Maker-Maker and Maker-Breaker Games are PSPACE-complete. *Technical Report, BRICS Research Series* RS-04-14, Dept. Comp. Sci., Univ. Aarhus, August 2004.
18. V. Chvátal and P. Erdős, Biased positional games. Algorithmic aspects of combinatorics (Conf., Vancouver Island, B.C., 1976). *Annals of Discrete Mathematics* **2** (1978), 221–229.
19. J. H. Conway, *On numbers and games.* London Mathematical Society Monographs, No. 6. Academic Press, London-New York, 1976.
20. B. Csákány, A form of the Zermelo-von Neumann theorem under minimal assumptions. *Acta Cybernetica* **15** (2002), no. 3, 321–325.
21. A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games. *közlésre benyújtva.*
22. L. Csirmaz, On a combinatorial game with an application to Go-Moku. *Discrete Mathematics* **29** (1980), 19–23.
23. P. Erdős and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. in: *Infinite and Finite Sets eds.: A. Hajnal et al., Colloq. Math. Soc. J. Bolyai,* **11**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.
24. P. Erdős and J. L. Selfridge, On a combinatorial game. *Journal of Combinatorial Theory Series A* **14** (1973), 298–301.
25. S. Even and R. E. Tarjan, A combinatorial problem which is complete in polynomial space. *J. Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976), no. 4, 710–719.
26. D. Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *American Mathematical Monthly* **86** (1979), no. 10, 818–827.
27. M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon an Schuster Inc., New York 1959.
28. M. Gardner, Mathematical Games. *Scientific American* **225** #2 (Aug. 1971) 102-105; **232** #6 (June 1975) 106-111; **233** #6 (Dec. 1975) 116-119; **240** #4 (Apr. 1979) 18-28.
29. M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete Problems. *Proc 6th ACM Symposium on the Theory of Computation*, 1974, pp. 47–63.
30. R. K. Guy and J. L. Selfridge, Problem S. 10, *American Mathematical Monthly* **86** (1979); solution T. G. L. Zetters **87** (1980) 575-576.
31. A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games. *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222–229; M.R. # 1265.
32. M. Hall Jr., Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 922–926.

33. C. Hartman, `http://www.cs.uaf.edu/ hartman/pouzethex.pdf`, letöltés: 2006, augusztus 2.

34. P. Hein, Vil de lære Polygon? Politiken newspaper, Denmark, 26 December 1942.

35. R. Hochberg, C. McDiarmid and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles. *Discrete Mathematics* **138** (1995) 261–265.

36. A. Hoffman, személyes közlés.

37. M. Kutz, Weak Positional Games on Hypergraphs of Rank Three. *PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2004.*

38. J. Lagarias and D. Sleator, Who wins Misère Hex? In Elwyn Berlekamp and Tom Rodgers (eds): *The Mathemagician and Pied Puzzler*, pages 237–240. A. K. Peters, 1999.

39. A. Lehman, A solution of the Shannon switching game. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **12** 1964 687–725.

40. L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. A magyar nyelvű változat: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex kiadó, 1999.

41. K. Noshita, Union-Connections and Straightforward Winning Strategies in Hex. *ICGA Journal*, 2005 28(1): cover, 3–12.

42. O. Patashnik, Qubic: $4\times4\times4$ tic-tac-toe. *Mathematical Magazine* **53** (1980), no. 4, 202–216.

43. Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield and D. B. Wilson, Random-turn Hex an other Selection Games. arXiv:math.PR/0508580 v2 26 Apr 2006

44. A. Pluhár, *Positional Games on the Infinite Chessboard* Ph.D. dissertation, Rutgers University 1994.

45. A. Pluhár, Generalized Harary Games. *Acta Cybernetica* **13** no. 1, (1997) 77–83.

46. A. Pluhár, The accelerated k-in-a-row game. *Theoretical Computer Science* **270** (2002), no. 1-2, 865–875.

47. A. Pluhár, The Recycled Kaplansky's Game. *Acta Cybernetica* **16** no. 3, (2004) 451–458.

48. S. Reisch, Hex ist PSPACE-vollständig. *Acta Informatica* **15** (1981), no. 2, 167–191.

49. N. Sieben, Hexagonal polyomino weak $(1,2)$-achievement games. *Acta Cybernetica* **16** (2004), no. 4, 579–585.

50. J. Spencer, Randomization, derandomization and antirandomization: three games. *Theoretical Computer Science* **131** (1994), no. 2, 415–429.

51. M. Stojaković and T. Szabó, Positional Games on Random Graphs. *Random Structures and Algorithms* **26** (2005), no. 1-2, 204–223.

52. L. A. Székely, On two concepts of discrepancy in a class of combinatorial games. *Finite and Infinite Sets, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Vol. **37**, North-Holland, 1984, 679–683.

53. H. Whitney, On the Abstract Properties of Linear Dependence. *American Journal of Mathematics* **57** (1935), no. 3, 509–533.

POSITIONAL GAMES

In the Introduction we define the Positional (or Hypergraph) Games, and the most basic facts (Zermelo-von Neumann theorem, the Strategy Stealing argument) concerning those. A few examples are also listed, such as the Tic-Tac-Toe, the Tic-Toc-Tac-Toe, the 5-in-a-row, and its generalization the k-in-a-row. Formally a Positional Game is defined as follows. Given an arbitrary hypergraph $\mathcal{F} = (V, \mathcal{F})$, the first and second players take elements of V in turns. The player, who takes all elements of an edge $A \in \mathcal{F}$ first wins the game. In the second section (Topology) we mainly deal with the game of hex, the hex theorem and its relatives. There is no draw in hex, and this fact is equivalent to the Brouwer fixed point theorem, the Pouzet lemma, or that the y-game also cannot end in a draw. The central result of the third section (Pairing and Matroids) is the Hales-Jewett theorem. It comes from the classical Kőnig-Hall theorem and the main consequences of it are the bounds on the Hales-Jewett games. There are natural generalizations of pairing strategies; one is the divisions of the board into pieces that can be used in the k-in-a-row games. The other is a *dynamic pairing* that is based on matroids and gives Lehman's theorem. The fourth section (The probabilistic method and weight functions) are devoted to the variants of the Erdös-Selfridge theorem. The main issue is how to turn random graph/hypergraph arguments into deterministic strategies. Here we discuss Maker-Breaker and Picker-Chooser games, biased games, games defined on the complete graph K_n or even on the random space $G(n,p)$. At the end of the section we mention some problems involving infinite hypergraphs; those are the Kaplansky's game, and its variants/derivatives. Finally we provide a list of open research problems.

REGRESSZIÓS JÁTÉKOK[1]

PINTÉR MIKLÓS
Budapesti Corvinus Egyetem

Egy kooperatív játék megoldása az egyes játékosok által együttesen elérhető eredmény bizonyos elvek szerinti elosztása a játékosok között. Egy regressziós modellben a rendelkezésre álló magyarázó változók által együttesen elérhető illeszkedés az az eredmény, amit szét szeretnénk osztani. Az egyes magyarázó változók játékelméleti módszerekkel való értékelése egyrészt hozzásegít az adott, modellezni kívánt probléma jobb megértéséhez, másrészt segít kiválasztani azoknak a változóknak a körét, amelyek az adott probléma modellezéséhez szükségesek. A cikk célja, hogy a kooperatív játékelméletben jól ismert Shapley-érték fogalmat használva értékeljük a regressziós modellek magyarázó változóit. Áttekintjük a Shapley-érték Hart és Mas-Colell–féle karakterizációját, és példákon mutatjuk be a javasolt eljárást. Konklúzió: a Shapley-érték használata regressziós modellek magyarázó változóinak értékelésére védhető, jól interpretálható módszer.

1 Bevezető

Az ökonometriai, statisztikai elemzések során gyakran felmerül az adott magyarázó változók, vagy bizonyos hatások fontosságának megállapítása. Ismerjük az elemezni kívánt jellemzők együttes hatásait, marginális hatásait, ezekből szeretnénk a változók egy tisztított, egyéni értékelését kapni, mely egyéni értékelés jól jellemzi az egyes változókat, hatásokat. A feladatot megfogalmazhatjuk úgy is, hogy szét szeretnénk osztani az egyes magyarázó változók együttes hatását az egyes változók között úgy, hogy a szétosztás rendelkezzen bizonyos tulajdonságokkal.

A játékelméletben az ilyen, vagy ehhez hasonló kérdésekre az átruházható hasznosságú kooperatív játékok megoldásai adnak választ. A feladat ott az, hogy szétosszuk az egyes játékosok (magyarázó változók) között az általuk együttesen elért eredményt (illeszkedést).

A kooperatív játékelméleti megoldások alkalmazása változóértékelésre már Chevan és Sutherland [2] cikkében felmerül, akik különböző regressziós feladatok kapcsán a magyarázó változók együttes magyarázóerejét (többszörös

[1]Köszönöm Forgó Ferenc professzornak, hogy ráirányította a figyelmemet a cikk témájára, nevezetesen arra, hogy a kooperatív játékelméleti megoldáskoncepciók használhatóak többváltozós regressziós modellek magyarázó változóinak értékelésére. Külön köszönöm a cikk bírálójának, Hajdu Ottónak, értékes észrevételeit, javaslatait. Köszönettel tartozom továbbá Forgó Ferencnek, Orosz Ágotának és Solymosi Tamásnak, akik számos megjegyzésükkel, javaslatukkal segítették munkámat. Természetesen az előforduló pontatlanságokért, hibákért egyedül én vagyok a felelős. Ez a munka az OTKA T046194 pályázat támogatásával készült. Beérkezett: 2007. május 30. E-mail: `miklos.pinter@uni-corvinus.hu`.

determinációs együttható) osztották szét az egyes változók között a Shapley-érték szerint. Chevan és Sutherland nem ismerte fel, hogy a Shapley-értéket használták értékelésükre, erre csak Stufken [17] hívta fel a figyelmet később. Ettől a pontól kezdve világos volt, hogy a különböző statisztikai, változó-értékelési stb. vizsgálatok során a kooperatív játékelmélet bizonyos megoldáskoncepciói, fogalmai használhatóak. Shorrocks [16] megmutatta, hogy a hatásértékelési (változóértékelési) módszerek egy széles csoportja tekinthető úgy, mint a Shapley-érték különböző megfogalmazásai, sőt, a szerző által az értékelési eljárásokkal szemben megfogalmazott elvárásoknak a Shapley-érték eleget tesz, tehát abban az értelemben ideális értékelési eljárás. Lipovetsky és Conklin [10] szintén a Shapley-értéket használja regressziós modellek változó-értékelésének meghatározására, különös tekintettel a multikollinearitás által okozott értékelési problémák kezelésére. Lipovetsky és Conklin nem ismerik a fenti szerzőket, így nem tudják, hogy eredményeik csak részben újak.

Számos, a Shapley-értéket használó, nem közgazdasági, nem üzleti alkalmazott írás, alkalmazás, elemzés jelent már meg. Csak iránymutatás végett, példaként megemlítünk néhányat: Cox [3], Gefeller et al. [6], Albrecht et al. [1], Wan [18], Zhang és Wan [19].

Grömping [8] a Shapley-érték statisztikai alkalmazásának egy részletes áttekintését adja. A cikk megjelenésének dátuma (2007), továbbá annak tartalma egyértelműen mutatja, hogy a Shapley-érték statisztikai alkalmazásának elmélete fontos, még formálódó, koránt sem lezárt kutatási terület.

A cikk célja, hogy elméleti oldalról alátámasszuk a Shapley-érték használatát regressziós modellek magyarázó változóinak értékelésére. Ebből a célból bevezetjük a regressziós játékok fogalmát, amely fogalom nem mintákra, hanem valószínűségi változókra épülő fogalom. A regressziós játékok ez a fajta absztrakt tulajdonsága lehetővé teszi, hogy elvi oldalról jellemezzük ezt a játékosztályt. A fő jellemzésünk a Shapley-érték Hart és Mas-Colell–féle [9] karakterizációjára épül. A 27. tételben megmutatjuk, hogy a Shapley-érték az egyetlen olyan, a regressziós játékok osztályán értelmezett értékelés, amely rendelkezik a Hart és Mas-Colell által megkövetelt, és a regressziós problémák során jól interpretálható, jogosan elvárható tulajdonságokkal.

A munka felépítése a következő: a 2. szakaszban áttekintjük a cikkben használt játékelméleti fogalmakat. A 3. szakaszban a Shapley-érték Hart és Mas-Colell–féle potenciálra támaszkodó jellemzését tárgyaljuk. A 4. szakaszban bevezetjük a regressziós játék fogalmát (22. definíció), továbbá megmutatjuk, hogy a potenciállal miként jellemezhető a Shapley-féle értékelés a regressziós játékok osztályán (27. tétel). Végül, az 5. szakaszban egy konkrét alkalmazási módszert ismertetünk. Az utolsó szakasz az összefoglalásé.

2 Kooperatív játékok

Ebben a szakaszban röviden áttekintjük a cikkben érintett kooperatív játékelméleti fogalmakat. Nem térünk ki részletesen minden fogalomra, eredményre, amit használni kívánunk, hanem támaszkodva az [5] jegyzetre, csak azokat a fogalmakat, eredményeket tárgyaljuk, amelyek közvetlenül szükségesek a cikk megértéséhez.

1. definíció. Legyen N a játékosok véges halmaza, és legyen $v : \mathcal{P}(N) \to I\!R$ olyan függvény, hogy $v(\emptyset) = 0$, ahol $\mathcal{P}(N)$ az N halmaz hatványhalmaza. Ekkor v-t karakterisztikus függvénnyel adott, átruházható hasznosságú, más néven TU (transferable utility) kooperatív játéknak (a továbbiakban röviden ,,csak" kooperatív játéknak) nevezzük.

A fenti definíció mögött meghúzódó intuíció a következő: az N halmaz részhalmazai az egyes koalíciók, míg a v karakterisztikus függvény értékei az egyes koalíciók által elérhető kifizetést, hasznosságot adják meg. Látható, hogy a koalíciók tagjai együtt érnek el bizonyos kifizetési értékeket, és az elért értékeket tetszőlegesen szét tudják osztani a résztvevők között; innen az átruházható hasznosság jelző.

2. segédtétel. Legyen $\mathcal{G}^N$ az $|N|$ (N számossága) elemű játékoshalmazzal rendelkező kooperatív játékok osztálya. Ekkor tetszőleges N-re $\mathcal{G}^N$ és $I\!R^{2^{|N|}-1}$ izomorfak.

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. □

A fenti segédtételből következik, hogy valójában nem maga a játékosok halmaza N, hanem N számossága az, ami fontos. Tehát a játékosztály fogalma nem a játékosok személyére, hanem azok számára épül. A továbbiakban feltesszük, hogy $v \in \mathcal{G}^N$ olyan kooperatív játék, amelynek játékoshalmaza $N = \{1, \dots, n\}$, és a két tér között rögzített izomorfizmusunk van, magyarán szólva, feltesszük, hogy $I\!R^{2^n-1}$ egy rögzített bázisa mellett definiáljuk v-t.

3. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ kooperatív játék monoton, ha tetszőleges olyan $A, B \in \mathcal{P}(N)$ esetén, hogy $A \subseteq B$, $v(A) \leq v(B)$.

A monoton kooperatív játékban egy új játékos tetszőleges koalícióba való belépése nem csökkenti az elérhető hasznosságot.

4. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ kooperatív játék szuperadditív (szubadditív), ha tetszőleges olyan $A, B \in \mathcal{P}(N)$-re, hogy $A \cap B = \emptyset$, $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$ ($v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$). v additív, ha egyszerre szuper- és szubadditív, tehát, ha tetszőleges olyan $A, B \in \mathcal{P}(N)$-re, hogy $A \cap B = \emptyset$, $v(A \cup B) = v(A) + v(B)$.

A szuperadditív kooperatív játékokban számolhatunk a nagykoalíció (N) megalakulásával, hiszen az összes játékos összefogása olyan hasznossági szintet tud biztosítani a játékosoknak, amit más ,,részösszefogásokkal" felülmúlni nem lehet. A szubadditív játékok esetén azonban (kivéve az additív esetet) nem várható a nagykoalíció megalakulása, ezek a kooperatív játékok bizonyos értelemben patologikusak.

5. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ kooperatív játék lényeges, ha $v(N) > \sum\limits_{i \in N} v(\{i\})$.

A lényegesség esetében az elvárás az, hogy a nagykoalíció által elérhető hasznossági szint haladja meg a játékosok által egyénileg elérhető hasznosságok összegét. A lényeges elnevezésre a magyarázat abban rejlik, hogy a nem lényeges játékok esetén végképp nem számolhatunk a nagykoalíció megalakulásával.

6. megjegyzés. Nagyon sok egyensúlyfogalom csak lényeges játékok esetén bír jelentéssel. Így pl. a mag, kernel, alkuhalmaz, stabil halmaz, nukleolusz csak lényeges játékok esetén tartalmas fogalom (lsd. pl. [4, 5, 11]).

Ebben a cikkben a Shapley-értéket (Shapley [14]) használjuk.

7. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ kooperatív játék, és legyen $v_i'(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$, ahol $i \in N$, $S \in \mathcal{P}(N)$. Legyen továbbá tetszőleges $i \in N$ esetén

$$f_{Sh}^i(S) = \begin{cases} \dfrac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}, & \text{ha } i \notin S \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

eloszlás $\mathcal{P}(N)$-en[2]. Ekkor $\phi_i(v)$, az i játékos Shapley-értéke a következő:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{P}(N)} v_i'(S) \; f_{Sh}^i(S) \; . \tag{1}$$

A Shapley-érték mögé egy jól megfogható intuíció helyezhető. A $v_i'(S)$ az az érték, ami az i játékos ceteris paribus hozzájárulása az S koalícióhoz. Tehát, ha az i játékos nem tagja az S koalíciónak, akkor az ő belépése az S koalícióba $v_i'(S)$ „többletet” hoz, ha pedig az i játékos tagja az S koalíciónak, akkor $v_i'(S) = 0$. Tegyük fel, hogy a koalíciók az egyes játékosok véletlenszerű sorrendjéből alakulnak ki (pl. érkezési sorrend), tehát minden azonos elemszámú koalíció bekövetkezésének azonos a valószínűsége. Legyen S egy tetszőleges koalíció, ekkor ha $i \notin S$, akkor az S koalíció $|S|!(|N|-|S|-1)!/|N|!$ valószínűséggel alakul meg, így az i játékos hozzájárulása ezen a koalíción keresztül várhatóan $v_i'(S)|S|!(|N|-|S|-1)!/|N|! = v_i'(S) f_{Sh}^i(S)$, tehát $\phi_i(v)$ nem más, mint v_i', f_{Sh}^i-ra vonatkozó várható értéke.

A következő példában a fent ismertetett Shapley-értéket és a hozzá kapcsolható intuíciót mutatjuk be.

8. példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, és legyen v a következő:

$$v(\{1\}) = 1\,, \quad v(\{2\}) = 0\,, \quad v(\{3\}) = 2\,,$$
$$v(\{1,2\}) = 2\,, \quad v(\{1,3\}) = 2\,, \quad v(\{2,3\}) = 3\,,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 5\,.$$

Érkezési sorrendek:

1	1	2	2	3	3
2	3	1	3	1	2
3	2	3	1	2	1

[2] Tehát $\sum_{S \in \mathcal{P}(N)} f_{Sh}^i(S) = 1$.

Határhozzájárulások (játékosonként):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

A Shapley-értékek:

$$\begin{aligned} \phi_1(v) &= \frac{1}{6}\big(1+1+2+2+0+2\big) = \frac{8}{6} \\ \phi_2(v) &= \frac{1}{6}\big(1+3+0+0+3+1\big) = \frac{8}{6} \\ \phi_3(v) &= \frac{1}{6}\big(3+1+3+3+2+2\big) = \frac{14}{6} \end{aligned}$$

Fontos látni, hogy a Shapley-érték azonos valószínűséggel, súllyal kezeli az egyes játékosokat (f^i_{Sh}-k). Ez az „egyenlő" kezelés a Shapley-érték normatív tulajdonsága. Természetesen használhatunk más súlyrendszert is, ekkor kapjuk a Shapley-érték egy általánosítását, az aszimmetrikus Shapley-értéket (lsd. pl. Shapley [15]).

9. megjegyzés. Világos, hogy ϕ egy lineáris leképezés, így annak konkrét formája függ mind az értelmezési tartomány, mind az értékkészlet vektorterek bázisától. Az értelmezési tartomány bázisát már rögzítettük, így továbbiakban rögzítjük az értékkészlet egy bázisát is. Ekkor ϕ jóldefiniált.

A következőkben tisztázzuk, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik a Shapley-érték, illetve, milyen tulajdonságok meglétével egyenértékű a Shapley-érték. Ez utóbbi kérdés a Shapley-érték axiomatizálása, és ehhez van szükség a következő fogalmakra, eredményekre.

10. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített, és legyen $i, j \in N$. Ekkor az i és j játékosok ekvivalensek ($i \sim j$), ha minden olyan $S \in \mathcal{P}(N)$-re, hogy $i, j \notin S$, $v'_i(S) = v'_j(S)$.

A fenti definíció szerint két játékos ekvivalens, ha felcserélhetőek, tehát, ha egy olyan koalíciót vizsgálunk, amiben egyikőjük sincs benne, akkor mindegy, hogy melyik csatlakozik az adott koalícióhoz, mind a ketten ugyan annyi „többletet" hoznak. Könnyen látható, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció.

11. definíció. A $v \in \mathcal{G}^N$ kooperatív játék alapjáték, ha $i, j \notin NP(v)$-ből következik, hogy $i \sim j$, ahol $NP(v) = \{i \in N \mid v'_i = 0\}$, a v játék nullajátékosainak halmaza.

Egy kooperatív játék akkor alapjáték, ha a nullajátékosokon kívül csak egyféle játékosa van. Az alapjáték fogalom használhatósága nem derül ki igazán a következőkben tárgyalásra kerülő problémáknál, de más, itt nem tárgyalt axiomatizálási koncepcióknál kulcsszerepe van.

12. következmény. *Ha $v \in \mathcal{G}^N$ alapjáték, akkor tetszőleges $\alpha \in I\!R$ esetén αv is alapjáték.*

Bizonyítás. A 11. definíció közvetlen következménye. □

Egy alapjáték tetszőleges skalárszorosa is alapjáték. Magyarán szólva, az alapjátékokat szabadon lehet „nyújtani”, „zsugorítani”, attól még alapjátékok maradnak.

Világos, hogy meglehetősen sok fajta alapjáték van. Ennek megmutatására nézzük a következő, [12]-ből való állítást.

13. állítás. *Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített kooperatív játék. Ekkor $\exists v_i, \ldots, v_k \in \mathcal{G}^N$ alapjátékok, hogy $v = \sum\limits_{i=1}^{k} v_k$.*

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy van $2^n - 1$ lineárisan független alapjáték. Legyen

$$u_T(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } T \subseteq S \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $S, T \in \mathcal{P}(N)$, $T \neq \emptyset$ tetszőlegesen rögzített. Az u_T játékot a T koalícióhoz tartozó egyetértési játéknak[3] nevezzük. Könnyen látható, hogy az egyetértési játékok alapjátékok.

A következő lépés annak megmutatása, hogy $\{u_T\}_{T \neq \emptyset}$ lineárisan független vektorrendszer. Indirekt tegyük fel, hogy $0 = \sum_{T \in \mathcal{P}(N) \setminus \emptyset} \alpha_T u_T$ és $\{T \mid \alpha_T \neq 0\} \neq \emptyset$. Legyen T^* a $\{T \mid \alpha_T \neq 0\}$ halmaz egy minimális eleme. Ekkor azonban

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{P}(N) \setminus \emptyset} \alpha_T u_T \right)(T^*) = \alpha_{T^*} \neq 0 \,,$$

ami ellentmondás. □

A 13. állítás azt mondja, hogy $\mathcal{G}^N$-nek van alapjátékokból álló bázisa, amely állítást egy konkrét bázis megadásával bizonyítottunk. $\mathcal{G}^N$ alapjátékokból álló bázisainak a jellemzése, kategorizálása nyitott kérdés. A következőkben kiderül, hogy egy ilyen karakterizáció sokkal kerekebbé tenné a Shapley-érték axiomatizálásának tárgyalását.

3 Potenciál függvény

A Shapley-érték Hart és Mas-Colell [9] szerzőktől származó jellemzésével foglalkozunk a következőkben. A tárgyalás során [12]-re támaszkodunk.

14. definíció. Legyen $v \in \mathcal{G}^N$ tetszőleges kooperatív játék, és legyen $T \subseteq N$. Ekkor a v játék T-hez tartozó v^T részjátéka a következő: $v^T(S) = v(S)$, minden $S \subseteq T$-re. Látható, hogy $v^T \in \mathcal{G}^T$.

Tehát a v játék részjátékát úgy kapjuk, hogy egyszerűen kihagyunk játékosokat. Azok a koalíciók, ahol kihagyott játékosok szerepeltek, azok a részjátékban már nem lesznek, tehát ott a részjátékot nem is kell definiálni.

[3] Az elnevezés nagyon találó, hiszen a játék értéke pontosan akkor 1, ha a T koalíció tagjai „egyetértenek”.

15. definíció. Legyen $\Gamma^N = \cup_{T \subseteq N} \mathcal{G}^T$, $P : A \to I\!R$ függvény, ahol $A \subseteq \Gamma^N$, és legyen tetszőleges olyan $v \in \mathcal{G}^T \subseteq A$ játékra, hogy $T \neq \emptyset$, és $|T| > 1$-re $v^{T \setminus \{i\}} \in A$,

$$P'_i(v) = \begin{cases} P(v), & \text{ha } |T| = 1 \\ P(v) - P(v^{T \setminus \{i\}}) & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor, ha tetszőleges olyan $v \in \mathcal{G}^T \subseteq \Gamma^N$-re, hogy $T \neq \emptyset$ és $v^{T \setminus \{i\}} \in A$ minden $i \in T$-re, fennáll, hogy

$$\sum_{i \in T} P'_i(v) = v(T) \,, \tag{2}$$

akkor P-t az A halmazon értelmezett potenciálnak nevezzük.

A potenciál tehát olyan függvény, amely a kooperatív játékok olyan részosztályán értelmezett, ahol nem rögzített a játékosok száma. Ebből következőleg, a potenciál alkalmas különböző játékosszámú játékok összehasonlítására is. (2) szerint, tetszőleges játékban a nagykoalíció értéke megegyezik az egyes játékosok potenciálra gyakorolt hatásainak összegével. Tehát azt mondhatjuk, hogy egy játékban a nagykoalíció értékét az egyes játékosok elhagyásával kapott játékok figyelembevételével kalkuláljuk.

Ehhez szükséges a következő fogalom.

16. definíció. Az $A \subseteq \Gamma^N$ játékosztály részjáték-zárt, ha tetszőleges $v \in \Gamma^N$ tetszőleges v^T, $T \subseteq N$, $|T| > 1$ részjátéka benne van A-ban.

A (2) egyenlőségből látható, hogy a potenciál fogalma akkor nem semmitmondó, ha tetszőleges játék tetszőleges részjátéka is benne van a vizsgált részosztályban. Ellenkező esetben a potenciál nem egyértelmű, így nem jóldefiniált.

A következő tétel, amely [12]-ből való, a Shapley-érték Hart és Mas-Colell–féle axiomatizációja.

17. tétel. *Legyen $A \subseteq \Gamma^N$ részjáték-zárt játékosztály. Ekkor az A-n értelmezett függvény pontosan akkor potenciál, ha tetszőleges $v \in \mathcal{G}^T \subseteq A$-ra és tetszőleges $i \in T$-re $P'_i(v) = \phi_i(v)$.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy van A-n potenciál, sőt csak egyetlen egy van. Világos, hogy ha A részjáték-zárt, akkor $P'_i(v)$ létezik minden $v \in A$ esetén. $|T|$-n való indukcióval bizonyítunk. Legyen $v \in \mathcal{G}^T \subseteq A$, hogy $|T| = 1$. Ekkor legyen $P(v) = v(T)$.

Tegyük fel, hogy a $\mathcal{G}^T \subseteq A$, $|T| = k < n$ halmazbeli játékokra P jóldefiniált (tehát egyértelműen definiált), és legyen $v \in \mathcal{G}^S \subseteq A$ olyan, hogy $|S| = k + 1$, és

$$P(v) = \frac{v(S) + \sum_{i \in S} P(v^{S \setminus \{i\}})}{|S|} \,.$$

Ekkor
$$\sum_{i\in S}(P(v)-P(v^{S\setminus\{i\}}))=|S|P(v)-\sum_{i\in S}P(v^{S\setminus\{i\}})=$$

$$=v(S)+\sum_{i\in S}P(v^{S\setminus\{i\}})-\sum_{i\in S}P(v^{S\setminus\{i\}})=v(S)\ ,$$

tehát P megfelel (2)-nek, sőt csak P felel meg.

A következő lépésben konkrétan megadjuk P-t. Legyen $v\in\mathcal{G}^T\subseteq A$ tetszőlegesen rögzített, $\{v_S\}_{S\neq\emptyset}$, $\mathcal{G}^T$ egy alapjátékokból álló bázisa (a 13. állítás miatt ilyen bázis létezik), ahol $T\setminus S=NP(v_S)$, és $v=\sum_{S\neq\emptyset}\alpha_S v_S$. Legyen továbbá
$$P^*(v)=\sum_{S\neq\emptyset}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}\ .$$

Legyen most $v\in\mathcal{G}^S\subseteq\Gamma^N$ olyan, hogy $|T|=1$. Ekkor $P^*(v)=v(T)$, tehát ha $|T|=1$, akkor $P^*=P$.

Legyen $v\in\mathcal{G}^T\subseteq A$ tetszőlegesen rögzített, ahol $|T|>1$. Legyen továbbá $i\in T$ szintén tetszőlegesen rögzített, ekkor
$$P^*(v^{T\setminus\{i\}})=\sum_{i\notin S,\,S\neq\emptyset}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}\ ,$$

így
$$P_i^{*'}(v)=\sum_{S\neq\emptyset}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}-\sum_{i\notin S,\,S\neq\emptyset}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}=\sum_{i\in S}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}\ . \tag{3}$$

Ekkor
$$\sum_{i\in T}P_i^{*'}(v)=\sum_{i\in T}\sum_{i\in S}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}=\sum_{S\neq\emptyset}\alpha_S v_S(T)=v(T)\ .$$

Tehát P^* potenciál, magyarán szólva $P^*=P$.

A következő lépés annak megmutatása, hogy tetszőleges $i\in T$-re $P_i'(v)=\phi_i(v)$. Legyen $v_S\in\mathcal{G}^N$ tetszőlegesen rögzített fent használt alapjáték. Ekkor a Shapley-érték, és az alapjáték fogalmak definícióiból (7. és 11. definíciók) következik, hogy
$$\phi_i(v_S)=\begin{cases}\dfrac{v_S(T)}{|S|}, & \text{ha } i\in S\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

így a (3) egyenlőségből és a Shapley-érték linearitásából következik, hogy tetszőleges $i\in T$-re
$$P_i'(v)=\sum_{i\in S}\frac{\alpha_S v_S(T)}{|S|}=\sum_{i\in T}\alpha_S\phi_i(v_S)=\phi_i(v)\ .$$

□

A 17. tételből látható, hogy a Shapley-féle értékelés potenciállal való jellemzésének egyetlen feltétele az, hogy a vizsgált játékosztály részjáték-zárt legyen. Ez sok esetben nagyon kézenfekvő és könnyen ellenőrizhető tulajdonság. Ennek illusztrálására nézzük az alábbi következményt.

18. következmény. *A P^* a(z)*

1. *Γ^N-en*
2. *szuperadditív játékok osztályán*
3. *szubadditív játékok osztályán*
4. *monoton játékok osztályán*
5. *additív játékok osztályán*

értelmezett függvény pontosan akkor potenciál, ha tetszőleges $v \in \mathcal{G}^T \subseteq \Gamma^N$-re és tetszőleges $i \in T$-re $P_i'(v) = \phi_i(v)$.

Bizonyítás. Minden említett játékosztály részjáték-zárt, így alkalmazhatjuk a 17. tételt. □

Fontos látni, hogy pl. a lényeges játékok osztálya nem részjáték-zárt, tehát azon a játékosztályon a potenciál nem karakterizálja a Shapley-féle értékelést.

4 Regressziós játékok

Ebben a szakaszban a lineáris regressziós[4] modellezési problémát vizsgáljuk. A célunk olyan módszert adni, amelynek segítségével értékelni tudjuk az egyes magyarázó változókat.

Legyenek η a magyarázott, és ξ_i, $i = 1, \ldots, n$ a magyarázó változók. Absztrakt formában tekintjük a modellezési feladatot, tehát nem foglalkozunk becslésekkel, feltesszük, hogy ismerjük a valószínűségi változókat, amikkel dolgozunk.

19. definíció. Legyen $N = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ a játékosok halmaza, tehát N, az n magyarázó változó halmaza.

A továbbiakban feltesszük, hogy N rögzített, amin azt értjük, hogy n magyarázó változó van a modellben. Tekintsük a következő feladatot ($S \subseteq N$ tetszőlegesen rögzített):

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\,(\eta) - \mathrm{var}\,(\eta - \sum_{i \in S} \beta_i \xi_i) \quad &\to \quad \max \\ \beta_i \in I\!R, \quad i \in S & \end{aligned} \tag{4}$$

20. definíció. Legyen a magyarázott (η), és a magyarázó ($\xi_1, \ldots, \xi_n$) változók rögzítettek. Tetszőleges $S \in \mathcal{P}(N)$-re $v(S)$ legyen (4) megoldása.

Az egyes koalíciók értékét az általuk elért ,,illeszkedés" (4) jósága adja. Az általunk használt mérőszám az RSS-nek feleltethető meg (természetesen nem

[4]Nem lineáris regressziós problémákra teljesen analóg módon megy a felépítés, így annak tárgyalásától itt eltekintünk.

egyezik meg vele). Az alapgondolat a következő: szokásos a statisztikai irodalomban, hogy egy modell illeszkedésén a többszörös determinációs együtthatót értik. Ez a mutató azonban egy lenormázott érték (0 és 1 közé esik), ami matematikai, játékelméleti szempontból nem túl szerencsés[5]. Ugyanakkor, az itt tárgyalt megközelítésben nincsenek mintavektorok (minták), valószínűségi változókkal dolgozunk, és az RSS megfelelőjét keressük[6]. Mivel a (4) által meghatározott játékok csak egy pozitív skalár szorzóval térnek el az RSS által meghatározottól, és kúp struktúránk van, így az RSS és a (4) megközelítések ekvivalensnek tekinthetőek.

Chaven és Sutherland [2], Lipovetsky és Conklin [10] az illeszkedés mérőjeként a többszörös determinációs együtthatót használta. A (4) mérőszám előnyeként lehet felhozni (a többszörös determinációs együtthatóval szemben), hogy a többszörös determinációs együttható egy lenormázott érték, így a magyarázóváltozók abszolút értelemben nem értékelhetőek általa (több, különböző modellben szereplő magyarázó változók összevetése nehézkes).

21. következmény. *v kooperatív játék.*

Bizonyítás. Az 1, 19, 20. definíciók közvetlen következménye. □

Rögzített magyarázott és magyarázó változók esetén a v kooperatív játékban a különböző bevont magyarázó változók által meghatározott modellek adják a játékot. Tehát egy játékban több modell van, minden kooperatív játékhoz egy jól meghatározott modellcsoport tartozik.

22. definíció. A 19, 20. definíciók által meghatározott játékokat regressziós játékoknak nevezzük. A regressziós játékok osztályát $\mathcal{G}_R^N$-rel jelöljük.

A regressziós játékok tehát olyan játékok, amelyek megfeleltethetőek regressziós feladatoknak.

23. segédtétel. *A $\mathcal{G}_R^N$ játékosztály része a monoton játékok osztályának.*

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. □

A 23. segédtétel könnyen interpretálható. Amennyiben egy rögzített modellbe egy új magyarázó változót illesztünk, akkor az új modell magyarázóereje nem lehet kisebb, mint az eredeti modellé. Vagy másképpen, egy altér és egy pont távolsága nem nőhet attól, hogy az alteret egy új vektorral bővítjük. A következőkben egy példával illusztráljuk az eddig elmondottakat.

24. példa. Legyen a kovarianciamátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

[5] Ez a tény nem derül ki az itt tárgyalt megközelítésben, de arról van szó, hogy a regressziós játékoknak nincs kúp struktúrája (az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz kúp, ha tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}_+$ esetén $\alpha A \subseteq A$), ha a többszörös determinációs együtthatót használjuk az értékelésnél, ami más axiomatizációs eljárásoknál (Shapley, Young) kifejezetten hátrányos.

[6] Igazából, az itt használt absztrakt modellben nincs semmi kétség afelől, hogy mi legyen a mérőszám, hiszen nem kell becsülnünk, ismerjük a valószínűségi változókat, és egyszerűen csak legközelebbi pontokat keresünk (pontosabban legkisebb távolságokat).

A kovarianciamátrix főátlójában rendre a magyarázott (η), és a magyarázó változók (ξ_1, ξ_2, ξ_3) varianciái találhatóak. A főátlón kívüli elemek a szokásos kovarianciák. A fenti kovarianciamátrixból látható, hogy ξ_1-nek nincs közvetlen hatása η-ra.

A megfelelő v regressziós játék:

$$\begin{aligned}
&v(\{1\}) = 0\,, \quad v(\{2\}) = \frac{1}{4}\,, \quad v(\{3\}) = \frac{1}{3}\,,\\
&v(\{1,2\}) = \frac{1}{3}\,, \quad v(\{1,3\}) = \frac{1}{3}\,, \quad v(\{2,3\}) = \frac{3}{8}\,,\\
&v(\{1,2,3\}) = \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}$$

Látható, hogy v olyan monoton játék, amely nem szuperadditív, nem szubadditív, és nem is lényeges. A v regressziós játék Shapley-értéke :

$$\left(\frac{16}{720}, \frac{121}{720}, \frac{151}{720}\right).$$

Komponensenként:

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= \frac{1}{3}\,0 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{12} + 0\right) + \frac{1}{3}\,\frac{1}{40} = \frac{16}{720}\,,\\
\phi_2(v) &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\right) + \frac{1}{3}\,\frac{1}{15} = \frac{121}{720}\,,\\
\phi_3(v) &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\,\frac{1}{15} = \frac{151}{720}\,.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a 24. példában ξ_1 és η korrelálatlanok, ám ξ_1 Shapley-értéke nem nulla. Világos, hogy ha ξ_1 és η függetlenek lennének, akkor a Shapley-érték nulla lenne. Tehát, a Shapley-érték bizonyos esetekben meg tudja különböztetni a korrelálatlanságot és a függetlenséget. Ez a jelenség leírható a parciális korreláció fogalmával is, de utalva Grömpingre [8], ez inkább elvárás, mint új tulajdonság. Tehát nem arról van szó, hogy a Shapley-érték ebben a tekintetben újat hoz, hanem arról, hogy teljesíti az ebben a jelenségben megtestesülő elvárásokat.

25. következmény. *A regressziós játékok osztálya nem része sem a szuper-, sem a szubadditív, sem a lényeges játékok osztályának.*

Bizonyítás. Lsd. a 24. példát. □

Egyetlen dolgot tudunk mondani.

26. segédtétel. *Ha a magyarázó változók korrelálatlanok* ($\mathrm{corr}_{i,j} = 0$, $\forall i, j \in N$*-re), akkor a generált regressziós játék additív.*

Bizonyítás. A bizonyítást az olvasóra bízzuk. □

A 26. segédtétel nem megfordítható. Könnyen konstruálható olyan példa, ahol az adott magyarázó változók korreláltak, a generált játék mégis additív.

Más oldalról, minél erősebben korrelált két magyarázó változó, annál jobban hasonlít a Shapley-értékük egymásra. Tehát, ha két magyarázó változó teljesen korrelált, akkor a Shapley-értékük megegyezik. Ugyanakkor, könnyen megadható olyan példa, ahol két magyarázó változó korrelálatlan, a Shapley-értékük mégis megegyezik. A fentiekből is kitűnik, hogy a kovarianciamátrixra (regressziós feladatra) vonatkozó fogalmak nem karakterizálják a generált játékot. Tehát, (általában) közvetlen, a kovarianciamátrixra épülő Shapley-féle értékelésre nem látunk esélyt.

A 25. következmény és a 6. megjegyzés azt mutatja, hogy a regressziós játékok osztályán miért a Shapley-értékkel próbáljuk a magyarázó változókat értékelni. Természetesen vannak a Shapley-értéken kívül még olyan megoldáskoncepciók, amelyek nem lényeges játékok esetén is tartalommal bírnak, de „első körös", a „legnépszerűbb" megoldás koncepciók közül a Shapley-érték az egyetlen, amely ezzel a tulajdonsággal bír.

27. tétel. *P, a Γ_R^N játékosztályon értelmezett függvény pontosan akkor potenciál, ha $P_i' = \phi_i^S$, minden $i \in N$-re.*

Bizonyítás. A 17. tétel alkalmazhatóságához, csak azt kell látnunk, hogy tetszőleges $v \in \mathcal{G}_R^T \subseteq \Gamma_R^N$, $|T| > 1$ regressziós játék, tetszőleges $i \in T$ játékos elhagyásával kapott részjátéka regressziós játék. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy egy tetszőleges regressziós modellből, annak tetszőleges magyarázó változóját elhagyva regressziós modellt kapunk, ami egészen nyilvánvaló. □

A potenciál fogalma (7. definíció) jól interpretálható a regressziós játékok esetében[7]. Tegyük fel, hogy adott egy regressziós modell. Ekkor az illeszkedése, értéke ennek a modellnek az összes magyarázó változó bevonásával elérhető illeszkedés. Hogyan osszuk szét, ezt ez értéket az egyes magyarázó változók között, más szavakkal, hogyan értékeljük ezeket a valószínűségi változókat?

A potenciál azt mondja, hogy adott magyarázó változók értéke az ő elhagyásával kapott modell illeszkedése (értéke) és az adott modellünk értékének különbsége legyen. Tehát egy magyarázó változó érjen annyit, amennyi a ceteris paribus hozzájárulása az adott modell értékéhez. Az az elvárás pedig, hogy egy modell értéke a belőle egy magyarázó változó elhagyásával kapott modellek és a teljes modell értékkülönbségeinek összege legyen, igen természetes.

A Shapley-értéknek a regressziós játékok esetén, a 7. definíció tárgyaláskor adott interpretációtól eltérő magyarázatot is lehet adni. Szokásos a statisztikai, ökonometriai feladatoknál az optimális modell kiválasztásához, tehát a magyarázó változók értékeléséhez az ú.n. *stepwise* módszereket használni. Ezek alapvetően vagy egyre bővebb, vagy egyre szűkebb magyarázó változó halmazzal rendelkező modellek összevetésével mérik meg az utolsónak bevett, vagy elhagyott magyarázó változó fontosságát (értékét).

[7]Itt jegyezzük meg, hogy a potenciál fogalma hasonlít ugyan a parciális determinációs együttható statisztikai fogalomhoz, de mind elméleti, mind gyakorlati szemszögből vizsgálva különbözik attól.

A Shapley-érték ezzel szemben az összes lehetséges modellt, tehát az összes lehetséges egyre bővülő, vagy egyre szűkülő modellsorozatot elemzi, és az egyes magyarázó változók hatásainak azonos súllyal vett összegét rendeli az adott magyarázó változóhoz. Tehát a Shapley-érték úgy interpretálható, mintha megvizsgáltuk volna a modell összes lehetséges felépítését, és csak ez után értékeljük az egyes magyarázó változókat. Ebben az értelemben a Shapley-érték nagyon hasonlít a stepwise módszerekhez, a különbség az, hogy míg a stepwise módszerek lokálisak (egy láncszemhez kötöttek), addig a Shapley-érték globális (az összes lánc, összes láncszeméhez kötődik).

Más oldalról, ahogy a 7. definíció után már említettük, a Shapley-érték tulajdonképpen egy várható érték. Ebben az értelemben tehát, a Shapley-féle értékelés azt mondja, hogy az adott magyarázó változó várhatóan mennyivel járul hozzá az adott modell magyarázóerejéhez (illeszkedés).

Ezek után, a potenciál azt mondja, hogy a Shapley-érték fent ismertetett tulajdonságú értékelése megkapható úgy, mint az egyes magyarázó változók ceteris paribus hozzájárulása az adott modell értékéhez.

Egy tulajdonságra van még szükségünk. A Shapley-érték potenciálfüggvénnyel való jellemzéséhez a regressziós játékok osztályának részjáték-zártsága kell. A játékos (magyarázó változó) elhagyhatósága meglehetősen kézenfekvő tulajdonság. Ha egy regressziós modellből kiveszünk egy magyarázó változót, természetszerűleg egy regressziós modellt kapunk, sőt magának a regressziós játéknak fogalma is erre a tulajdonságra épül.

Az előzőekből következőleg, a Shapley-érték Hart és Mas-Colell–féle axiomatizálása nagyon természetes, így a Shapley-érték használata magyarázó változók értékelésére igen kézenfekvő és védhető.

5 Alkalmazás

A következőkben (gyakorlati) példákon mutatjuk be az előzőekben ismertetett változóértékelési módszert. Alkalmazások esetén nem valószínűségi változókat kapunk, hanem csak mintákat, így a Shapley-féle értékelést is „csak” becsüljük a konkrét modellcsoport esetén. Amennyiben a magyarázó változók paramétereinek becslése torzítatlan, annyiban maga a regressziós játék is torzítatlanul becsült, így a Shapley-féle értékelés is torzítatlanul becsült. A becslések egyéb tulajdonságait nem tárgyaljuk.

A 2. szakaszban nem a regressziós négyzetösszeget, hanem annak egy pozitív számszorosát használtuk. A továbbiakban azonban az RSS-t fogjuk használni. Tekintettel azonban az előzőekben mondottakra, minden elméleti eredményünk érvényben marad.

A következőkben ismertetésre kerülő módszerek *csak egy lehetséges alkalmazásai a Shapley-féle értékelésnek, a cél csak az illusztrálás, nem több.* Az előző szakaszban leírt eredmények másképpen is használhatóak magyarázó változók értékelésére, fontos továbbá, hogy maguk a javasolt módszerek nem követelnek meg különösebb játékelméleti ismereteket.

Az első példa egy a gretl [7] programmal együtt letölthető, Ramanathan

[13] könyvhöz tartozó idősor. Az idősor 1959 és 1989 között az USA-beli Oregon állam puhafa kitermelését tárgyalja. A magyarázni kívánt változó a teljes puhafa kitermelés az adott évben milliárd board feet-ben[8] y. Öt magyarázó változónk van: a puhafa export (USA-n kívülre szállított fa) az adott évben millió board feet-ben x_1, a megkezdett lakásépítések száma az USA-ban az adott évben millió darab x_2, a papír- és faipari termékek termelési indexe az adott évben x_3, a rönkfa árak az észak-nyugat–csendes-óceáni partvidéken az adott évben \$/1000 board feet x_4, a termelői árindex (összes termékre) az adott évben x_5 (az adatok leírása megtalálható az adatfájlban).

A feladat elemzése során tengelymetszet alkalmazása látszik szükségesnek, tehát a konstans minden modellben szerepel. A modellek paraméterbecslését a hagyományos legkisebb négyzetek (a továbbiakban OLS) becsléssel végeztük. Autokorreláció, heteroszkedaszticitás esetén az OLS becsléssel kapott paraméterek nem feltétlenül a legkedvezőbbek (a becslés hatásossága veszhet el). Ebben a konkrét példában nem foglalkozunk ezzel a problémával, hiszen a cél a módszer bemutatása, működésének illusztrálása. Általában azonban az egyes becslési eljárások szabadon használhatóak az egyes modellekben, tehát elképzelhető pl., hogy a modellcsoport egyik elemében OLS-t, a másikban GLS-t (általánosított legkisebb négyzetek módszere) stb., vagy esetleg ismert eloszlások esetén maximum likelihood becslést használunk. Mivel itt a mintákból az igazi modellparamétereket csak becsülni tudjuk, így a 4. szakaszban leírtaknak megfelelően, a megfelelő modellek magyarázóerejét becsüljük meg.

A Shapley-féle értékelés:

$$(5.3326; 5.2641; 7.2784; 1.0128; 5.7077)\,, \tag{5}$$

tehát a változók fontossági sorrendben: x_3, x_5, x_1, x_2, x_4. Azt is megállapíthatjuk, hogy pl. x_3 közel nyolcszor olyan fontos, mint x_4.

Ha két magyarázó változó erősen korrelált, akkor a Shapley-féle értékelésük közel esik egymáshoz. Tekintsük meg ezért a magyarázó változók korrelációsmátrixát:

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.2015 & 0.9413 & 0.6833 & 0.8492 \\ 0.2015 & 1.0000 & 0.2011 & -0.0428 & -0.0110 \\ 0.9413 & 0.2011 & 1.0000 & 0.6779 & 0.9154 \\ 0.6833 & -0.0428 & 0.6779 & 1.0000 & 0.6842 \\ 0.8492 & -0.0110 & 0.9154 & 0.6842 & 1.0000 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Látható, hogy az x_1, x_3, x_5 változók erősen korrelálnak egymással, tehát mindhárom együttes szerepeltetése nem feltétlenül indokolt. Az x_2 változó azonban alig korrelál a többi magyarázó változóval, így annak fontossága felértékelődik.

Tekintsük azt a leszűkített regressziós játékot, ahol csak az x_1, x_2, és x_4 magyarázó változók a játékosok, és az egyes modellek értékeit úgy számoljuk, hogy az x_3, x_5 változók mindig szerepelnek a regresszióban. Tulajdonképpen

[8] 1 board feet = kb. 3,744 cm^3.

három magyarázó változós modellcsoportot elemezünk, melyet feltételes (x_3, x_5 változók minden regresszióban szerepelnek) értékelésnek nevezhetünk.

A kapott Shapley-féle értékelés (az értékek összege: az összes magyarázó változók együttes magyarázóerejéből levonva a feltételül szabott két magyarázó változó x_3, x_5 által együttesen elért magyarázóerőt, $RSS_N - RSS_{\{x_3,x_5\}}$):

$$(0.3429; 0.6652; 0.6724)\ . \tag{7}$$

Megváltozott a meghagyott változók erősorrendje: itt x_4 a legerősebb, míg az eredeti Shapley-féle értékelésben a leggyengébb volt. Másrészt látható, hogy ez a három változó összesen is csak 1.6805-tel tudja növelni a magyarázóerőt[9] (6.83%), ami nagyon csekély. Látható továbbá, hogy az eredeti modellben x_2 „bevétele” 5.2641-gyel növeli a magyarázóerőt (21.4%), ami jelentősnek tűnik. Kiszűrve azonban x_3, x_5 magyarázó változók hatását jelentős visszaesést tapasztalunk, ami arra utal, hogy x_2 már korántsem viselkedik függetlenül az x_3, x_5 együttestől. Érdekes azonban, hogy x_4 egészen sokat megőrzött értékéből, így x_4 fontosabb változónak tűnik, mint azt az eredeti (nem feltételes) értékelés sugallta (lsd. a 24. példa utáni szövegrészt).

A második példánk szintén egy a gretl programmal együtt letölthető, Ramanathan könyvhöz tartozó idősor. Az idősor az USA-ban eladott új autók állományának, negyedéves bontásban, elemzésére szolgál. A magyarázni kívánt változó az eladott új autók száma 1000 db-ban y. Öt magyarázó változónk van: népesség millió fő x_1, az egy főre eső elkölthető jövedelem ezer dollárban, 1982-es bázisévvel x_2, az új autók árindexe 1982-es bázisévvel x_3, az elsődleges, bankok által alkalmazott kamatláb (%) x_4, munkanélküliségi ráta (%) x_5 (az adatok leírása megtalálható az adatfájlban).

Az előző példához hasonlóan csak OLS becslést használunk és tengelymetszetet teszünk a modellekbe. A modellszelekciós kritériumok két modellt javasoltak:

$$y = 9541.4 - 57.9x_1 - 595.9x_2 - 34.3x_4\ , \tag{8}$$

$$y = 13386 - 82x_1 + 659x_2 + 11x_3 - 39x_4\ . \tag{9}$$

A Shapley-féle értékelés ($TSS = 5719200$):

$$(692900; 559000; 593000; 1125600; 546800)\ , \tag{10}$$

tehát a változók fontossági sorrendben: x_4, x_1, x_3, x_2, x_5. Egy új módszer illusztrálása céljából végezzünk további elemzéseket ezen a példán.

Tekintsük a magyarázó változók korrelációs-mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0.9568 & 0.9797 & -0.0324 & -0.2195 \\ 0.9568 & 1.0000 & 0.9059 & -0.1484 & -0.4563 \\ 0.9797 & 0.9059 & 1.0000 & 0.0765 & -0.0887 \\ -0.0324 & -0.1484 & 0.0765 & 1.0000 & 0.2949 \\ -0.2195 & -0.4563 & -0.0887 & 0.2949 & 1.0000 \end{pmatrix}\ . \tag{11}$$

[9] TSS=30.8184

Az x_1, x_2, x_3 változók erősen korrelálnak egymással, míg az x_4, x_5 változók gyengén korreláltak. Az x_1, x_2, x_3 változókat vonjuk össze egy szuperváltozóba, amit úgy kapunk, hogy csak azokat a koalíciókat engedjük meg, ahol a fent említett három változó együtt szerepel vagy együtt nem szerepel. Az így kapott három ,,változós" modellcsoport Shapley-féle értékelése (az első érték az új szuperváltozó értékelése):

$$(2036600; 1103800; 376800) . \tag{12}$$

Látható, hogy ha az eredeti értékelésben (lsd. (10)) az első három változó (amiket összevontunk) értékeléseit összeadjuk, akkor kisebb értéket kapunk (32.26%), mint az új modellben, ahol ez a három magyarázó változó együttes erejét mérjük (35.61%). Ez a jelenség azt mutatja, hogy az eredeti modellcsoport Shapley-féle értékelése alulbecsüli x_1, x_2, x_3 változók együttes fontosságát.

6 Összegzés

A cikk célja, hogy megmutassuk, játékelméleti, pontosabban kooperatív játékelméleti fogalmakkal kezelhetőek változóértékelési problémák. *Semmiképpen sem tekintjük a cikket teljesnek abban az értelemben, hogy teljes körűen és minden pontban helyesen használta az ökonometriai, statisztikai módszereket, bár nem is ez volt a cél.* Azt céloztuk meg, hogy elméletileg megalapozzuk, és példákon keresztül megmutassuk, hogy az ökonometria, statisztika területen is használhatóak játékelméleti fogalmak, eredmények.

A cikk fő eredménye, hogy a regressziós játék fogalmának bevezetésével egy olyan jól definiált játékosztályt kaptunk (22. definíció), amely elméleti szempontból jól jellemezhető. A jellemzések az alkalmazások során (5. szakasz) jól mutatják, hogy mely utakon érdemes elindulni, mely játékelméleti fogalmak, eredmények átültetésére van esély. Elméleti értelemben a 27. tétel a cikk fő eredménye, amely azt mutatja meg, hogy a Shapley-érték alkalmazása magyarázó változók értékelésére regressziós modellekben védhető módszer.

Ami a további kutatásokat illeti, gazdag lehetőségeket látunk konkrét, *valós modellezési*[10], és elméleti ökonometriai (módszertani) elemzéseknek a tárgyalt területen. A játékelmélet oldaláról nézve, további megoldás koncepciók használata, más axiomatizálási megközelítések érvényességének vizsgálata, illetve újabb ökonometriai, statisztikai problémák játékelméleti megközelítésében látunk kutatási lehetőségeket.

[10] Terjedelmi okokból nem került bele ebbe a munkába a Shapley-érték alkalmazása tényleges modellszelekciós problémákra. Ennek a területnek tárgyalása elméleti szempontból az ú.n. semi-value–k ismertetését, gyakorlati szemszögből pedig a különböző modellszelekciós kritériumok bevezetését, tárgyalását igényelné, ami több, mint megduplázta volna a cikk terjedelmét.

Irodalom

1. Albrecht, J., D. Francois, K. Schoors: A Shapley decomposition of carbon emissions without residuals, *Energy Policy*, **30**, 727–736. (2002)
2. Chevan, A., M. Sutherland: Hierarchical Partitioning, *The American Statistician*, **45**, 90–96. (1991)
3. Cox, L. A. Jr.: A new measure of attributable risk for public health applications, *Management Science* **31**, 800–813. (1985)
4. Forgó F., J. Szép, F. Szidarovszky: *Introduction to the theory of games: concepts, methods, applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999)
5. Forgó F., Pintér M., Simonovits A., Solymosi T.: *Játékelmélet* (elektronikus jegyzet), http://www.bke.hu/~opkut/letoltheto_anyagok.html (2006)
6. Gefeller, O., M. Land, G. E. Eide: Averaging Attributable Fractions in the Multifactorial Situation: Assumptions and Interpretation, *Journal of Clinical Epidemiology* **51**, 437–441. (1998)
7. A gretl programcsomag, http://gretl.sourceforge.net/
8. Grömping, U.: Estimators of Relative Importance in Linear Regression Based on Variance Decomposition, *The American Statistician* **61**, 139–146. (2007)
9. Hart, S., A. Mas-Colell: Potential, value, and consistency, *Econometrica* **57**, 589–614. (1989)
10. Lipovetsky, S., M. Conklin: Analysis of Regression in Game Theory Approach, *Applied Stochastic Models in Business and Industry* **17**, 319–330. (2001)
11. Owen, G.: *Game Theory*, Academic Press, Inc. (1982)
12. Peleg, B., P. Sudhölter: *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London (2003)
13. Ramanathan, R.: *Bevezetés az ökonometriába alkalmazásokkal*, Panem Könyvkiadó, Budapest (2003)
14. Shapley, L. S., *A Value for n-Person Games*, Contributions to the Theory of Games Volume II (Annals of Mathematical Studies **28**, szerk.: Kuhn, H. W.–Tucker, A. W.) 307–317. (1953)
15. Shapley, L. S.: *A Comparison of Power Indices and a Nonsymmetric Generalization* P-5872, The Rand Corporation, Santa Monica, CA. (1977)
16. Shorrocks, A. F.: *Decomposition Procedures for Distributional Analysis: A Unified Framework Based on the Shapley Value*, working paper (1999)
17. Stufken, J.: *On Hierarchical Partitioning*, The American Statistician **46**, 70–71. (1992)
18. Wan, G.: *Poverty Accounting by Factor Components*, United Nations University Research Paper No. 2006/63 (2006)
19. Zhang, Y., G. Wan: *Why do Poverty Rates Differ From Region to Region*, United Nations University Research Paper No. 2005/56 (2005)

REGRESSION GAMES

A solution of a TU coalitional game is an allocation of the payoff (utility) achieved by the players together. In a regression model, the evaluation of the explanatory variables can be an allocation of the overall fit got by those together. Therefore a regression model can be taken as a TU coalitional game, in which the explanatory variables are the players. The various solution concepts of TU coalitional games can help the modeler in recognizing the important explanatory (regressor) variables and make her possible to understand the examined model more. In this paper we build a solid mathematical background for this problem. We use the Shapley value for evaluating the explanatory variables in regression models.

REDUNDANCIA KOOPERATÍV JÁTÉKOK MEGOLDÁSAIBAN I: A MAG ÉS A SZŰKMAG[1]

SOLYMOSI TAMÁS
Budapesti Corvinus Egyetem

1 Bevezetés, alapfogalmak

A kooperatív játékok az olyan többszereplős döntési helyzetek matematikai modelljei, amelyekben a szereplők együttműködhetnek egymással, ha az számukra előnyös. Mint minden a játékelmélet eszközeivel vizsgált helyzetben, a szereplők itt is szuverén döntéshozók, akik csak részleges befolyással bírnak a helyzet kimenetelére, ugyanakkor —a többi szereplő döntésétől való függés keretein belül— képesek a saját érdekeik érvényesítésére, például úgy, hogy nem vesznek részt egy számukra nem kedvező együttműködésben.

Az elemzéshez használt modellek fontos sajátossága az, hogy nem részletezik a játék időbeli lefolyását, a szereplők döntési lehetőségeit, az információk elérhetőségét, az alkufolyamatokat, hanem csak az egyes társulások által elérhető kimeneteleket adják meg. Jelentős mértékben megkönnyíti a kooperatív döntési helyzet modellezését és vizsgálatát, ha az elérhető kimeneteleknek van egy olyan tetszőlegesen osztható és a szereplők között átvihető eleme, ami egy minden szereplő számára azonos megítélési skálát adhat. Ilyen esetben ugyanis ezen az egységes skálán mérhetjük az egyes társulások együttműködési potenciálját. Jelen dolgozatban csak ilyen kooperatív döntési helyzetekkel foglalkozunk, és a feltételezett univerzális érték-közvetítő eszközt *pénz*nek fogjuk hívni. Habár tudjuk jól, hogy a valóságban egy adott pénzmennyiség megszerzése vagy elvesztése nem ugyanazt jelenti egy koldusnak, mint egy milliomosnak, mégis számos esetben jogos a szereplők azonos értékelését feltételezni.

Egy ilyen „egy-az-egyben” átváltható egyéni hasznosságokkal rendelkező helyzet matematikai modelljét TU-játéknak (transferable utility game) hívjuk, de a továbbiakban elhagyjuk a TU jelzőt. Egy *játék* alapvetően két összetevőből áll: a játékosok nemüres, véges N halmazából, és egy $v : 2^N \to \mathbb{R}$ koalíciós függvényből, amire az egyetlen megkötés az, hogy $v(\emptyset) = 0$ teljesüljön. A koalíciós függvény tehát a játékosok tetszőleges $S \subseteq N$ *koalíciójára* megadja annak $v(S)$ „értékét” a feltételezett egységes hasznosság-skálán.

[1] Beérkezett: 2008. március 16. Ezen munka a szerző Bolyai János Kutatási Ösztöndíja alatt készült, bemutatását a First Spain Italy Netherlands Meeting on Game Theory (Maastricht, NL, 2005) konferencián az OTKA T46194 pályázat támogatta. Köszönet illeti Biró Pétert a különböző kéziratváltozatok gondos átolvasásáért, pontosító észrevételeiért, és különösen a magra vonatkozó megállapítások élesítését eredményező hasznos javaslataiért. Természetesen a fennmaradó esetleges hibák kizárólag a szerző számlájára írandók (az alábbi címen). E-mail: tamas.solymosi@uni-corvinus.hu.

Egy $S \subseteq N$ koalíció *tagsági vektora* alatt azt az $e^S \in \{0,1\}^N$ vektort értjük, amelynek az $i \in S$-hez tartozó komponenseire $e_i^S = 1$, míg az $i \in N \setminus S$-hez tartozó komponenseire $e_i^S = 0$ teljesül. A nemüres koalíciók halmazát $\mathcal{N}$-nel fogjuk jelölni, azaz $\mathcal{N} = 2^N \setminus \{\emptyset\}$, a valódi részkoalíciók halmazát pedig $\mathcal{N}_+$-al, azaz $\mathcal{N}_+ = 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$.

Itt csak olyan döntési helyzetekkel foglalkozunk, amelyekben joggal feltehető, hogy az összes szereplő együttműködik és létrejön az N *nagykoalíció*. Ekkor ugyanis a fő kérdés ,,csak" az, hogy miként részesedjenek az egyes játékosok a közösen elérhető $v(N)$-ből, de nem kell törődnünk a koalíciók formálódásának — az osztozkodáshoz egyébként szorosan kapcsolódó — problémájával.

Az egységes hasznosság-skálán mérve jelölje $x_i \in \mathbb{R}$ az $i \in N$ játékos részesedését. Az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy x_i az i játékos *kifizetése*. Az (N, v) játék által leírt kooperatív döntési helyzet egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_i)_{i \in N} \in \mathbb{R}^N$ vektorral adjuk meg, amitől csak azt követeljük meg, hogy *szétosztás*[2] legyen, azaz teljesítse a $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ egyenlőséget[3]. Ez magában foglalja egyrészt a nagykoalíció általi elérhetőséget / megvalósíthatóságot $\left(\sum_{i \in N} x_i \le v(N)\right)$, másrészt a nagykoalíció általi elfogadhatóságot $\left(\sum_{i \in N} x_i \ge v(N)\right)$.

Az itt tárgyalt megoldások abban térnek el egymástól, hogy ezen alaphalmaz elemeire milyen egyéb kívánalmakat rónak ki. Közös bennük viszont az, hogy csak a figyelembe vett koalíciók többletétől függnek. Egy adott (N, v) játékban az $S \subseteq N$ koalíciónak az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésnél vett *többlete* alatt az $e(S, x) = v(S) - x(S)$ számot értjük, ahol $x(S) = e^S \cdot x$ jelöli a koalíciónak jutó összkifizetést. A többlet nemcsak azt jelzi, hogy az adott kifizetés elérhető-e a koalíció számára, hanem mintegy azt is ,,méri", hogy a koalíció mennyire ,,elégedetlen ill. elégedett" (ha a többlet pozitív ill. negatív) a neki jutó összkifizetéssel. Vegyük észre, hogy tetszőleges (N, v) játékban tetszőleges $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésnél $e(\emptyset, x) = 0$. A játék lehetséges kimeneteleinek halmaza a többlettel kifejezve:

$$\mathbf{pIm} = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : e(N, x) = 0 \right\}. \tag{1}$$

Állapítsuk meg, hogy a szétosztások halmaza bármely játékban egy hipersík, tehát nem üres.

A szóbajöhető kimenetelekkel szemben támasztott kívánalmak egyik alaptípusa a bizonyos koalíciók általi elfogadhatóság. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játékban az $x \in \mathbb{R}^N$ kifizetésvektor *elfogadható* az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \ge v(S)$. Egyébként ugyanis az S koalíció x-nél vett $e(S, x)$ többlete pozitív lenne, s ennek szétosztásával úgy kaphatna többet az S mindegyik tagja, hogy összességében nem lépnék túl az általuk elérhető $v(S)$-t, az S tehát megalapozottan utasítaná el az x-et.

Amennyiben az összes egyszereplős koalíció általi elfogadhatóságot előír-

[2] Angolul *preimputation* a leginkább elterjedt szóhasználat.

[3] E követelményt szokás hatékonyságnak / Pareto-optimalitásnak is nevezni.

juk, akkor az

$$\mathbf{Im} = \Big\{ x \in \mathbf{pIm} : e(\{i\}, x) \le 0 \quad \forall i \in N \Big\} \tag{2}$$

halmazba tartozó kifizetésvektorokat tekintjük. Az ilyen kimeneteleket *elosztás*nak[4] nevezzük. Általánosan, ha az elfogadhatóságot megköveteljük egy bizonyos $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ családba tartozó minden koalícióra, akkor a szóbajöhető kimenetelek

$$\mathbf{Co}(\mathcal{B}) = \Big\{ x \in \mathbf{pIm} : e(S, x) \le 0 \quad \forall S \in \mathcal{B} \Big\} \tag{3}$$

halmazát *$\mathcal{B}$-mag*nak hívjuk. Az $\mathcal{N}_+$-magot röviden csak *mag*nak[5] nevezzük, és egyszerűen **Co**-val jelöljük. A $\mathcal{B}$-mag axiomatikus jellemzésével kapcsolatban Pulido és Sánchez-Soriano (2006), illetve Llerena (2007) munkáit említjük.

Dolgozatunkban először azt vizsgáljuk, hogy a $\mathcal{B}$-mag miként függ a figyelembe vett koalíciók $\mathcal{B}$ családjától. Melyek azok a $\mathcal{B}$-beli koalíciók, amelyek elhagyhatók anélkül, hogy a $\mathcal{B}$-mag megváltozna? Cikkében e kérdés fontosságát hangsúlyozza Ray (1989).

2 A $\mathcal{B}$-mag

Ebben a fejezetben is egy rögzített (N, v) játék esetén vizsgáljuk a magkoncepciót, ezért a jelölésekben ezeket a paramétereket nem tüntetjük fel. Továbbra is $\mathcal{N}_+ = 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ jelöli a valódi koalíciók halmazát.

Kezdjük a $\mathcal{B}$-mag nemürességének kérdésével. Legyen a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ koalíciócsalád rögzített. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék *$\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott*, ha

$$\Big[\sum_{T \in \mathcal{B}} \gamma_T \, e^T = e^N \, ; \; \gamma_T \ge 0 \quad \forall T \in \mathcal{B} \Big] \implies \sum_{T \in \mathcal{B}} \gamma_T \, v(T) \le v(N) \, , \tag{4}$$

azaz ha a szétosztandó $v(N)$ nem kevesebb, mint az N bármelyik $\mathcal{B}$-beli koalíciókkal történő kiegyensúlyozott felbontásának az értéke.

A következő állítás a TU-játékokban a mag nemürességét jellemző, a Bondareva (1963), illetve Shapley (1967) nevéhez köthető klasszikus eredmény kézenfekvő általánosítása. Bizonyítását is csak a teljesség kedvéért és a később alkalmazott gondolatmenetek szemléltetése céljából adjuk meg. További általánosításokra vonatkozó hasonló eredmények találhatók Faigle (1989) munkájában.

1. Állítás. *Egy játék $\mathcal{B}$-magja pontosan akkor nem üres, ha a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott.*

Bizonyítás. A (3) definíció alapján a $\mathcal{B}$-mag pontosan akkor nem üres, ha

[4] Angolul *imputation* a leginkább elterjedt szóhasználat.
[5] Angolul *core*.

van lehetséges megoldása az alábbi lineáris programozási feladatnak:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \min \ e^{\emptyset}\cdot x & \\
e^T\cdot x & \geq & v(T) \quad \forall T\in\mathcal{B} \\
-\,e^N\cdot x & = & -v(N) \\
 & x\in I\!R^N\,. &
\end{array}
\tag{5}
$$

Az azonosan 0 célfüggvény miatt az (5) feladatnak pontosan akkor van lehetséges megoldása, ha van optimális megoldása (amikor persze az optimum értéke 0). A dualitási tétel szerint ez pontosan akkor következik be, ha az (5) feladat duáljának, azaz a

$$
\begin{array}{c}
\max \sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, v(T) - \mu_N v(N) \\
\sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, e^T - \mu_N e^N = e^{\emptyset} \\
\lambda_T\geq 0\,, \quad \mu_N\in I\!R\,, \quad \forall T\in\mathcal{B}
\end{array}
\tag{6}
$$

lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása (amikor persze a duál optimumérték is 0).

Mivel a (6) feladat bármely lehetséges megoldásának tetszőleges pozitív skalárszorosa is a (6) egy lehetséges megoldása, így a (6) feladatnak pontosan akkor van optimális megoldása, ha minden nemtriviális $\big((\lambda_T)_{T\in\mathcal{B}},\mu_N\big)$ lehetséges megoldására a célfüggvényérték nempozitív. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott. Egyrészt ugyanis a (6) tetszőleges nemtriviális $\big((\lambda_T)_{T\in\mathcal{B}}\ ,\mu_N\big)$ lehetséges megoldásában $\mu_N>0$ kell legyen, így a $\big(\gamma_T=\frac{\lambda_T}{\mu_N}\big)_{T\in\mathcal{B}}$ egy olyan súlyvektor, amire teljesül a (4) implikáció feltétele. Másrészt, a (4) implikáció feltételét teljesítő tetszőleges $\big(\gamma_T\big)_{T\in\mathcal{B}}$ súlyvektorra a kibővített $\big((\gamma_T)_{T\in\mathcal{B}}\ ,1\big)$ vektor a (6) egy lehetséges megoldása. Harmadrészt pedig a (6) egy lehetséges megoldására a célfüggvényérték nyilvánvalóan pontosan akkor nempozitív, ha a hozzá (kölcsönösen egyértelműen) rendelt súlyvektorra teljesül a (4) implikáció következtetése. □

Legyen a rögzített (N,v) játék $\mathcal{B}$-magja nemüres. Azt mondjuk, hogy az $S\in\mathcal{B}$ koalíció *redundáns a $\mathcal{B}$-magra nézve*, ha $\mathbf{Co}(\mathcal{B}\setminus\{S\})=\mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Mivel nyilván mindig $\mathbf{Co}(\mathcal{B}\setminus\{S\})\supseteq\mathbf{Co}(\mathcal{B})$, egy koalíció akkor redundáns, ha figyelmen kívül hagyása nem változtatja meg a megoldást, újabb kifizetésvektorok nem kerülnek a magba.

A redundancia jellemzésében kulcsszerepet játszik egy, a (6)-hoz nagyon hasonló feladattípus. Valójában csak a feltételi egyenletrendszer jobb oldalát változtatjuk a nullvektorról az adott koalíció tagsági vektorára. Tetszőleges $S\subseteq N$-re és $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{N}_+$-ra jelölje $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ az alábbi lineáris programozási feladatot:

$$
\mathrm{LP}(S,\mathcal{B}): \quad
\begin{aligned}
&\max \sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, v(T) - \mu_N v(N) \\
&\sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, e^T - \mu_N e^N = e^S \\
&\lambda_T \ge 0\,, \quad \mu_N \in I\!R\,, \quad \forall T \in \mathcal{B}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Az $S \neq N$ koalíció egy *gyenge felbontása* alatt az $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ egy olyan lehetséges megoldását értjük, amelyben $\lambda_S = 0$. Amennyiben a $\mu_N = 0$ is teljesül (vegyük észre, hogy minden lehetséges megoldásban $\mu_N \ge 0$), akkor a gyenge jelzőt elhagyhatjuk. Az S egy *felbontása* tehát csak az S valódi részhalmazaiból állhat. Az $N \notin \mathcal{B}$ miatt a nagykoalíció gyenge felbontásáról nem beszélhetünk, felbontásáról viszont igen, lásd a (4) implikáció feltételét. Az N felbontásai tehát pontosan megfeleltethetők a $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott koalíció-családoknak.

Fontos a következő észrevétel.

2. Megjegyzés. Bármely $S \neq \emptyset$ koalícióra, ha az $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$-nek van lehetséges megoldása, akkor van optimális megoldása is, hiszen a célfüggvénye csak egy olyan lehetséges félegyenes mentén tarthatna a $+\infty$-be, amelyik egy lehetséges félegyenes az $\mathrm{LP}(\emptyset,\mathcal{B})$ feladatban is, de mivel a két célfüggvény azonos, ez ellentmondana a $\mathcal{B}$-mag feltételezett nemürességének, ugyanis a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozottságának eldöntését lehetővé tevő, homogén feltételrendszerű (6) feladat éppen az $\mathrm{LP}(\emptyset,\mathcal{B})$. (Ez a feladat egyébként más megoldási koncepciók vizsgálatánál is hasznos, erre vonatkozóan lásd Derks és Reijnierse (1998) cikkét.)

Jelölje $\max \mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ az $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ feladat optimumértékét, illetve legyen $\max \mathrm{LP}(S,\mathcal{B}) = -\infty$, ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

3. Állítás. *Egy $S \in \mathcal{B}$ koalíció pontosan akkor redundáns a játék nemüres $\mathcal{B}$-magjára nézve, ha $v(S) \le \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$.*

Bizonyítás. Legyen a játék $\mathcal{B}$-magja nemüres. Ekkor nyilván a $\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$-mag sem üres. Tekintsük az $\mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$ duálját:

$$
\begin{aligned}
&\min\ e^S \cdot x \\
e^T \cdot x &\ \ge\ v(T) \quad \forall T \in \mathcal{B}\setminus\{S\} \\
-\,e^N \cdot x &\ =\ -v(N) \\
&x \in I\!R^N\,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Itt a lehetséges megoldások halmaza éppen (a nemüres) $\mathbf{Co}\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$. Az S tehát pontosan akkor redundáns a $\mathcal{B}$-magra nézve, ha a (8) feladat minden lehetséges megoldására az $e^S \cdot x \ge v(S)$ egyenlőtlenség is teljesül. Ez viszont ekvivalens azzal, hogy a minimum is $\ge v(S)$, és a dualitás tétel miatt azzal is, hogy $\max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B}\setminus\{S\}\big) \ge v(S)$. □

A fentiekből következik, hogy egy koalíciónak a $\mathcal{B}$-magra való redundanciája eldönthető egy $|\mathcal{B}|$-változós, $|N|$-feltételes lineáris programozási feladat megoldásával.

A 3. állítás szerint a nemüres $\mathcal{B}$-magra nézve redundáns koalíciók pontosan a *gyengén $\mathcal{B}$-majorálható* koalíciók, vagyis azok, amelyeknek van az értéküket elérő vagy azt meghaladó értékű $\mathcal{B}$-beli gyenge felbontásuk. A gyengén nem $\mathcal{B}$-majorálható (vagyis a $\mathcal{B}$-magra nézve nem redundáns) koalíciókra azt mondjuk, hogy *erősen alapvető*ek[6] a $\mathcal{B}$-ben. Jelölje $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$ ezek halmazát, azaz legyen

$$\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \Big\{ S \in \mathcal{B} : v(S) > \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big) \Big\} . \tag{9}$$

Definiáljuk továbbá az

$$\mathcal{SVH}(\mathcal{B}) = \Big\{ S \in \mathcal{B} : v(S) \geq \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big) \Big\} .$$

koalíciócsaládot.

A 3. állítás bizonyításából világos, hogy a $\mathcal{B}$-ben erősen alapvető koalíciókon kívül a

$$\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \Big\{ S \in \mathcal{B} : v(S) = \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big) \Big\}$$

halmazbeli koalíciókhoz tartozó $e^S \cdot x \geq v(S)$ félterek is támaszféltereі a $\mathcal{B}$-magnak, hiszen ilyenkor a (8) feladatnak van optimális megoldása, és ez éppen az $e^S \cdot x = v(S)$ határsíkra esik. Akkor miért redundánsak mégis? A válasz az, hogy egyenként, a többiek megtartása mellett valóban elhagyhatók, de meghatározóvá válhatnak, ha több ilyen redundáns koalíciót is figyelmen kívül hagyunk. A jelenség szemléltetésére nézzük a következő 3-szereplős példát.

4. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3\}$, a koalíciós függvény pedig $v(S) = |S|$ minden $S \subseteq N$-re.

Legyen először $\mathcal{B} = \mathcal{N}_+$. A mag egyetlen eleme az $(1, 1, 1)$ szétosztás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \emptyset$ és $\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Például, $v(\overline{1}) = v(\overline{12}) + v(\overline{13}) - v(\overline{123}) = \max \mathrm{LP}(\overline{1}, \mathcal{B} \setminus \{\overline{1}\})$, illetve $v(\overline{12}) = v(\overline{1}) + v(\overline{2}) = \max \mathrm{LP}\big(\overline{12}, \mathcal{B} \setminus \{\overline{12}\}\big)$.

Másodszor, legyen $\mathcal{B} = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}\}$. A $\mathcal{B}$-mag egyetlen eleme továbbra is az $(1, 1, 1)$ szétosztás. Ugyanakkor most már $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ és $\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \emptyset$, vagyis az egyszereplős koalíciók elhagyása után erősen alapvetővé váltak az addig redundáns kétszereplős koalíciók.

Jelölje $\max \mathrm{LP}_0(S, \mathcal{B})$ annak az $\mathrm{LP}_0(S, \mathcal{B})$ feladatnak az optimumértékét, amelyet az $\mathrm{LP}(S, \mathcal{B})$ feladatból a $\mu_N = 0$ feltétel hozzáadásával (másképpen, a μ_N változó elhagyásával) kapunk. Most is legyen $\max \mathrm{LP}_0(S, \mathcal{B}) = -\infty$, ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása. A

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \Big\{ S \in \mathcal{B} \cup \{N\} : v(S) > \max \mathrm{LP}_0\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big) \Big\} \tag{10}$$

[6] Angolul *strongly vital*, de az elnevezés új.

halmazba tartozó koalíciókra azt mondjuk, hogy *alapvetőek*[7] a $\mathcal{B}$-ben. Vegyük észre, hogy $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, mert minden a tartalmazásra nézve minimális $\mathcal{B}$-beli koalíció alapvető $\mathcal{B}$-ben, hiszen a megfelelő (10)-beli LP_0-nak nincs lehetséges megoldása. Továbbá $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{B})$, hisz nyilvánvalóan $\max \mathrm{LP} \geq \max \mathrm{LP}_0$. A 4. példabeli első esetben $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \emptyset \subset \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \mathcal{V}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, tehát az erősen alapvető koalíciók halmaza lehet üres is, a tartalmazások pedig szigorúak. A második esetben viszont $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \mathcal{V}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

5. Megjegyzés. Az 1. állítás bizonyításából világos, hogy egy játék $\mathcal{B}$-magja pontosan akkor nem üres, ha $v(N) \geq \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big)$. Tehát, ha a $\mathcal{B}$-mag nem üres, de az N nagykoalíció nem alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor egyrészt $v(N) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \gamma_T \, v(T)$ valamilyen pozitív γ_T súlyokkal kiegyensúlyozott $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{N\}$ koalíciócsaládra, másrészt az N akármelyik ilyen majorálásában szereplő bármelyik T koalíció kifizetése konstans a $\mathcal{B}$-magon. Pontosabban, $e^T \cdot x = v(T)$ tetszőleges $x \in \mathbf{Co}(\mathcal{B})$-re, ugyanis a

$$v(N) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \gamma_T \, v(T) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \gamma_T \, e^T \cdot x = e^N \cdot x = v(N)$$

láncban szereplő egyenlőtlenségnek, sőt az összegzésben szereplő mindegyik $v(T) \leq e^T \cdot x$ tag-egyenlőtlenségnek is egyenlőségként kell teljesülnie.

Az eddig bevezetett fogalmak szemléltetésére nézzük a következő 4-szereplős példát.

6. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, a koalíciós függvény pedig $v(\overline{12}) = 0$, $v(\overline{23}) = 6$, $v(\overline{24}) = 6$, $v(\overline{34}) = 6$, $v(\overline{123}) = 6$, $v(\overline{124}) = 6$, $v(\overline{134}) = 7$, $v(\overline{234}) = 9$, $v(N) = 10$, és $v(T) = 0$ minden egyéb T koalícióra.

Tekintsük a koalíciók $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{34}, \overline{134}, \overline{234}\} \subset \mathcal{N}_+$ családját. Az *1. táblázatban* feltüntettük ezen koalíciók besorolását, illetve a koalíció értékének összevetését a megfelelő LP egy-egy maximális értékű megoldásával is.

S	$v(S)$	$\mathcal{V}(\mathcal{B})$	$\mathcal{SV}(\mathcal{B})$	$\mathcal{H}(\mathcal{B})$	$\max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$
$\overline{1}$	0	+	+	−	$v(\overline{1}) > v(\overline{12}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{2}$	0	+	−	−	$v(\overline{2}) < v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{3}$	0	+	−	−	$v(\overline{3}) < v(\overline{23}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{4}$	0	+	−	−	$v(\overline{4}) < v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{12}$	0	−	−	−	$v(\overline{12}) < 2v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{23}$	6	+	+	−	$v(\overline{23}) > v(\overline{2}) + v(\overline{3})$
$\overline{24}$	6	+	+	−	$v(\overline{24}) > v(\overline{2}) + v(\overline{4})$
$\overline{34}$	6	+	−	+	$v(\overline{34}) = v(\overline{134}) + v(\overline{234}) - v(N)$
$\overline{134}$	7	+	+	−	$v(\overline{134}) > v(\overline{1}) + v(\overline{34})$
$\overline{234}$	9	−	−	+	$v(\overline{234}) = \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{34})$

1. táblázat

[7] Angolul *vital*.

Minden lehetséges típusra akad példa, a $(+,+,+)$, $(-,+,+)$ és $(-,+,-)$ kombinációk ugyanis nyilván nem fordulhatnak elő. Az $\overline{12}$ nem alapvető és nem is $\mathcal{SVH}$-beli, mert $v(\overline{12}) = v(\overline{1}) + v(\overline{2}) = \max \mathrm{LP}_0 < \max \mathrm{LP}$. A $\overline{234}$ sem alapvető, viszont $\mathcal{H}$-beli, ugyanis $v(\overline{234}) = \max \mathrm{LP}_0 = \max \mathrm{LP}$. Említést érdemel még az alapvető és $\mathcal{H}$-beli (és így nem erősen alapvető) $\overline{34}$ koalíció is, amire $\max \mathrm{LP}_0 < v(\overline{34}) = \max \mathrm{LP}$. Megjegyezzük, hogy mindkét $\mathcal{H}$-beli koalíciónak van maximális értékű, csak $\mathcal{SV}$-beli koalíciókkal történő gyenge majorálása is, hiszen a táblázatban megadottakon kívül $v(\overline{34}) = v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + 2v(\overline{134}) - 2v(N)$, illetve $v(\overline{234}) = v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$ is teljesül.

Az N alapvető a $\mathcal{B}$-re nézve, hiszen $v(N) = 10 > 9.5 = \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big) = \frac{1}{2}v(\overline{1}) + \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{134})$. A játék $\mathcal{B}$-magja tehát nem üres (lásd az 5. megjegyzést), sőt maximális-dimenziós, mivel csúcspontjai az affin független $(1,3,3,3)$, $(0,2,4,4)$, $(0,3,3,4)$, $(0,3,4,3)$ szétosztások.

Vizsgálatainkban fontos szerepet játszanak majd a következő észrevételek.

7. Lemma. *Legyen a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott és $S \in \mathcal{B}$ tetszőleges. Ekkor*

(i) $S \notin \mathcal{V}(\mathcal{B})$ *esetén* $\mathcal{V}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{V}(\mathcal{B})$;

(ii) $S \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ *esetén* $\mathcal{SVH}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ *és* $\mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SV}(\mathcal{B})$;

(iii) $S \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ *esetén* $\mathcal{SVH}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \setminus \{S\}$;

(iv) ha N *alapvető* $\mathcal{B}$*-ben, akkor* $S \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ *esetén* $\mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SV}(\mathcal{B})$.

Bizonyítás. Először a (iv) kijelentést igazoljuk. Azért, hogy gondolatmenetünkből a többi kijelentés is könnyen adódjon, a $v(N) > \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big)$ feltevéssel majd csak akkor élünk, ha elengedhetetlenül szükséges. Addig csak egy tetszőleges $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékot feltételezünk. Mivel a nagykoalíción kívül előforduló összes koalíció $\mathcal{B}$-beli, így az átláthatóság kedvéért ezt csak a feltétlenül szükséges esetekben tüntetjük fel.

Legyen az $S \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor az $\mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$ feladatnak van olyan $\big((\lambda_R)_{R \neq S}, \mu_N\big)$ optimális megoldása, amire

$$v(S) \leq \sum_{R \neq S} \lambda_R v(R) - \mu_N v(N) \,. \tag{11}$$

Mivel bármely $T \in \mathcal{B}$-re nyilván $\max \mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B} \setminus \{T\}\big) \geq \max \mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B} \setminus \{S, T\}\big)$, így ha $T \in \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ akkor $T \in \mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$. Kapjuk tehát, hogy $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$.

A fordított irányú tartalmazás belátásához tegyük fel, hogy $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ és persze $T \neq S$ (ha nincs két különböző nem erősen alapvető koalíció $\mathcal{B}$-ben, akkor nincs mit igazolni). Ekkor van olyan $\big((\alpha_R)_{R \neq T}, \beta_N\big)$ optimális megoldása az $\mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B} \setminus \{T\}\big)$ feladatnak, amire

$$v(T) \leq \alpha_S v(S) + \sum_{R \neq S, T} \alpha_R v(R) - \beta_N v(N) \,. \tag{12}$$

Két eset lehetséges.

1. Ha $\alpha_S = 0$, akkor $T \notin \mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$, vagyis a T nem erősen alapvető a $\mathcal{B} \setminus \{S\}$ koalíciócsaládban sem.

2. Ha viszont $\alpha_S > 0$, akkor a (11) egyenlőtlenség α_S-szeresét a (12) egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$(1-\alpha_S\lambda_T)v(T) \leq \sum_{R\neq S,T} (\alpha_R+\alpha_S\lambda_R)v(R)-(\beta_N+\alpha_S\mu_N)v(N)\ . \quad (13)$$

   Természetesen, a megfelelő felbontásokkal ugyanezt a műveletet elvégezve a tagsági vektorok közötti analóg összefüggés egyenlőségként teljesül. Két aleset lehetséges.

   (i) Ha $1-\alpha_S\lambda_T > 0$, akkor a (13) egyenlőtlenséget ezzel leosztva kapunk egy olyan lehetséges megoldását az $\mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B}\setminus\{S,T\}\big)$ feladatnak, amire a célfüggvény értéke legalább $v(T)$. Tehát a T nem erősen alapvető a $\mathcal{B} \setminus \{S\}$ koalíciócsaládban sem.

   (ii) Ha viszont $1-\alpha_S\lambda_T \leq 0$, akkor a (13) egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk a

$$(\beta_N+\alpha_S\mu_N)v(N) \leq (\alpha_S\lambda_T-1)v(T) + \sum_{R\neq S,T} (\alpha_R+\alpha_S\lambda_R)v(R) \quad (14)$$

   összefüggést, amiben a koalíciós értékek súlyai már mind nemnegatívak. A bal oldalon a $v(N)$ együtthatója csak $\mu_N = \beta_N = 0$ esetben lehetne nulla, de ekkor egyrészt az α_S feltételezett pozitivitása és az $\mathrm{LP}_0\big(T, \mathcal{B}\setminus\{T\}\big)$ feltételrendszerében szereplő tagsági vektorok nemnegativitása miatt $S \subset T$, másrészt a feltételezett $\lambda_T \geq 1/\alpha_S$ pozitivitása és az $\mathrm{LP}_0\big(S, \mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$ feltételrendszerében szereplő tagsági vektorok nemnegativitása miatt $T \subset S$ kellene legyen, ami egyszerre nyilván lehetetlen. A (14) egyenlőtlenséget leosztva a pozitív $(\beta_N+\alpha_S\mu_N)$-nel kapunk egy olyan lehetséges megoldását az $\mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B}\setminus\{S,N\}\big)$ feladatnak, amire a célfüggvény értéke legalább $v(N)$. Kapjuk, hogy

$$v(N) \leq \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B}\setminus\{S,N\}\big) \leq \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B}\setminus\{N\}\big) \leq v(N)\ , \quad (15)$$

   ahol az utolsó egyenlőtlenség a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozottsága miatt igaz. A (15)-beli mindegyik egyenlőtlenségnek tehát egyenlőségként kell teljesülnie. A (iv) kijelentés feltétele viszont ezt kizárja, így ilyen játékokban ez az aleset nem fordulhat elő.

Több (al)eset nem lévén a (iv) kijelentés bizonyítása ezzel kész.

A (iii) kijelentés nagyon hasonlóan igazolható. Egyrészt, nyilván $\mathcal{SVH}(\mathcal{B})\setminus\{S\} \subseteq \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$. Másrészt, legyen $S \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ és $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$. Ekkor $T \neq S$, a (11) egyenlőségként, a (12) viszont szigorú egyenlőtlenségként teljesül. Ha a (12)-ben $\alpha_S = 0$, akkor $T \notin \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$. Ha viszont

$\alpha_S > 0$, akkor a fenti gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy a (13) is szigorú egyenlőtlenségként áll fenn. A 2(i) alesetben azt kapjuk, hogy $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$. A 2(ii) aleset pedig a (14), illetve a (15)-beli első egyenlőtlenség szigorú volta miatt zárható ki (bármilyen $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékban).

A (ii) kijelentés igazolása teljesen hasonló. Egyrészt nyilván $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$ és $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$. A fordított irányú tartalmazások belátásához legyen $S \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$. Tetszőleges $T \neq S$ és $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalícióra fennáll (12), sőt $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$-re szigorú egyenlőtlenségként, így $\alpha_S = 0$ mellett adódik a kívánt $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$, sőt az utóbbi esetben a $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$ is. Ha viszont $\alpha_S > 0$, akkor a most szigorú egyenlőtlenségként teljesülő (11) behelyettesítéséből azt kapjuk, hogy a (13) is szigorú egyenlőtlenségként áll fenn. Innen már tetszőleges $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalícióra az adódik a 2(i) alesetben, hogy $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\}) \supseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$. A 2(ii) aleset most is a (14), illetve a (15)-beli első egyenlőtlenség szigorú volta miatt zárható ki (bármilyen $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékban).

Az (i) kijelentés is könnyen adódik a fenti gondolatmenetből, hiszen $S, T \notin \mathcal{V}(\mathcal{B})$ esetén feltehető, hogy a (11) majorálásban $\mu_N = 0$, illetve a (12) majorálásban $\beta_N = 0$. Másképpen fogalmazva, az említett LP feladatok helyett vehetjük a megfelelő LP_0 feladatokat, ugyanakkor a megállapításokban az ,,erősen alapvető"-t nyilván ,,alapvető"-re kell cseréljük. A 2(ii) aleset kizárásához ekkor nincs szükség a játékra tett semmilyen feltételre, hiszen amint azt ott már meggondoltuk, $\mu_N = \beta_N = 0$ esetén α_S és λ_T egyszerre pozitív nem lehet. □

A 7. lemmabeli megállapítások szemléltetésére vegyük a következő játékot.

8. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, a koalíciós függvény pedig $v(\overline{12}) = 4$, $v(\overline{23}) = 6$, $v(\overline{24}) = 6$, $v(\overline{34}) = 2$, $v(\overline{123}) = 6$, $v(\overline{124}) = 6$, $v(\overline{134}) = 4$, $v(\overline{234}) = 7$, $v(\overline{1234}) = 8$, és $v(T) = 0$ minden egyéb T koalícióra.

Tekintsük a koalíciók $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{34}, \overline{134}, \overline{234}\} \subset \mathcal{N}_+$ családját. A játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, hiszen teljesül rá a (4) alatti implikáció. Továbbá, mivel $v(N) = 8 = \frac{1}{2}v(\overline{1}) + \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{134}) = \max \mathrm{LP}_0(N, \mathcal{B} \setminus \{N\})$, minden $\mathcal{B}$-magbeli kifizetésre teljesülnie kell az $x(\overline{1}) = 0 = v(\overline{1})$, $x(\overline{23}) = 6 = v(\overline{23})$, $x(\overline{24}) = 6 = v(\overline{24})$, $x(\overline{134}) = 4 = v(\overline{134})$ egyenlőségeknek (lásd az 5. megjegyzést). Sőt, mivel az $\mathrm{LP}_0(N, \mathcal{B} \setminus \{N\})$-nek maximumát adja az $\frac{1}{3}v(\overline{12}) + \frac{1}{3}v(\overline{23}) + \frac{1}{3}v(\overline{24}) + \frac{2}{3}v(\overline{134})$ felbontás is, a $\mathcal{B}$-mag minden elemére teljesülnie kell még az $x(\overline{12}) = 4 = v(\overline{12})$ egyenlőségnek is. Ennek az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, így a játék $\mathcal{B}$-magja az egyetlen $(0, 4, 2, 2)$ szétosztásból áll.

A *2. táblázatban* feltüntettük a $\mathcal{B}$-beli koalíciók besorolását, illetve a koalíció értékének összevetését a megfelelő LP egy-egy maximális értékű megoldásával is.

S	$v(S)$	$\mathcal{V}(\mathcal{B})$	$\mathcal{SV}(\mathcal{B})$	$\mathcal{H}(\mathcal{B})$	$\max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$
$\overline{1}$	0	+	−	+	$v(\overline{1}) = v(\overline{12}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{2}$	0	+	−	−	$v(\overline{2}) < v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{3}$	0	+	−	−	$v(\overline{3}) < v(\overline{23}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{4}$	0	+	−	−	$v(\overline{4}) < v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{12}$	4	+	−	+	$v(\overline{12}) = 2v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{23}$	6	+	+	−	$v(\overline{23}) > v(\overline{3}) + v(\overline{12}) + v(\overline{234}) - v(N)$
$\overline{24}$	6	+	+	−	$v(\overline{24}) > v(\overline{4}) + v(\overline{12}) + v(\overline{234}) - v(N)$
$\overline{34}$	2	+	−	−	$v(\overline{34}) < v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + 2v(\overline{134}) - 2v(N)$
$\overline{134}$	4	+	+	−	$v(\overline{134}) > v(\overline{1}) + v(\overline{34})$
$\overline{234}$	7	−	−	−	$v(\overline{234}) < v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$

2. táblázat

A $\mathcal{B}$-ben a $\overline{234}$ koalíció nem alapvető, ugyanis

$$e^{\overline{234}} = \frac{1}{2}e^{\overline{23}} + \frac{1}{2}e^{\overline{24}} + \frac{1}{2}e^{\overline{34}}, \quad \text{és} \quad v(\overline{234}) = \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{34})\,. \tag{16}$$

Ugyanakkor a megfelelő LP_0-k megoldásával könnyen ellenőrizhető, hogy az összes többi koalíció alapvető $\mathcal{B}$-ben. Például, a $\overline{34}$ koalíció alapvető $\mathcal{B}$-ben, hiszen $v(\overline{34}) = 2 > 0 = \max \mathrm{LP}_0(\overline{34}, \mathcal{B} \setminus \{\overline{34}\})$. Ugyanakkor, a $\overline{34}$ nem erősen alapvető $\mathcal{B}$-ben, mert például

$$e^{\overline{34}} = e^{\overline{134}} + e^{\overline{234}} - e^{\overline{1234}}, \quad \text{de} \quad v(\overline{34}) < v(\overline{134}) + v(\overline{234}) - v(\overline{1234})\,. \tag{17}$$

A megfelelő LP-k megoldásával kapjuk, hogy a $\mathcal{B}$-ben erősen alapvető koalíciók halmaza $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \{\overline{23}, \overline{24}, \overline{134}\}$.

A 7. lemma (i) kijelentése szerint egy nem alapvető koalíció elhagyása nem változtatja meg az alapvető koalíciók halmazát. A $\mathcal{B}$-ben alapvető $\overline{34}$ koalíció például alapvető marad, ha elhagyjuk a nem alapvető $\overline{234}$ koalíciót. Jóllehet a $\overline{34}$ nem erősen alapvető jellegét mutató (17) gyenge majorálásban a $\overline{234}$ is részt vesz, de szerepe kiváltható a nem alapvető jellegét mutató (16) majorálás behelyettesítésével. Vegyük észre, hogy a behelyettesített (16) majorálásban ugyan részt vesz maga a $\overline{34}$ koalíció is, de csak $\frac{1}{2}$ súllyal, ezért a tagsági vektorok egyenleteiből a $\overline{234}$-mentes $e^{\overline{34}} = e^{\overline{23}} + e^{\overline{24}} + 2e^{\overline{134}} - 2e^{\overline{1234}}$ gyenge felbontást kapjuk, ami ráadásul egy a (17)-belinél magasabb értékű (egyébként a maximális értékű, a táblázatban is szereplő)

$$v(\overline{34}) = 2 < 4 = v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + 2v(\overline{134}) - 2v(\overline{1234}) \tag{18}$$

gyenge majorálást ad. Ugyanez történne persze, ha egy ilyen majorálást egy majorálásba helyettesítenénk: egy legalább akkora értékű majorálást kapnánk. Az adott nem alapvető koalíció tehát nem válna alapvetővé. Ez az eset egyébként egy példa arra is, amikor egy nem (erősen) alapvető koalíció elhagyása nem változtatja meg egy koalíció nem erősen alapvető jellegét, jóllehet most $v(N) = \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big)$.

A lemma (ii) kijelentése szerint egy nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíció elhagyása nem változtatja meg sem az $\mathcal{SVH}$, sem az $\mathcal{SV}$ halmazokat. Érdemes ugyanakkor megemlíteni, hogy ilyen esetben az alapvető koalíciók halmaza viszont bővülhet. A 8. példában hagyjuk most el a nem $\mathcal{SVH}(\mathcal{B})$-beli (egyébként $\mathcal{B}$-ben alapvető) $\overline{34}$ koalíciót. A $\mathcal{B}$-ben nem alapvető $\overline{234}$ koalíció a $\mathcal{B}\backslash\{\overline{34}\}$ családban már alapvető, hiszen ezen belül már csak egyetlen felbontása van, mégpedig a $e^{\overline{234}} = e^{\overline{3}} + e^{\overline{24}}$ felbontás, erre viszont $v(\overline{234}) = 7 > 6 = v(\overline{3}) + v(\overline{24})$. A jelenség oka az, hogy a $v(\overline{234})$-nek az egyetlen $\mathcal{B}$-beli majorálása a (16)-beli, de ebbe a $v(\overline{34})$ akármelyik gyenge majorálását helyettesítjük is, már csak gyenge majorálást kapunk. Vagyis csak a $\overline{234}$ nem $\mathcal{SVH}$-beli jellege maradt meg (mert egy nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíciót hagytunk el), de nem alapvető jellege megváltozott.

A 7. lemma (iv) kijelentésében szereplő $v(N) > \max \mathrm{LP}_0(N, \mathcal{B} \setminus \{N\})$ feltétel szükségességének igazolására vegyük ismét a 8. példabeli játékunkat, ahol ez nem teljesül, de azért a $\mathcal{B}$-mag nem üres. Sem az $\overline{1}$, sem az $\overline{12}$ koalíció nem erősen alapvető, viszont mindkettő $\mathcal{H}$-beli, ráadásul szerepelnek egymás maximális értékű gyenge majorálásában (lásd a 2. táblázatot). Ugyanakkor sem az $\mathrm{LP}(\overline{1}, \mathcal{B}\backslash\{\overline{1}, \overline{12}\})$-nek, sem az $\mathrm{LP}(\overline{12}, \mathcal{B}\backslash\{\overline{1}, \overline{12}\})$-nek nincs lehetséges megoldása, tehát az egyik koalíció elhagyása erősen alapvetővé teszi a másikat. Ez egyben példa arra is, hogy egy $\mathcal{H}$-beli koalíció elhagyása esetén az $\mathcal{SV}$ bővülhet, ami a 7. (iv) miatt persze csak „degenerált" $\mathcal{B}$-maggal rendelkező játékban fordulhat elő, és a 7. (ii) szerint ilyenkor is csak olyan módon, hogy egy $\mathcal{H}$-beli koalíció átkerül az $\mathcal{SV}$-be. Ugyanakkor, amint azt a 6. példában az egymás maximális értékű gyenge majorálásában szereplő $\mathcal{H}$-beli $\overline{34}$ és $\overline{234}$ koalíciókkal kapcsolatban láttuk, ha a nemüres $\mathcal{B}$-mag „nemdegenerált", akkor egy gyenge majorálásban szereplő ugyancsak gyengén majorált koalíció kiküszöbölhető, tehát bármelyik nem erősen alapvető koalíciónak van olyan gyenge majorálása, amelyben már csak erősen alapvető koalíciók szerepelnek. Ilyenkor tehát egy $\mathcal{H}$-beli koalíció elhagyása nem változtat a többi $\mathcal{H}$-beli koalíció státuszán.

A fejezet fő állítása a következő.

9. Tétel. *Legyen a játék $\mathcal{B}$-magja nemüres. Ekkor*

(i) $\mathbf{Co}\big(\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{SVH}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$;

(ii) $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ *minden olyan legszűkebb* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ *koalíciócsaládra, amelyre* $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$;

(iii) ha N *alapvető* $\mathcal{B}$*-ben, akkor* $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, *továbbá egyedül* $\mathcal{D} = \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ *a legszűkebb olyan* $\mathcal{B}$*-beli koalíciócsalád, amelyre* $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$.

Bizonyítás. A 7. lemma segítségével az állítások induktíven könnyen igazolhatók. Először nézzük az (i)-et. Legyen $\mathcal{B} \setminus \mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{S_1, \ldots, S_p\}$ és $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) = \{S_{p+1}, \ldots, S_{p+q}\}$. Természetesen p és/vagy q lehet 0 is. Jelölje $\mathcal{VSVH}$ a $\mathcal{V} \cap \mathcal{SVH}$ metszetet. Hagyjuk el egyenként az S_i koalíciókat, először az $1 \leq i \leq p$ indexűeket valamilyen tetszőleges sorrendben, majd a $p+1 \leq i \leq p+q$ indexűeket önmagukon belül ugyancsak tetszőleges sorrendben. Az egyszerűség kedvéért válasszuk az indexek természetes sorrendjét, azaz legyen $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ és $i = 1, \ldots, p+q$-ra $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{i-1} \setminus \{S_i\}$. Nyilvánvalóan $\mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B})$ és $\mathcal{B}_{p+q} = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B})$.

Az $S_1 \notin \mathcal{V}(\mathcal{B}_0)$ koalícióra nyilván $S_1 \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B}_0)$ is igaz, így a definíciók alapján $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_1) = \mathbf{Co}\big(\mathcal{B}_0 \setminus \{S_1\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_0)$. A 7. lemma (i) miatt $\mathcal{V}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{V}\big(\mathcal{B}_0 \setminus \{S_1\}\big) = \mathcal{V}(\mathcal{B}_0)$, míg a 7. (ii) és (iii) miatt $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}_0 \setminus \{S_1\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_0) \setminus \{S_1\}$, következésképpen $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_0)$. Az alapvető koalíciók halmazának változatlansága miatt ez a gondolatmenet induktívan megismételhető mindaddig, amíg el nem hagyjuk az összes az eredeti $\mathcal{B}$-ben nem alapvető koalíciót. Kapjuk, hogy mindegyik $i = 1, \ldots, p$-re egyrészt $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_i) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_{i-1})$, másrészt $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{i-1})$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{Co}(\mathcal{B}_p) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_p) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}) \,, \tag{19}$$

továbbá, hogy $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p) \subseteq \mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B}_p)$, vagyis a redukált $\mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B})$-ben a $\mathcal{VSVH}$ metszet már azonos az $\mathcal{SVH}$-val.

Folytassuk $i = p+1, \ldots, p+q$-ra az S_i koalíciók elhagyását. Mivel az $S_{p+1} \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p)$ koalícióra $S_{p+1} \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B}_p)$ is igaz, nyilván teljesül a $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathbf{Co}\big(\mathcal{B}_p \setminus \{S_{p+1}\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_p)$ azonosság. Másrészt, a 7. lemma (ii) miatt $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}_p \setminus \{S_{p+1}\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p)$. Mivel most már $\mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B}_p)$, nyilván $\mathcal{V}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathcal{V}\big(\mathcal{B}_p \setminus \{S_{p+1}\}\big) = \mathcal{V}(\mathcal{B}_p) \setminus \{S_{p+1}\} = \mathcal{B}_{p+1}$ is fennáll, következésképpen $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_p)$, vagyis most egy nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíció elhagyása nem változtat a $\mathcal{VSVH}$ metszeten. A nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíciók halmazának változatlansága miatt ez a gondolatmenet induktívan megismételhető mindaddig, amíg el nem hagyjuk az összes $\mathcal{B}_p \setminus \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p)$-beli koalíciót. Kapjuk tehát, hogy mindegyik $i = p+1, \ldots, p+q$-ra egyrészt $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_i) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_{i-1})$, másrészt $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{i-1})$. Ebből és (19)-ből következik, hogy

$$\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{p+q}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_p) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}) \,.$$

Figyelembe véve, hogy $\mathcal{B}_{p+q} = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{p+q}) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_p) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B})$, az (i) állítás bizonyítása ezzel kész.

A (ii) állítás nagyon hasonló módon igazolható. Legyen $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ egy tetszőleges legszűkebb olyan koalíciócsalád, amelyre $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B} \setminus \mathcal{D} = \{T_1, \ldots, T_r\}$, ahol a $\mathcal{D}$-n kívüli koalíciók sorrendje tetszőleges. Természetesen r lehet 0 is. Hagyjuk el egyenként a T_j koalíciókat, az egyszerűség kedvéért az indexek természetes sorrendjében. Legyen $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, és $j = 1, \ldots, r$-re $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_{j-1} \setminus \{T_j\}$, tehát $\mathcal{B}_r = \mathcal{D}$.

Mivel nyilván $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{j-1}) \subseteq \mathbf{Co}(\mathcal{B}_j)$ minden $j = 1, \ldots, r$-re, a $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_0) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_r)$ feltevés miatt valójában $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{j-1}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_j)$ minden $j = 1, \ldots, r$-re. Ebből következik, hogy $T_j \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B}_{j-1})$ minden $j = 1, \ldots, r$-re, hiszen ellenkező esetben a 3. állítás szerint a T_j elhagyásával a mag szigorúan bővülne. Egyrészt, a definíciókból adódóan $\mathcal{SV}(\mathcal{B}_{j-1}) \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B}_j)$, másrészt a 7. (ii) és (iii) megállapításokból következően $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_j) \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_{j-1})$ minden $j = 1, \ldots, r$-re. Ezekből következik, hogy

$$\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{D}) \ \subseteq \ \mathcal{SVH}(\mathcal{D}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \,.$$

Mivel egyetlen $\mathcal{D}$-beli koalíció sem hagyható el anélkül, hogy a mag szigorúan bővülne, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{D})$, vagyis $\mathcal{D} = \mathcal{SV}(\mathcal{D})$ kell legyen, és ezzel a (ii) bizonyítása kész.

A (iii) állítást a (ii) bizonyításával szinte azonos módon igazolhatjuk a 7. lemma (iv) segítségével. Legyen most is $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ egy tetszőleges legszűkebb olyan koalíciócsalád, amelyre $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Legyen megint $\mathcal{B} \setminus \mathcal{D} = \{T_1, \ldots, T_r\}$, továbbá $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ és $j = 1, \ldots, r$-re $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_{j-1} \setminus \{T_j\}$, tehát $\mathcal{B}_r = \mathcal{D}$. Ha az N alapvető a $\mathcal{B}$-ben, akkor nyilván alapvető marad mindegyik $\mathcal{B}_j$-ben is. A 7. (iv) tehát mindegyik lépésben alkalmazható. Kapjuk, hogy most $\mathcal{SV}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{SV}(\mathcal{B}_{i-1})$ minden $i = 1, \ldots, p$-re. Ebből, valamint a $\mathcal{D}$ tartalmazásra minimális voltából pedig adódik, hogy

$$\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \ldots = \mathcal{SV}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\,. \tag{20}$$

Mivel biztosan van egy olyan legszűkebb $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ koalíciócsalád, amelyre $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, kapjuk egyrészt, hogy $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Másrészt, mivel (20) bármely ilyen $\mathcal{D}$-re fennáll, az $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$ az egyetlen legszűkebb ilyen koalíciócsalád. □

Szemléltetésképpen nézzük ismét a 8. példát. Amint azt ott már megállapítottuk, a $\mathcal{B}$-mag degenerált, egyedül a $(0, 4, 2, 2)$ kifizetés-vektorból áll. Az egyetlen nem alapvető $\overline{234}$ koalíció figyelmen kívül hagyása ezen nem változtat, a $\mathcal{V}(\mathcal{B})$-mag tehát valóban azonos a $\mathcal{B}$-maggal. Ezután a $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$-beli $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ és $\overline{34}$ koalíciók is elhagyhatók, nem szerepelnek sem egymás, sem a többi koalíció gyenge majorálásában. Tehát a $\big(\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{SVH}(\mathcal{B})\big)$-mag is azonos a $\mathcal{B}$-maggal. Itt azonban meg kell álljunk, a $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{H}(\mathcal{B})$-beli $\overline{1}$ és $\overline{12}$ koalíciók közül csak az egyiket törölhetjük, mert ezáltal a másik már erősen alapvetővé válik. Valóban, ha csak az $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$-beli $\overline{23}$, $\overline{24}$ és $\overline{134}$ koalíciókat vesszük figyelembe, akkor egy bővebb magot kapunk: például $(-2t, 4, 2+t, 2+t) \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$ minden $t \geq 0$-ra. Vegyük észre ugyanakkor, hogy mivel tetszőleges $x \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$ kifizetés-vektorban $x_1 \leq 0$ és $x_2 \leq 4$, az erősen alapvető koalíciók kiegészítése akár az $\overline{1} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{B})$, akár az $\overline{12} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{B})$ koalícióval már egyértelművé teszi a megoldást, vagyis $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \cup \{\overline{1}\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, illetve $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \cup \{\overline{12}\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Tehát degeneráltsága miatt a $\mathcal{B}$-magot ugyan nem határozzák meg teljesen az erősen alapvető koalíciók, de a nem erősen alapvető koalíciók majdnem mindegyike (a $\mathcal{H}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{B})$-beliek kivételével mindegyik) azért elhagyható, csakúgy, mint a nem alapvető koalíciók.

A 9. tétellel kapcsolatban még megjegyezzük, hogy amennyiben az N nem alapvető $\mathcal{B}$-ben, a (degenerált) $\mathcal{B}$-magot meghatározó legszűkebb koalíciócsaládok között lehet(nek) olyan(ok) is, amelyek nem részhalmazai a ($\mathcal{B}$-magot egyébként mindig meghatározó) $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ metszetnek. A 4. példában $\mathcal{B} = \mathcal{N}_+$ esetén az egyetlen szétosztást tartalmazó $\mathcal{B}$-mag megegyezik a $\mathcal{D} = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}\}$ koalíciócsalád által meghatározott $\mathcal{D}$-maggal. A $\mathcal{D}$ minimális is, de diszjunkt az alapvető koalíciók $\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ családjától. Ez azt is mutatja, hogy az (i) állítás bizonyításában a $\mathcal{VSVH}$ metszeten kívüli koalíciók elhagyásának sorrendje annyiban nem tetszőleges, hogy előbb kell elhagyni az összes nem alapvető koalíciót, csak ezután kerülhetnek sorra a $\mathcal{V} \setminus \mathcal{SVH}$-beli koalíciók.

3 A $\mathcal{B}$-szűkmag

Korábban már láttuk, hogy szétosztások minden játékban vannak, de a $\mathcal{B}$-mag csak akkor nem üres, ha a nagykoalíció értéke „kellően nagy” a figyelembe vett koalíciók alkalmasan súlyozott értékeihez képest, vagyis a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, mert ekkor tudunk minden $\mathcal{B}$-beli koalíciónak nempozitív többletet garantálni. Lássuk mi történik akkor, ha a legnagyobb megengedett többlet szintjét nem rögzítjük le eleve nullára, hanem csak egy relatíve legjobb közös elfogadhatósági küszöböt próbálunk elérni?

Egy tetszőleges (N, v) játék és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ koalíciócsalád esetén a *$\mathcal{B}$-szűkmag* azon szétosztások halmaza, amelyeknél az összes $\mathcal{B}$-beli koalícióra vett legnagyobb többlet a lehető legkisebb, azaz

$$\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \left\{ x \in \mathbf{pIm} \ : \ \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) \leq \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) \right\}. \tag{21}$$

Az $\mathcal{N}_+$-szűkmagot röviden csak *szűkmag*nak[8] mondjuk. Ezt a megoldási koncepciót Maschler, Peleg és Shapley vizsgálták először 1979-ben megjelent cikkükben. Alapvető megállapításaik könnyen általánosíthatók akármelyik $\mathcal{B}$-szűkmagra (a kézenfekvő bizonyításoktól ezért eltekintünk).

10. Állítás. *Tetszőleges $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ koalíciócsalád és v játék esetén*

(i) $t^* := \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x)$ *egy jól meghatározott valós szám;*

(ii) $\mathbf{LC}(\mathcal{B})$ *nem üres;*

(iii) $\mathbf{Co}(\mathcal{B})$ *üres* $\Leftrightarrow$ $t^* > 0$*;*

(iv) $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$*, de az N nem alapvető $\mathcal{B}$-ben* $\Leftrightarrow$ $t^* = 0$*;*

(v) $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ *és az N alapvető $\mathcal{B}$-ben* $\Leftrightarrow$ $t^* < 0$*.*

Az állítás (iv) és (v) pontjai szerint, ha egy játék $\mathcal{B}$-magja nem üres, akkor a $\mathcal{B}$-szűkmag a $\mathcal{B}$-mag része. Innen származik az elnevezése. A (iv) ponttal kapcsolatban érdemes felidézni az 5. megjegyzést.

A szűkmagra vonatkozó fő állításunk a következő.

11. Tétel. *Ha az N alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor* $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \mathbf{LC}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$*.*

Bizonyítás. Ha az N alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor a játék $\mathcal{B}$-magja nem üres, így a 9. tétel (iii) megállapítása alapján $\mathbf{Co}(\mathcal{B}) = \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$. A 10. állítás (iv) és (v) pontjai szerint egyrészt $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, másrészt $\mathbf{LC}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) \subseteq \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$. Tehát mind a $\mathcal{B}$-szűkmag, mind az $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$-szűkmag meghatározásában a szétosztások halmaza leszűkíthető a $\mathcal{B}$-magra, ahol már mindegyik

[8] Angolul *least core.*

$\mathcal{B}$-beli koalíció többlete nempozitív. A tétel bizonyításához tehát elegendő azt megmutatni, hogy minden $x \in \mathbf{Co}(\mathcal{SV}(\mathcal{B})) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ esetén $\max_{T\in\mathcal{B}} e(T,x) = \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)$.

Mivel nyilvánvalóan $\max_{T\in\mathcal{B}} e(T,x) \geq \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)$, csak a fordított irányú egyenlőtlenséget kell igazolnunk. Vegyünk tetszőlegesen egy $S \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalíciót. A 7. lemma (iv) pontját iteratívan alkalmazva kapjuk, hogy van olyan $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalíciócsalád, hogy $\lambda_T > 0$ $(T \in \mathcal{T})$, illetve $\mu_N \geq 0$ súlyokkal egyrészt

$$e^S = \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, e^T - \mu_N\, e^N \;, \tag{22}$$

másrészt

$$v(S) \leq \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, v(T) - \mu_N\, v(N)\;. \tag{23}$$

Ha a (22) felbontást beszorozzuk egy tetszőleges x szétosztással, és a kifizetésekre így kapott $x(S) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, x(T) - \mu_N\, x(N)$ egyenletet tagonként kivonjuk a (23) majorálásból, azt kapjuk, hogy

$$e(S,x) \;\leq\; \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, e(T,x) \;\leq \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\Big) \max_{T\in\mathcal{T}} e(T,x)\;,$$

hiszen egyrészt minden x szétosztásra $e(N,x) = 0$, másrészt mindegyik λ_T pozitív.

Mivel $\sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T > 1$ (hiszen $S \notin \mathcal{T}$ miatt a (22) felbontás valódi), adódik, hogy minden $x \in \mathbf{Co}(\mathcal{SV}(\mathcal{B})) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ esetén

$$e(S,x) \;\leq\; \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\Big) \max_{T\in\mathcal{T}} e(T,x) \;\leq\; \max_{T\in\mathcal{T}} e(T,x) \;\leq\; \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)\;,$$

vagyis egy nem erősen alapvető koalíció egyetlen $\mathcal{B}$-magbeli szétosztásnál sem lehet egyedüliként a maximális többletű, mindig van egy legalább akkora többlettel rendelkező erősen alapvető koalíció. Tehát valóban minden $x \in \mathbf{Co}(\mathcal{SV}(\mathcal{B})) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ esetén $\max_{T\in\mathcal{B}} e(T,x) = \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)$. □

Összevetve a 11. tételt a 9. tétel (v) pontjával azt látjuk, hogy ha egy (N,v_1) játék nem elfajult $\mathcal{B}_1$-magja megegyezik egy (N,v_2) játék nem elfajult $\mathcal{B}_2$-magjával, akkor $\mathcal{SV}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{SV}(\mathcal{B}_2)$, s így az (N,v_1) játék $\mathcal{B}_1$-szűkmagja is megegyezik az (N,v_2) játék $\mathcal{B}_2$-szűkmagjával. Figyelembe véve a 10. állítás (iv) pontját is, kijelenthetjük, hogy bármilyen $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékban a nemüres $\mathcal{B}$-magot meghatározó koalíciócsaládok a $\mathcal{B}$-szűkmagot is meghatározzák. A $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{N}_+$ esetben ez a megállapítás egy közvetett bizonyítását adja Potters és Tijs (1994) alábbi eredményének.

12. Következmény. *Kiegyensúlyozott játékokban a szűkmag a mag egy mértani helye, vagyis azonos maggal rendelkező bármely két játék szűkmagjai is azonosak.*

A 11. tétellel kapcsolatban még két megjegyzést teszünk. Az első, hogy a szűkmag esetében —ellentétben a maggal, lásd a 9. tétel (iii) pontját— általános érvénnyel akkor sem azonosíthatunk egy, a megoldást meghatározó legszűkebb koalíciócsaládot, ha az N alapvető $\mathcal{B}$-ben. A következő egy olyan 4-szereplős példa, amelyben a hét erősen alapvető koalíció között csak egy olyan van, amelyik tagja mind a nyolc legszűkebb meghatározó koalíciócsaládnak.

13. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, vegyük a koalíciók $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{123}\} \subset \mathcal{N}_+$ családját, és a koalíciós értékek legyenek:

S	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{34}$	$\overline{123}$	N
$v(S)$	0	0	0	0	8	4	8	8	8	10	18

Az $\overline{123}$ koalíció nem alapvető, mivel $v(\overline{123}) = 10 = \frac{1}{2}v(\overline{12}) + \frac{1}{2}v(\overline{13}) + \frac{1}{2}v(\overline{23})$. Ezen kívül csak az (alapvető) $\overline{1}$ illetve $\overline{3}$ koalíciók nem erősen alapvetőek $\mathcal{B}$-ben, azaz $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{34}\}$.

Mivel $t^* = \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) = -1 < 0$, a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, sőt az N alapvető $\mathcal{B}$-ben. A $\mathcal{B}$-szűkmag a $\mathcal{B}$-mag (alacsonyabb dimenziós) szigorú részhalmaza, hiszen a minimális $t^* = -1$ többletszintet eredményező szétosztásoktól megkövetelt $e(\overline{12}, x) = 8 - x(\overline{12}) \le -1$ és $e(\overline{34}, x) = 8 - x(\overline{34}) \le -1$, de $x(\overline{12}) + x(\overline{34}) = 18$ rendszer minden megoldásában $x(\overline{12}) = 9$ és $x(\overline{34}) = 9$ kell teljesüljön (vö. 5. megjegyzés). Hasonló ok miatt végig konstans $t^* = -1$ a $\mathcal{B}$-szűkmagon az $\overline{14}$ illetve $\overline{23}$ koalíciók többlete. Az $x(\overline{12}) = 9$, $x(\overline{34}) = 9$, $x(\overline{14}) = 9$ és $x(\overline{23}) = 9$ egyenletrendszer minden megoldása $(y, 9 - y, y, 9 - y)$ alakú. A másik három erősen alapvető koalíció többletét is $t^* = -1$-ben maximálva kapjuk, hogy $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \big\{(y, 9 - y, y, 9 - y) : 5/2 \le y \le 8\big\}$.

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{B}$-szűkmagot tartalmazó egyenest megadó négy egyenlet közül bármelyik háromból következik a negyedik, így akármelyikük (de csak az egyikük) figyelmen kívül hagyható. Ettől függetlenül kihagyható akár a $\overline{2}$ akár a $\overline{4}$ koalíció, mert többletük limitálása ugyanazt az $y \le 8$ korlátot eredményezi. Tehát nyolc olyan szigorú részhalmaza is van $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$-nek, amelyik ugyancsak az $\mathbf{LC}(\mathcal{B})$-t határozza meg. Egyedül az $y \ge 5/2$ korlátot eredményező $\overline{13}$ koalíció szerepe nem kiváltható.

A tétellel kapcsolatos másik megjegyzésünk az, hogy a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozottságára tett feltevés nem elhagyható.

14. Példa. Vegyük a 13. példabeli helyzetet, de csökkentsük a nagykoalíció értékét 12-re, azaz legyen:

S	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{34}$	$\overline{123}$	N
$v(S)$	0	0	0	0	8	4	8	8	8	10	12

Mivel $t^* = \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) = 2 > 0$, a játék nem $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, a $\mathcal{B}$-mag üres. A 13. példabeli gondolatmenetet megismételve most is azt kapjuk, hogy a $\mathcal{B}$-szűkmagnak benne kell lennie az $x(\overline{12}) = 6$, $x(\overline{34}) = 6$, $x(\overline{14}) = 6$ és $x(\overline{23}) = 6$ egyenletrendszer $(y, 6-y, y, 6-y)$ alakú megoldásainak halmazában. A többi $\mathcal{B}$-beli koalíció többletét is $t^* = 2$-ben maximálva kapjuk, hogy $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \big\{(y, 6-y, y, 6-y) : 2 \leq y \leq 8\big\}$.

Az $y \geq 2$ korlátot egyedül az $\overline{123}$ koalíció adja, a következő legszigorúbb alsó korlát az $\overline{13}$-hoz tartozó $y \geq 1$. Adódik, hogy $\mathbf{LC}\big(\mathcal{B} \setminus \{\overline{123}\}\big) = \big\{(y, 6-y, y, 6-y) : 1 \leq y \leq 8\big\}$. Mivel $\mathbf{LC}\big(\mathcal{B} \setminus \{\overline{123}\}\big)$ szigorúan bővebb, mint $\mathbf{LC}(\mathcal{B})$, a most sem alapvető $\overline{123}$ koalíció nem redundáns a szűkmagra nézve. Az erősen alapvető koalíciók tehát nem feltétlenül elegendők a $\mathcal{B}$-szűkmag meghatározásához akkor, ha a $\mathcal{B}$-mag üres.

Irodalom

1. Bondareva O. N. (1963): Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games (in Russian). *Problemy Kibernetiki,* 10:119–139.
2. Derks J., Reijnierse H. (1998): On the core of a collection of coalitions. *International Journal of Game Theory,* 27:451–459.
3. Faigle U. (1989): Cores of games with restricted cooperation. *ZOR – Methods and Models of Operations Research,* 33:405–422.
4. Llerena F. (2007): An axiomatization of the core of games with restricted cooperation. *Economics Letters,* 95:80–84.
5. Maschler M., Peleg B., Shapley L. S. (1979): Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. *Mathematics of Operations Research,* 4:303–338.
6. Potters J. A. M., Tijs S. H. (1994): On the locus of the nucleolus. In: *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, N. Megiddo, ed., Springer, New York, NY, 193–203.
7. Pulido M. A., Sánchez-Soriano J. (2006): Characterization of the core in games with restricted cooperation. *European Journal of Operational Research,* 175:860–869.
8. Ray D. (1989): Credible coalitions and the core. *International Journal of Game Theory,* 18:185–187.
9. Shapley L. S. (1967): On balanced sets and cores. *Naval Research Logistics Quarterly,* 14:453–460.

REDUNDANCY IN SOLUTIONS OF COOPERATIVE GAMES I:
THE CORE AND THE LEAST CORE

The various solutions of transferable utility games take into account the cooperative possibilities of all coalitions of players in one way or another. Although their definitions formally involve each of the coalitional values, many of the excess-based solutions are actually determined by a smaller family of coalitions. Disregarding superfluous coalitions can make the analysis and/or the computation of these solutions significantly easier, especially for games related to situations with restricted cooperation possibilities. In this paper we investigate the redundancy of coalitions with respect to the core and the least core. We identify several smaller families of coalitions which completely determine these solutions. In case the core is not empty and not degenerate, we find the smallest such family for the core, but demonstrate that no such smallest family exists for the least core.

CONTENTS

TARTALOM

SZIGMA
Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

www.szigma.ktk.pte.hu