ARROW-TÍPUSÚ LEHETETLENSÉGI TÉTELEK[1]

MALA JÓZSEF
Budapesti Corvinus Egyetem

1 Történelmi bevezetés

A szavazás elmélete a francia felvilágosodás korába nyúlik vissza, amikor a társadalmi változások következtében egy igazságos szavazási rendszer megalkotása szükségessé vált. Az első észrevételek, eredmények két francia akadémikus, Condorcet [11] és Borda [10] nevéhez fűződnek, de Laplace [27] is közölt eredményeket a területen. Az első észrevétel az volt, hogy ha legalább három jelöltre történik szavazás, akkor a plurális szavazási eljárás (tehát amelyben a szavazat nem más, mint egy jelölt megadása, és a legtöbb szavazatot kapott jelölt a győztes) könnyen siralmas eredményre vezethet, mert megtörténhet, hogy a szavazók olyan jelöltet választanak meg, akit jókora többség elutasít az összes többi jelölttel szemben. Ezért Condorcet egy olyan jelölt megválasztását szorgalmazta (már amennyiben ilyen létezik), akit a többi jelölt mindegyikével szemben valamilyen többség támogat. Ilyen ú.n. Condorcet-győztes létezése általában valóban nem garantálható, amint azt az alábbi példa mutatja. Tegyük fel, hogy három jelöltünk van (legyenek ezek a, b és c), továbbá három szavazónk (jelöljük őket $1, 2, 3$-mal) és a szavazóink az alábbi preferenciákkal rendelkeznek a jelöltekre vonatkozóan:

$$1:\ a\ b\ c;\quad 2:\ b\ c\ a;\quad 3:\ c\ a\ b\,, \tag{1}$$

tehát az 1-es szavazó leginkább az a-t, utána a b-t, legkevésbé a c-t preferálja, s.í.t.

Hogy a fenti problémát megkerülje, Borda egy új szavazási rendszert javasolt, amely ma Borda-pontozás néven ismeretes (ő maga érdemi szavazásnak nevezte).[2] A Borda-pontozás során a leadott szavazat nem más, mint egy listája az n jelöltnek, kezdve az illető szavazó által legjobbnak tartott jelölttől az általa legkevésbé támogatottig. A szavazók legjobb jelöltjei $n-1$ pontot kapnak, a második legjobbak $n-2$-t, s.í.t., tehát a legutolsók nem kapnak pontot. Az a jelölt a győztes, aki a legtöbb pontot szerzi meg az összesítésnél. Megjegyezzük, hogy a Borda-pontozás nem Condorcet típusú szavazási eljárás, azaz a Borda-győztes különbözhet a Condorcet-győztestől (sőt, az is megeshet, hogy a Condorcet-győztest semmilyen pontozáson alapuló eljárás sem hozza ki győztesként).

---

[1] Beérkezett: 2007. május 30. E-mail: `jozsef.mala@math.bke.hu`. A szerző köszönettel tartozik az OTKÁnak a nyújtott támogatásért. A szerző megköszöni az egyik bíráló lelkiismeretes munkáját, megjegyzéseit, javaslatait, melyek javítottak a cikk minőségén.

[2] Borda eljárását a francia akadémia alkalmazta is a jelöltek kiválasztására, mígnem egy frissen megválasztott tag javasolta az eltörlését. Az új tag Bonaparte Napóleon volt.

A francia forradalom leverése után hosszú időre megcsappant az érdeklődés a szavazási rendszerek vizsgálata iránt, talán csak Charles Dodgson [15, 16, 17] (ismertebb nevén Lewis Carroll) vizsgálódásait érdemes kiemelni, aki egy olyan rendszert tartott volna ideálisnak, ahol a szavazók stratégiai szavazással (azaz megfelelő őszintétlen szavazat leadásával) nem juthatnak előnyhöz. Érdemes megemlíteni, hogy a Borda pontozás korántsem mentes ettől a lehetőségtől.

Az áttörés Kenneth Arrow [3] munkásságával kezdődött az 1950-es évek elején, aki lényegében megmutatta, hogy olyan szavazási rendszer, amely kiküszöböli a fent említett két fogyatékosságot, tehát az (1)-ben bemutatott ciklikus jelenséget valamint a stratégiai szavazás lehetőségét (azaz őszinteségre bírja a szavazót), nem létezik, jobban mondva, csak gyakorlatban használhatatlan rendszerek jöhetnek szóba. Az Arrow-tétel óriási hatással volt az ezután meginduló kutatásokra, ez a terület ma is intenzíven fejlődik.

Jelen dolgozat szándéka —a kiterjedt szakirodalom miatt— csak az lehet, hogy ízelítőt adjon az Arrow-féle problémakörből. A válogatás ezért jórészt szubjektív, de igyekeztünk olyan kutatási irányokat is bemutatni, melyek jövőbeli alkalmazásokkal kecsegtetnek. A dolgozat felépítése az alábbi: Az első szakasz a többségi szavazásra vonatkozó néhány olyan eredményt ismertet, melyeknek hasznát vesszük az Arrow problémakör illusztrálásánál. A második szakaszban az Arrow tétel Wilson-féle [40] általánosítását igazoljuk, a harmadik szakaszban Gibbard [21], Blair és Pollak [8] valamint Banks [4] tételeit ismertetjük, mint próbálkozásokat az Arrow tétel feloldására. A negyedik szakasz az Arrow tételt tárgyalja az optimum függvényes modellben, majd az ötödik szakasz az útfüggetlen optimum függvények elméletét ismerteti, mint az utóbbi években fejlődésnek indult ígéretes területet (lásd [6, 12, 24, 26, 33, 36]).

2 Jelölések, alapvető fogalmak, egycsúcsú preferenciák, többségi szavazás, napirendi szavazás

Ha csak mást nem mondunk, végig feltesszük, hogy az alternatívák A halmaza és a szavazók V halmaza véges és legalább két elemű, bár a tételek egy része végtelen A esetére is igaz. Egy X véges halmaz elemszámát jelölje $\#X$. Ha csak mást nem mondunk, V-t azonosítjuk az $\{1, \dots, m\}$ halmazzal. Ha R egy (bináris) reláció az A-n, azaz $R \subset A \times A$, akkor xRy esetén időként —a gráfelméleti szóhasználattal élve— azt mondjuk, hogy xy egy (irányított) éle az R-nek.

2.1. Definíció. *Legyen a T egy reláció az A-n. Azt mondjuk, hogy a T egy bajnokság, ha T antiszimmetrikus (xTy és yTx esetén $x = y$) és teljes (xTy vagy yTx).*

A bajnokságokat, mint valódi bajnokságok eredményeit interpretálhatjuk, melyekben bármely két résztvevő játszott egymással, és $x \neq y$ esetén xTy

azt jelenti, hogy x legyőzte y-t.

2.2. Definíció. *Egy tranzitív (xRy és yRz esetén xRz) és teljes relációt gyenge rendezésnek, egy antiszimmetrikus gyenge rendezést pedig lineáris rendezésnek nevezünk. Jelölje $\mathcal{WL}(A)$ ill. $\mathcal{L}(A)$ a gyenge ill. lineáris rendezések halmazát az A-n.*

2.3. Definíció. *Az R reláció szigorú részén azt az $R^{\succ}$ relációt értjük, melyre minden $x, y \in A$ esetén $xR^{\succ}y \Leftrightarrow [xRy$ és $\neg yRx]$, az R közömbös részén pedig azt az $R^{\sim}$ relációt értjük, melyre minden $x, y \in A$ esetén $xR^{\sim}y \Leftrightarrow [xRy$ és $yRx]$.*

Minden R reláció tehát egy $R^{\succ}$ szigorú részre (amely aszimmetrikus, tehát $xR^{\succ}y$ esetén $\neg yR^{\succ}x$) és egy $R^{\sim}$ közömbös részre (amely szimmetrikus, tehát $xR^{\sim}y$ esetén $yR^{\sim}x$) esik szét.

2.4. Definíció. *A $\mathcal{WL}(A)^m$-beli $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ rendezett m-est profilnak nevezzük. Ha $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(A)^m$, akkor szigorú profilról beszélünk.*

Az R_i komponenst úgy interpretáljuk, mint az $i \in V$ szavazó preferenciarelációját, amely tehát a szavazó alternatívapárokra vonatkozó preferenciáiból áll össze gyenge (vagy speciális esetben lineáris) rendezéssé. Az, hogy az R_i egy gyenge rendezése az A-nak úgy értelmezhető, hogy szavazónk rangsorolni képes az alternatívákat (gyenge rendezésnél a közömbösség megengedett, lineáris rendezés esetén azonban nem).

2.5. Definíció. *Ha az R egy reláció az A-n, $\emptyset \neq B \subset A$, akkor az R-nek a B-re való megszorításán a $(B \times B) \cap R$ relációt értjük (a B-n), és azt $R|_B$-vel jelöljük. Ha $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ egy profil, akkor legyen $\mathbf{R}|_B = (R_1|_B, \ldots, R_m|_B)$.*

Az $R|_B$ reláció tehát a B-ben futó élek (és csak azok) megtartásával keletkezik az R-ből.

2.6. Definíció. *Ha $(R_1, \ldots, R_m)$ egy szigorú profil, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, akkor az $xMy \Leftrightarrow \#\{i \in V \mid xR_iy\} \geq \alpha m$ relációt α-többségi relációnak nevezzük. Az $\alpha = 1/2$ esetben inkább azt mondjuk, hogy az M az egyszerű többségi reláció.*

Az alábbi tétel azt mondja, hogy egyszerű többségi relációként ($\alpha = 1/2$) minden bajnokságot megkaphatunk, az $\alpha > 1/2$ esetben azonban bizonyos értelemben éppen fordított a helyzet.

2.7. Állítás (McGarvey [32], Mala [29]). *Az alábbi állítások igazak:*

i) tetszőleges bajnoksághoz található olyan szigorú profil, melynek egyszerű többségi relációja éppen ez a bajnokság;

ii) minden $\alpha > 1/2$-hez található olyan bajnokság, mely nem az α-többségi relációja semmilyen szigorú profilnak sem.

Bizonyítás. i). Legyen T egy tetszőleges bajnokság az $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$-n és legyen $1 \leq i \leq n$. Ha az x_s-ek azok az alternatívák, amelyeket az a_i

legyőzött a T-ben ($s = 1, \ldots, k$), az y_t-k pedig azok, amelyek legyőzték az a_i-t ($t = 1, \ldots, n-k-1$), akkor tekintsük az alábbi R_{2i-1} és R_{2i} lineáris rendezéseket:

$$R_{2i-1} : \ a_i x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_{n-k-1}; \quad R_{2i} : \ y_{n-k-1} \ldots y_1 a_i x_k \ldots x_1 \, .$$

Ekkor az $(R_1, R_2, \ldots, R_{2n-1}, R_{2n})$ profil többségi relációja éppen T. Valóban, ha $aTb, a \neq b$, akkor $a = a_i$ valamely $i \in \{1, \ldots, n\}$-nel, továbbá $b = x_s$ valamely $s \in \{1, \ldots, k\}$-val. Ekkor $aR_{2i-1}b, aR_{2i}b$, továbbá az a és a b ellentétes sorrendben szerepelnek az összes többi R_{2j-1}, R_{2j} lineáris rendezéspárban ($j \neq i$), tehát aMb, de nem bMa.

ii). Először is megjegyezzük, hogy tetszőleges T bajnokságra és $(R_1, \ldots, R_m)$ szigorú profilra érvényes a következő

$$\sum_{aTb} \#\{i \mid aR_ib\} = \sum_{i=1}^{m} \#(R_i \cap T) \tag{2}$$

egyenlőség, hiszen mindkét oldalon azon T-beli élek elemszáma áll (multiplicitással), amelyek az R_i-knek is élei ($i = 1, \ldots, m$).

Legyen $\alpha > 1/2$ tetszőleges. Erdős és Moon [20] egy tétele szerint ha az A halmaz n elemszáma elég nagy, akkor található olyan T bajnokság az A-n, melyben minden aciklikus élhalmaz elemszáma kisebb, mint $\alpha\binom{n}{2}$. Ha T az α-többségi relációja lenne valamely $(R_1, \ldots, R_m)$ szigorú profilnak, akkor aTb esetén $\#\{i \mid aR_ib\} \geq \alpha m$ teljesülne és így összeadással adódnék, hogy

$$\sum_{aTb} \#\{i \mid aR_ib\} \geq \binom{n}{2}\alpha m \, . \tag{3}$$

Másrészt $1 \leq i \leq m$ esetén igaz, hogy $\#(R_i \cap T) < \alpha\binom{n}{2}$, (hiszen $R_i \cap T$ aciklikus élhalmaza R_i-nek és így T-nek is) ahonnan ismét összeadással kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \#(R_i \cap T) < m\alpha\binom{n}{2} \, , \tag{4}$$

A (2), (3) és (4) állítások azonban ellentmondanak egymásnak. □

2.8. Megjegyzés. A 2.7. állításbeli *ii*) állításnál valójában több is mondható, nevezetesen megmutatható, hogy adott $\alpha > 1/2$ esetén *ii*) *majdnem minden* bajnokságra teljesül, ami úgy értendő, hogy azon bajnokságok számaránya, amelyekre teljesül, tart az egyhez, amint az A elemszáma minden határon túl növekszik.

2.9. Példa. Tekintsük az alábbi szavazási eljárást. Az alternatívákat egy adott $a_1 \ldots a_n$ sorrendben ütköztetjük egymással egyszerű többségi alapon. Ez azt jelenti, hogy először a_1 és a_2 között döntenek a szavazók, majd a győztes és a_3 között, s így tovább a sor végéig. Nevezzük ezt az eljárást napirendi szavazásnak. Az elnevezés arra utal, hogy a parlamentben egy törvényjavaslat esetén először a törvényjavaslat módosításának módosítása és a módosítása között döntenek, majd a győztes alternatíva és a törvényjavaslat között, végül ennek győztese és az eredeti, hatályban álló törvény között. Mivel a 2.7. állítás miatt az egyszerű többségi reláció tartalmazhat Hamilton-kört, azaz olyan irányított kört, amely minden csúcson átmegy és csak egyféleképpen[3], ezért világos, hogy a napirendi szavazás eredménye nagymértékben függ a napirendtől, vagyis az $a_1 \dots a_n$ sorrendtől.

Létezik azonban a lineáris rendezéseknek egy nevezetes osztálya, melyről feltételezhető, hogy bizonyos körülmények között a szavazók preferenciarelációi (már amennyiben ha azok is lineáris rendezések) ide esnek. Ha ez teljesül, akkor már —mint látni fogjuk— a többségi relációban nem fordulhatnak elő körök.

Tegyük fel ugyanis, hogy az alternatívák a szavazók preferenciáitól függetlenül úgy elrendezhetők egy sorozatba, hogy ha két alternatíva a szavazó ideálisnak vélt alternatívájának ugyanazon oldalán helyezkedik el a skálán, akkor szavazó közülük mindig az ideális alternatívához közelebbit választja. Ilyenek a preferenciák például akkor, ha a pártok egy ideológiai bal-jobb skálán helyezhetők el. A formális definíció a következő:

2.10. Definíció. *Az R lineáris rendezésre azt mondjuk, hogy egycsúcsú az $a_1 \dots a_n$ alapsorrendre nézve, ha található olyan $1 \leq p \leq n$, melyre $p \leq s \leq t$ vagy $p \geq s \geq t$ esetén $a_s R a_t$. Az a_p alternatívát az R csúcsának nevezzük. Ha egy profil minden komponense egycsúcsú valamely rögzített alapsorrendre nézve, akkor a profilt egycsúcsúnak nevezzük. Ha y az alapsorrendben x és z (itt mindegy, hogy x vagy z van előbb az alapsorrendben) közé esik (a határokat is beleértve), akkor ezt $y \in [x, z]$-vel jelöljük.*

Ha R egycsúcsú és $y \in [x, z]$, akkor xRy esetén x és az R csúcsa (az alapsorrendre nézve) y-nak ugyanazon oldalán kell, hogy legyen, ezért yRz-nek teljesülnie kell, s így az R tranzitivitása miatt kapjuk, hogy igaz a következő

2.11. Lemma. *Legyen az R egy egycsúcsú lineáris rendezés. Ha az x, y, z alternatívákra $y \in [x, z]$, akkor xRy esetén xRz.*

2.12. Tétel (Black [7]). *Ha M egy egycsúcsú profil többségi relációja, akkor $xM^{\succ}y$ és $yM^{\succ}z$ esetén $xM^{\succ}z$.*

Bizonyítás. Három esetet tekintünk.

1. eset. $x \in [y, z]$. Ha $xM^{\succ}z$ nem teljesülne, azaz zMx állna fenn, akkor a 2.11. lemma miatt zMy is állna, ellentmondásban $yM^{\succ}z$-vel.

2. eset. $y \in [x, z]$. $xM^{\succ}y$ azt jelenti, hogy a szavazóknak több, mint a fele x-et preferálja az y-nal szemben. A 2.11. lemma miatt ezek a szavazók x-et z-vel szemben is preferálják, tehát $xM^{\succ}z$.

3. eset. $z \in [x, y]$. Ez az eset nem jöhet létre, ellenkező esetben ugyanis az $yM^{\succ}z$ feltétel és a 2.11. lemma miatt $yM^{\succ}x$ állna fenn, ami ellentmond $xM^{\succ}y$-nak. □

[3]Sőt, ha a szavazók preferenciarelációit egyenletes eloszlás jellemzi, akkor ez 1-hez közeli valószínűséggel bekövetkezik (Bell [5])

A fentiek alapján állíthatjuk, hogy bármely $\mathbf{R}$ egycsúcsú profilhoz tartozik Condorcet-győztes, sőt, ha $\emptyset \neq B \subset A$, akkor $\mathbf{R}|_B$-hez is, hiszen könnyen láthatóan $\mathbf{R}|_B$ maga is egycsúcsú profil.

2.13. Definíció. *Egy relációt kvázitranzitívnak nevezünk, ha a szigorú része tranzitív. Egy teljes kvázitranzitív relációt kvázilineárisnak nevezünk.*

A fenti definícióval a 2.12. tétel úgy is fogalmazható, hogy minden egycsúcsú profil egyszerű többségi relációja kvázitranzitív (vagy ami most ugyanaz: kvázilineáris).

Az egycsúcsúságot általánosabban is értelmezhetjük: ha adott egy G fa (tehát egy olyan gráf, mely nem tartalmaz kört és összefüggő, azaz bármely két csúcsa között fut út) az A-n, akkor egy lineáris rendezést egycsúcsúnak nevezünk a G-re nézve, ha minden G-beli útra nézve egycsúcsú. Ide kívánkozik, bár a későbbiekben nem lesz szükségünk rá, Demange [14] tétele:

2.14. Tétel. *Ha egy profil valamennyi komponense egycsúcsú valamely fára nézve, akkor a többségi relációhoz tartozik Condorcet-győztes.*

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben nem állítható, hogy a többségi reláció kvázitranzitív, a többségi reláció nagyon is tartalmazhat irányított köröket.

A továbbiakban röviden áttekintünk néhány, a racionalitás bizonyos fokozataival összefüggő olyan definíciót és állítást, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

2.15. Állítás. *Ha az R egy tranzitív reláció, akkor minden $x, y, z \in A$-ra*

$$i)\ xRy,\ yR^{\succ}z \Rightarrow xR^{\succ}z \qquad ii)\ xR^{\succ}y,\ yRz \Rightarrow xR^{\succ}z\ .$$

A fenti állítás egyszerű következménye, hogy minden tranzitív reláció kvázitranzitív:

2.16. Állítás. *Ha az R egy kvázilineáris reláció, akkor minden $x, y, z \in A$-ra*

$$i)\ xRy,\ yR^{\succ}z \Rightarrow xRz; \qquad ii)\ xR^{\succ}y,\ yRz \Rightarrow xRz\ .$$

2.17. Definíció. *Az R relációra azt mondjuk, hogy ciklikus, ha található olyan $k \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_k \in A$ melyekre $a_i R^{\succ} a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Ha az R nem ciklikus, akkor aciklikusnak nevezzük.*

Az alábbi állítás nyilvánvaló:

2.18. Állítás. *Minden kvázitranzitív reláció aciklikus.*

2.19. Definíció. *Az R reláció maximális elemeinek halmazán az*

$$\{x \in A \mid \neg\exists y \in A : yR^{\succ}x\} = \operatorname{argmax} R$$

halmazt értjük.

Ha az R egy teljes reláció, akkor nyilván

$$\operatorname{argmax} R = \{x \in A \mid \forall y \in A : xRy\}.$$

Az aciklikus relációk fontosságát mutatja az alábbi:

2.20. Állítás. *Legyen az A véges halmaz, és legyen az R egy reláció az A-n. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

i) $\operatorname{argmax} R|_X \neq \emptyset$, *ha* $\emptyset \neq X \subset A$

ii) R *aciklikus.*

3 Arrow tétele

Ebben a szakaszban a nevezetes Arrow-féle lehetetlenségi tétel talán legismertebb általánosítását tárgyaljuk. Az Arrow tétel [3] arról szól, hogy ha az alternatívák száma legalább 3, akkor nem létezik olyan összjóléti függvény, mely eleget tesz néhány elemi racionalitási (pl. az összpreferencia tranzitivitása) ill. demokratikussági (pl. a Pareto-tulajdonság, diktátormentesség) kritériumnak. Az általánosítás (Wilson [40]) egyidejűleg két irányban történik: egyrészt megengedjük, hogy az értelmezési tartomány bizonyos értelemben szűk legyen, másrészt a (az egyébként nehezen kifogásolható) Pareto-feltételt elejtjük. Sajnos a Wilson-tétel sem hoz pozitívumot az elméletbe: a fenti lazább feltételek mellett is csak degenerált, gyakorlatban használhatatlan összjóléti függvények elégítik ki a kirótt feltételeket.

3.1. Definíció. *Ha $\mathcal{R}(A)$ jelöli a teljes relációk halmazát az A-n és $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$, akkor egy $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(A)$ függvényt összjóléti függvénynek nevezünk és az $F(\mathbf{R})$ függvényértékeket összpreferenciának (vagy társadalmi preferenciának) hívjuk. Ha az F értékei csak bizonyos P tulajdonságú teljes relációk lehetnek, akkor P-összjóléti függvényről beszélünk. Így például beszélhetünk tranzitív, kvázitranzitív, aciklikus stb. összjóléti függvényekről.*

A továbbiakban néhány, az elméletben standardnak tekintett példát mutatunk összjóléti függvényre.

3.2. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $T(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$xT(\mathbf{R})y \Leftrightarrow \#\{i \in V \mid xR_iy\} \geq \#\{i \in V \mid yR_ix\}\ . \qquad (5)$$

A $T(\mathbf{R})$ reláció nyilván teljes, ezért a T többségi függvény egy összjóléti függvény. A Condorcet-paradoxonhoz hasonlóan könnyen látható, hogy T ciklikus, ha $|A|, |V| \geq 3, \mathcal{L}(A)^m \subset \mathcal{D}$. Ha azonban $\mathcal{D}$ az A egy valamely alapsorrendjére nézve egycsúcsú profilok halmaza, akkor T (a 2.12. tétel miatt) egy kvázitranztív összjóléti függvény, sőt, ha a $|V|$ páratlan, akkor a T tranzitív is.

3.3. Példa. A Borda pontozásból nyilván egy tranzitív összjóléti függvényt kapunk, ha az alternatívákat az elért Borda-pontszámoknak megfelelően rangsoroljuk.

3.4. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $P(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$xP(\mathbf{R})y \Leftrightarrow \exists i \in V : xR_i y \,. \tag{6}$$

A $P(\mathbf{R})$ reláció nyilván teljes, ezért a P ú.n. gyenge Pareto függvény egy összjóléti függvény. Világos, hogy $xP(\mathbf{R})^{\succ}y$ pontosan akkor teljesül, ha $xR_i^{\succ}y$ minden $i \in V$-re, s innen az R_i-k tranzitivitása alapján világos, hogy a P kvázitranzitív.

3.5. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $\bar{P}(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$x\bar{P}(\mathbf{R})y \Leftrightarrow [\exists i \in V : xR_i^{\succ}y] \quad \text{vagy} \quad [\forall i \in V : xR_i^{\sim}y] \,. \tag{7}$$

A $\bar{P}(\mathbf{R})$ reláció nyilván teljes, ezért a $\bar{P}$ ú.n. erős Pareto függvény egy összjóléti függvény. Világos, hogy $x\bar{P}(\mathbf{R})^{\succ}y$ pontosan akkor teljesül, ha $xR_i y$ minden $i \in V$-re és $xR_i^{\succ}y$ legalább egy $i \in V$-re. Innen az R_i-k tranzitivitása és a 2.15. állítás alapján világos, hogy a $\bar{P}$ kvázitranzitív.

3.6. Példa. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ tetszőleges és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $F(\mathbf{R})$ az alábbi reláció az A-n:

$$xF(\mathbf{R})y \Leftrightarrow \exists i, j \in V, i \neq j : xR_i y, xR_j y \,. \tag{8}$$

3.7. Megjegyzés. A 3.6. példa F (ú.n. vétómentes) összjóléti függvénye aciklikus, ha $m > n$, azaz, ha $\#V > \#A$. Ha ugyanis találnánk olyan páronként különböző $a_1, \ldots, a_k \in A$ alternatívákat, melyekre $s = 1, \ldots, k$ esetén $a_s F(\mathbf{R})^{\succ} a_{s+1}$ (az $a_{k+1} = a_1$ konvencióval), akkor mivel minden s-hez legfeljebb egy olyan $i \in V$ szavazó található, akire $a_{s+1} R_i a_s$, ezért $m > n \geq k$ miatt található olyan $i \in V$, aki semelyik s-hez sem tartozik, azaz akire $a_s R_i^{\succ} a_{s+1}$ minden $s = 1, \ldots, k$-ra. Ez azonban lehetetlen, hiszen az R_i aciklikus.

3.8. Defiíció. *Azt mondjuk, hogy az F összjóléti függvény teljesíti a párok függetlensége feltételt (**PF**-et), ha minden $x, y \in A$-ra és tetszőleges $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profilokra teljesül, hogy $\mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}}$ esetén $F(\mathbf{R})|_{\{x,y\}} = F(\mathbf{S})|_{\{x,y\}}$.*

A Borda pontozást kivéve a fenti példák mindegyike teljesíti **PF**-et, amint az a megfelelő definíciókból azonnal következik. A Borda pontozás esetében tekintsük az alábbi két profilt:

$$\mathbf{R} : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline a & c \\ c & b \\ b & a \end{array} \qquad \mathbf{R}' : \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline a & c \\ b & b \\ c & a \end{array}$$

Ha B a Borda-féle összjóléti függvény, akkor $aB(\mathbf{R})^{\succ}b$ és $aB(\mathbf{R}')^{\sim}b$, jóllehet $\mathbf{R}|_{\{a,b\}} = \mathbf{R}'|_{\{a,b\}}$.

A párok függetlensége feltétel esetén nem fordulhat elő az a furcsa eset, hogy két alternatíva közötti társadalmi preferenciát befolyásolják más alternatívapárokra vonatkozó preferenciák, továbbá, ha **PF** nem teljesül, előfordulhat, hogy stratégiai meggondolások eredményeként a szavazók akaratával szembenálló eredmények születnek. Riasztó példaként tekintsük a Borda féle pontozásos rendszerben a következő 15 szavazós szituációt:

1	7	7
a	c	b
b	b	c
c	a	a

ahol a profil fejlécében szereplő számok jelzik, hogy az alattuk lévő (őszinte) preferenciarendezés hány szavazóhoz tartozik. A Borda pontszámok a következők: $a:2$, $b:22$, $c:21$. A c támogatói azonban csökkenthetik a rivális b alternatíva pontszámát, ha azt a legutolsó helyre rangsorolják:

1	7	7
a	c	b
b	a	c
c	b	a

Ezt felismervén, b támogatói is érdekeiknek megfelelően szavaznak:

1	7	7
a	c	b
b	a	a
c	b	c

Így tehát az esélytelen a nevető harmadikként győztese lett a szavazásnak.

PF ellen szól viszont az alábbi érvelés:

7	6	5
a	c	b
b	a	c
c	b	a

A fenti szavazási szituációban az általánosság nem túl nagy megszorítása mellett feltehetjük, hogy a a győztes. Tegyük most fel, hogy b kiesik a versenyből (pl., mint jelölt visszalép). Az új profil:

7	6	5
a	c	c
c	a	a

ahol viszont nem az a, hanem nyilvánvalóan a c a győztes.

Ma is vita tárgya, hogy **PF**-re szükség van-e (lásd pl. [30, 31, 37, 38]).

3.9. Definíció. *Ha* $\mathbf{R} \in \mathcal{WL}(A)^m$*, akkor* $\mathbf{R}_K^{\succ}$ *jelentse azt, hogy* $x\mathbf{R}_K^{\succ}y \Leftrightarrow xR_i^{\succ}y, i \in K$*.*

3.10. Definíció. *Legyen az F egy összjóléti függvény és legyen* $x, y \in A, x \neq y$*. Egy* $K \subset V$ *koalíciót* (x,y)*-erősnek (inverz-*(x,y) *erősnek) nevezünk, ha* tetszőleges $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ *profil esetén, melyre* $x\mathbf{R}_K^{\succ}y$*, teljesül igaz, hogy* $xF(\mathbf{R})^{\succ}y$ $(yF(\mathbf{R})^{\succ}x)$*. Ha egy koalíció minden* $x, y \in A, x \neq y$ *esetén erős (inverz-erős), akkor erősnek (inverz erősnek) nevezzük.*

Ha egy koalíció (x,y) erős (inverz-(x,y) erős), akkor nyilván minden nála bővebb koalíció is (x,y) erős (inverz-(x,y) erős).

Az $\mathcal{L}(A)^m \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ esetben a többségi függvénynél egy koalíció nyilván pontosan akkor erős, ha a szavazóknak több, mint a felét tartalmazza.

3.11. Definíció. *Egy összjóléti függvényt Arrow-típusúnak nevezünk, ha tranzitív (azaz csak gyenge rendezéseket vesz fel), és teljesíti a párok függetlensége feltételt.*

3.12. Példa. Legyen $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$. Ekkor az alábbi függvények Arrow-típusúak:

1. Legyen $Q \in \mathcal{WL}(A)^m$ rögzített és legyen $F(\mathbf{R}) = Q$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re.
2. Legyen $F(\mathbf{R}) = R_1$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re.
3. $F(\mathbf{R}) = R_1^{-1}$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re.

Sajnos, ha $|A| \geq 3$ és $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$, akkor a fentieknél lényegesen „demokratikusabb” példát Arrow-típusú összjóléti függvényre nem lehet adni, amint azt a 3.24. tételben látni fogjuk.

3.13. Definíció. *Egy* $\mathcal{D}$ *értelmezési tartományra azt mondjuk, hogy* (x,y,z)*-teljes, ha* $x, y, z \in A$ *páronként különbözőek és* $\mathcal{D}|_{\{x,y,z\}} = \mathcal{WL}(\{x,y,z\})^m$ *vagy* $\mathcal{D}|_{\{x,y,z\}} = \mathcal{L}(\{x,y,z\})^m$*.*

3.14. Definíció. *Legyen* $\mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$*. A* $\mathcal{D}$*-t összefüggőnek nevezzük, ha minden* $x, y, u, v \in A, x \neq y, u \neq v$ *esetén található olyan* $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k$ *sorozat az A-ban, ahol* $a_1 = x, a_2 = y, a_{k-1} = u, a_k = v$*, hogy a* $\mathcal{D}$ *értelmezési tartomány* (a_i, a_{i+1}, a_{i+2})*-teljes minden* $i = 1, \ldots, k-2$*-re.*

3.15. Definíció. *Legyen az F egy összjóléti függvény. Ha valamely* $x, y \in A$*-ra* $xF(\mathbf{R})^{\succ}y$ *teljesül minden* $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ *esetén, akkor az F-et elfogultnak nevezzük.*

Az elfogultság nyilván egy hátrányos tulajdonság, hiszen ekkor bizonyos összpreferenciák nem valósulhatnak meg a szavazók semmilyen preferenciái esetén.

3.16. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $|A| \geq 3$ *és legyen a* $\mathcal{D}$ *összefüggő. Ha az F Arrow-típusú összjóléti függvény nem elfogult, akkor minden* (x,y)*-erős (inverz-*(x,y)*-erős) koalíció egyben erős (inverz-erős) is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az F-re teljesülnek a tétel feltételei, és tegyük fel, hogy a $K \subset V$ koalíció (x,y)-erős. Az az eset, amikor a K

koalíció (x, y) inverz erős, hasonlóan igazolható. Mivel a $\mathcal{D}$ összefüggő, ezért található olyan $a \in A \setminus \{x, y\}$ melyre igaz, hogy a $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (x, y, a)-teljes.

1. állítás. A K koalíció (x, a)-erős. Legyen ugyanis $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil, melyre $x\mathbf{R}_K^{\succ}a$. Az $\mathbf{R}$ profil számunkra érdekes részét egy egyszerű ábrán szemléltethetjük:

$$\mathbf{R}: \quad \begin{array}{cc} K & V \setminus K \\ \hline x & [xa]_{\mathbf{R}} \\ a & \end{array}$$

ahol $[xa]_{\mathbf{R}}$ a $V \setminus K$ koalíció tagjainak az (x, a) alternatívapárra vonatkozó tetszőleges preferenciáit képviseli. Mivel az F nem elfogult, ezért található egy olyan $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profil, melyre

$$yF(\mathbf{S})a \ . \tag{9}$$

Legyen most $\mathbf{T} \in \mathcal{D}$ egy olyan profil, melyre

$$\mathbf{T}|_{\{a,x\}} = \mathbf{R}|_{\{a,x\}} \tag{10}$$

és

$$\mathbf{T}|_{\{y,a\}} = \mathbf{S}|_{\{y,a\}} \ , \tag{11}$$

továbbá

$$x\mathbf{T}_K^{\succ}y \ . \tag{12}$$

Ábrán:

$$\mathbf{T}: \quad \begin{array}{cc} K & V \setminus K \\ \hline x & [xa]_{\mathbf{R}}[ya]_{\mathbf{S}} \\ [ya]_{\mathbf{S}} & \end{array}$$

ahol például $[ya]_{\mathbf{S}}$ a $V \setminus K$ oszlopában azt jelenti, hogy a $V \setminus K$-beliek $\mathbf{T}$-beli, (y, a) alternatívapárra vonatkozó preferenciái megegyeznek az $\mathbf{S}$ profilbeli (y, a) párra vonatkozó preferenciáikkal. Ilyen $\mathbf{T}$ profil nyilván létezik.

Mivel a K egy (x, y)-erős koalíció, ezért (12) miatt $xF(\mathbf{T})^{\succ}y$, továbbá (9) és (11) valamint a párok függetlensége feltétel miatt $yF(\mathbf{T})a$, s így a 2.15. állítás miatt $xF(\mathbf{T})^{\succ}a$, innen pedig (10) és a párok függetlensége feltétel alapján kapjuk, hogy $xF(\mathbf{R})^{\succ}a$. Tehát a K egy (x, a)-erős koalíció.

2. állítás. A K egy (a, y) erős koalíció. A bizonyításhoz most tekintsünk egy tetszőleges olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre $a\mathbf{R}_K^{\succ}y$. Mivel az F nem elfogult, ezért találunk olyan $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre $aF(\mathbf{S})x$. Tekintsünk egy, az alábbi ábrának megfelelő $\mathbf{T}$ profilt:

$$\mathbf{T}: \quad \begin{array}{cc} K & V \setminus K \\ \hline [ax]_{\mathbf{S}} & [ay]_{\mathbf{R}}[ax]_{\mathbf{S}} \\ y & \end{array}$$

Az 1. állításhoz hasonlóan igazolható, hogy $aF(\mathbf{R})^{\succ}y$, tehát a K koalíció (a, y) erős.

3. állítás. A K koalíció erős minden $\{x, y, a\}$-beli párra. Valóban, az 1. és a 2. állításokat alkalmazva könnyen adódik az eredmény.

Most már beláthatjuk, hogy a K koalíció (u, v)-erős minden (u, v) párra. A $\mathcal{D}$ összefüggősége miatt találhatók olyan $a_1, \ldots, a_k$ alternatívák ($k \in I\!N$), melyekre igaz, hogy a $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) teljes (ahol $a_1 = x, a_2 = y, a_{k-1} = u, a_k = v$) minden $i = 1, \ldots, k-2$ esetén. Ekkor azonban a 3. állítás miatt a K koalíció (y, a_1)-erős, innen kapjuk, hogy (a_1, a_2)-erős, végül kapjuk, hogy (u, v)-erős. Bebizonyítottuk tehát, hogy a K koalíció erős. □

3.17. Definíció. *Egy F összjóléti függvényt közömbösnek nevezünk, ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén $F(\mathbf{R}) = A \times A$.*

A közömbösség nyilván egy nemkívánatos tulajdonság, hiszen egy ilyen tulajdonságú függvény által semmilyen információ nem nyerhető egy profilból.

3.18. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, továbbá, hogy a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(A)$ egy nem közömbös és nem elfogult Arrow-típusú összjóléti függvény. Ekkor a V vagy erős, vagy inverz erős.*

Bizonyítás. Mivel az F nem közömbös, ezért található egy olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil, és x, y alternatívák, melyekre $xF(\mathbf{R})^{\succ}y$. Legyen most a egy olyan alternatíva, melyre igaz, hogy az $\mathcal{D}$ értelmezési tartomány (x, y, a)-teljes és tekintsünk egy olyan $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre $a\mathbf{S}_V^{\succ}x$ és $a\mathbf{S}_V^{\succ}y$ teljesül, továbbá $\mathbf{S}|_{\{x,y\}} = \mathbf{R}|_{\{x,y\}}$. Ilyen S profil nyilván létezik. Ábrán:

$$\mathbf{S} : \quad \begin{array}{c} V \\ \hline a \\ {[xy]}_{\mathbf{R}} \end{array}$$

A párok függetlensége miatt $xF(\mathbf{S})^{\succ}y$. Ha $aF(\mathbf{S})^{\succ}y$, akkor a párok függetlensége miatt a V egy (a, y) erős koalíció és így a 3.16. lemma miatt a V erős. Ha $yF(\mathbf{S})a$, akkor a 2.15. állítás és $xF(\mathbf{S})^{\succ}y$ miatt $xF(\mathbf{S})^{\succ}a$, s így a V inverz erős ismét a 3.16. lemma miatt. □

A továbbiakban néhány állítást mondunk ki a szavazók halmazán tekintett speciális halmazrendszerekre. Egyrészt ki fogjuk mutatni, hogy az (inverz) erős koalíciók rendelkeznek ezzel a specialitással, másrészt belátjuk, hogy ez a specialitás az egy elem (a diktátor) általi generálást jelenti.

3.19. Definíció. *Egy $\mathcal{X}$ halmazrendszerre azt mondjuk, hogy monoton, ha $X \in \mathcal{X}$, $X' \supset X$ esetén $X' \in \mathcal{X}$. Az ilyen halmazrendszereket felszállónak is nevezik.*

3.20. Definíció. *Egy $\mathcal{X}$ halmazrendszerre azt mondjuk, hogy zárt a véges metszetre, ha $X_1, \ldots, X_t \in \mathcal{X}$, $t \geq 2$ esetén $\bigcap_{s=1}^{t} X_s \in \mathcal{X}$.*

A 3.20. definícióban nyilván elég $t = 2$-t venni, akkor is ugyanazt a fogalmat kapjuk.

3.21. Definíció. *Egy X_0-beli $\mathcal{X}$ nemüres halmazrendszerre, melyre $\emptyset \notin \mathcal{X}$, azt mondjuk, hogy egy szűrő az X_0 felett, ha monoton, valamint zárt a véges metszetre nézve. Ha a fentieken kívül még az*

$$X \notin \mathcal{X} \quad \textit{esetén} \quad X_0 \setminus X \in \mathcal{X} \tag{13}$$

tulajdonság is teljesül, akkor ultraszűrőről beszélünk.

Ha $\emptyset \neq Y_0 \subset X_0$ és $\mathcal{X} = \{X \mid Y_0 \subset X \subset X_0\}$, akkor az $\mathcal{X}$ nyilván szűrő az X_0 felett, és pontosan akkor ultraszűrő, ha az Y_0 egyelemű. A fenti tulajdonságú $\mathcal{X}$-eket főszűrőnek, egyelemű Y_0 esetén pedig alapszűrőnek nevezzük, és azt mondjuk, hogy az $\mathcal{X}$-et az Y_0 generálja. Az ultraszűrők maximális szűrők, amennyiben minden szűrő része egy ultraszűrőnek. Végtelen X_0 esetén ennek az állításnak az igazolása transzfinit eszközöket igényel, véges X_0 esetén azonban könnyen igazolható az alábbi állítás:

3.22. Állítás. *Legyen a X_0 egy véges halmaz. Ekkor*

i) minden X_0 feletti szűrő főszűrő;

ii) minden X_0 feletti ultraszűrő alapszűrő.

Bizonyítás. i). Ha az $\mathcal{X}$ szűrő egy X_0 feletti szűrő, akkor az X_0 végessége és a végesmetszet tulajdonság miatt $\bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{X}$. Így tehát a monotonitás miatt az $\mathcal{X}$ valóban főszűrő.

ii). Ha az $\mathcal{X}$ egy ultraszűrő az X_0-n, akkor i) miatt az $\mathcal{X}$ főszűrő. Belátjuk, hogy $\{x\} \in \mathcal{X}$ valamilyen $x \in X_0$-ra. Ha ez nem lenne igaz, akkor (13) miatt $X_0 \setminus \{x\} \in \mathcal{X}$ minden $x \in X_0$-ra, s így $\emptyset = \bigcap_{x \in X_0}(X_0 \setminus \{x\}) \in \mathcal{X}$, ami ellentmondás. Tehát $\mathcal{X}$ valóban alapszűrő. □

3.23. Definíció. *Egy F összjóléti függvényt diktatórikusnak (inverz diktatórikusnak) nevezünk, ha található olyan $i \in V$ melyre az $\{i\}$ koalíció erős (inverz erős). Ilyenkor az i-t diktátornak (inverz diktátornak) nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy egy összjóléti függvény esetében legfeljebb egy diktátor létezhet. Ha azonban az i egy diktátor, akkor $xR_i^{\sim}y$ még nem jelenti feltétlenül azt, hogy $xF(\mathbf{R})^{\sim}y$. Tekintsük példának következő összjóléti függvényt: $\mathbf{R} \in \mathcal{WL}(A)^m$ esetén legyen $xF(\mathbf{R})y$ pontosan akkor igaz, ha minden $i \in V$-hez, melyre $yR_i^{\succ}x$ teljesül, található olyan $j \in V, j < i$, melyre $xR_j^{\succ}y$. Az F-nél az 1 diktátor, azonban ha $xR_1^{\succ}y$, akkor az $F(\mathbf{R})|_{\{x,y\}}$ preferenciát a többi szavazó preferenciáinak hierarchikus rendje (a 2-től lefelé az m-ig) határozza meg.

3.24. Tétel (Wilson [40]). *Ha $|A| \geq 3$, akkor minden Arrow-típusú összjóléti függvényre, melynek értelmezési tartománya összefüggő, az alábbi tulajdonságok valamelyike igaz:*

i) közömbös ii) elfogult iii) inverz diktatórikus iv) diktatórikus.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $F : \mathcal{D} \to \mathcal{R}(A)$ összjóléti függvény teljesíti a tétel feltételeit. Tegyük fel továbbá, hogy az F nem közömbös és nem elfogult. Belátjuk, hogy ekkor vagy az erős vagy az inverz erős koalíciók ultraszűrőt alkotnak a V-n. Innen a 3.22. állítás alapján már következik tételünk állítása. Tegyük fel egyelőre, hogy a V koalíció erős, s így az erős koalíciók $\mathcal{U}$ halmaza nemüres.

Mivel a V erős, ezért $\emptyset \notin \mathcal{U}$. Az erős koalícióknál bővebb koalíciók is erősek, ezért az $\mathcal{U}$ monoton.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{U}$ zárt a végesmetszet képzésre nézve. Legyen $K, L \in \mathcal{U}$, és $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil, melyre $x\mathbf{R}^{\succ}_{K\cap L}y$. Legyen az a egy harmadik alternatíva és $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ egy, az alábbi ábrának megfelelő profil:

$$\mathbf{S}: \quad \begin{array}{ccc} K\cap L & K\setminus L & V\setminus K \\ \hline x & [xy]_{\mathbf{R}} & a \\ a & a & [xy]_{\mathbf{R}} \\ y & & \end{array}.$$

Ekkor $xF(\mathbf{S})^{\succ}a$, hiszen a K erős koalíció. Továbbá $aF(\mathbf{S})^{\succ}y$, hiszen az L feltevésünk szerint egy erős koalíció s így a nála bővebb $(K\cap L)\cup(V\setminus K) = L\cup(V\setminus K)$ koalíció is erős. Innen a tranzitivitás miatt $xF(\mathbf{S})^{\succ}y$, majd tekintettel a párok függetlenségére kapjuk, hogy $xF(\mathbf{R})^{\succ}y$. Beláttuk tehát, hogy a $K\cap L$ koalíció erős.

Belátjuk végül, hogy a (13) tulajdonság teljesül. Tegyük fel, hogy $K \subset V, K \notin \mathcal{U}$. Ekkor található olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil és $x, y \in A$, melyre $x\mathbf{R}^{\succ}_{K}y$ és mégis $yF(\mathbf{R})x$. Legyen az a egy harmadik alternatíva, és legyen az $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil, melyre $y\mathbf{S}^{\succ}_{V\setminus K}a$. Legyen végül $\mathbf{T} \in \mathcal{D}$ egy olyan profil, amely megfelel az alábbi ábrának:

$$\mathbf{T}: \quad \begin{array}{cc} K & V\setminus K \\ \hline x & [xy]_{\mathbf{R}} \\ [ya]_{\mathbf{S}} & a \end{array}.$$

Ekkor a párok függetlensége miatt $yF(\mathbf{T})x$, és mivel a V erős, $xF(\mathbf{T})^{\succ}a$ is teljesül, ahonnan a 2.15. állítás miatt $yF(\mathbf{T})^{\succ}a$. Innen a párok függetlensége feltétel alapján kapjuk, hogy $yF(\mathbf{S})^{\succ}a$. Mivel az $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ egy tetszőleges olyan profil volt, melyre $y\mathbf{S}^{\succ}_{V\setminus K}a$, ezért bebizonyítottuk, hogy a $V\setminus K$ koalíció erős az (y, a) párra, s így a 3.16 lemma alapján kapjuk, hogy $V\setminus K \in \mathcal{U}$.

Beláttuk tehát, hogy az $\mathcal{U}$ egy ultraszűrő, s így abban az esetben, amikor a V erős, a lemma bizonyításával készen vagyunk. A 3.18. lemma miatt az egyetlen másik lehetőség az, hogy a V inverz erős. Ebben az esetben viszont a fenti bizonyítást követve kapjuk, hogy most az inverz erős koalíciók alkotnak ultraszűrőt. $\square$

3.25. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy összjóléti függvény teljesíti a Pareto-feltételt, ha a V erős.*

Egy Pareto-feltételt kielégítő összjóléti függvény tehát nem lehet elfogult. A 3.24. tétel egyszerű következménye az alábbi, Arrow-tól származó tétel:

3.26. Következmény (Arrow [3]). *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, és legyen az F egy Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül*

i) $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$;

ii) a Pareto-feltétel.

Ekkor az F diktatórikus.

Bizonyítás. Valóban, a Pareto-feltétel miatt a 3.24. tételben az i), ii) és iii) tulajdonságok nem teljesülhetnek, s így az F csak diktatórikus lehet. □

Legyen $\mathcal{D}$ az A egy adott rendezésére nézve egycsúcsú profilok halmaza. Ha $|V|$ páratlan, akkor a T többségi függvény $\mathcal{D}$-re való megszorítása nyilván teljesíti a tételbeli feltételeket, kivéve azt, hogy $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$, mégsem diktátor senki sem.

Ha $\mathcal{L}(A)^m \subsetneqq \mathcal{D} \subsetneqq \mathcal{WL}(A)^m$, akkor sem feltétlenül igaz az Arrow tétel. Legyen ugyanis $\mathcal{D} = (\mathcal{L}(A) \cup \{O\})^m$ (ahol $O = A \times A$), legyen $|A| \geq 3$, $|V| \geq 2$ és legyen az F összjóléti függvény az $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilnál az alábbiak szerint megadva:

$$F(\mathbf{R}) = \begin{cases} R_1 & \text{ha } R_i \neq O \text{ minden } i \in V\text{-re;} \\ O & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ez az F összjóléti függvény könnyen ellenőrizhetően Arrow-típusú, teljesül a Pareto-feltétel is, de az F mégsem diktatórikus.

Ha az Arrow tételben az F tranzitivitását elejtjük, akkor már nem igaz a tétel. Valójában már akkor sem igaz, ha a tranzitivitást kvázitranzitivitásra enyhítjük, amint azt a Pareto függvény példája mutatja (Lásd a 3.4. példát).

4 Oligarchiák, vétó és kollégium

Az Arrow (és a Wilson) tétel egy kifogásolható pontja az összpreferenciától megkövetelt tranzitivitás, amelyet úgy interpretálhatunk, mint társadalmi szintű racionalitást. Egyrészt eleve kérdés, hogy helyes-e az egyénekre jellemző racionalitást a társadalomtól is megkövetelni, és ezáltal a társadalmat valamiféle ,,személyiségként" kezelni, másrészt a fenti racionalitás matematikai szempontból is túl erősnek tűnik, hiszen az $F(\mathbf{R})$ társadalmi relációnak elsősorban az a szerepe, hogy segítségével kiválasszuk az alternatívák egy adott részhalmazában a maximális elemeket. Ez pedig akkor is lehetséges, ha csak annyit követelünk meg, hogy az összpreferencia aciklikus legyen (lásd a 2.20. állítást). Mivel az aciklikus, **PF**-et kielégítő összjóléti függvények elmélete ma sem lezárt terület, érthető, hogy az első eredmények speciális aciklikus, nevezetesen kvázitranzitív összjóléti függvényekre születtek. Az egyik ilyen tétel ([21]) szerint a racionalitásnak ez a fajta enyhítése sem hoz ,,enyhülést", továbbra is csak gyakorlatban használhatatlan összjóléti függvények jöhetnek szóba. Az aciklikus (és **PF**-et teljesítő) összjóléti függvények esetében a kép valamivel árnyaltabb, de az általános esetben ezek használhatósága is kérdéses.

4.1. Definíció. *Egy F összjóléti függvény esetében egy K koalíciót vétóerősnek nevezünk az (x, y) pár fölött ($x, y \in A, x \neq y$), ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profil esetén abból, hogy $x\mathbf{R}_K^{\succ}y$, következik, hogy $xF(\mathbf{R})y$. Ha a K minden x, y*

pár fölött vétóerős, akkor vétóerősnek mondjuk. Az $i \in V$ szavazó vétóerős, ha az $\{i\}$ koalíció vétóerős.

A definícióból világos, hogy minden erős koalíció egyben vétóerős is.

4.2. Definíció. *Egy kvázitranzitív összjóléti függvényt mely teljesíti a párok függetlensége feltételét kvázi Arrow-típusú függvénynek nevezünk.*

4.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel. Ekkor minden (x, y)-erős koalíció egyben erős is.*

Bizonyítás. A 3.16. lemma bizonyítása most is megy, ott ugyanis az F-ről nem használtuk ki, hogy tranzitív, csupán azt, hogy kvázitranzitív. □

A 3.24. tétel bizonyítását követve és az értelemszerű kis módosításokat megtéve kapjuk, hogy igaz az alábbi két lemma:

4.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel, továbbá $\mathcal{D}$ összefüggő. Ekkor az erős koalíciók szűrőt alkotnak.*

4.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel, továbbá $\mathcal{D}$ összefüggő. Ekkor egy nem vétóerős koalíció komplementere erős.*

4.6. Definíció. *Egy F összjóléti függvényt oligarchikusnak nevezünk, ha létezik oligarchia, vagyis olyan koalíció, mely erős és minden tagja vétóerős.*

4.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, a $\mathcal{D}$ összefüggő és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül a Pareto-feltétel. Ekkor az F oligarchikus.*

Bizonyítás. Az erős koalíciók $\mathcal{W}$ halmaza a 4.4 lemma miatt szűrő, s a V végessége miatt ez egy K koalíció által generált főszűrő. Állítjuk, hogy K a keresett oligarchia. Valóban, ha a K-beli i szavazó nem lenne vétóerős, akkor a 4.5. lemma miatt a $V \setminus \{i\}$ koalíció erős lenne, s így a $K \cap (V \setminus \{i\}) = K \setminus \{i\}$ koalíció is erős lenne, ami lehetetlen, hiszen a $\mathcal{W}$-t a K generálja. A tételt ezzel bebizonyítottuk. □

A 4.7. tétel egyszerű következménye az alábbi tétel:

4.8. Következmény (Gibbard [21]). *Tegyük fel, hogy $|A| \geq 3$, és legyen az F egy kvázi Arrow-típusú összjóléti függvény, melyre teljesül*

i) $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$;

ii) a Pareto-feltétel.

Ekkor az F oligarchikus.

A 4.7. tétel bizonyításában szereplő K éppen a vétóerős szavazók halmaza, hiszen a K-n kívüliek nem lehetnek vétóerősek, mert a K erős. Megeshet azonban, hogy minden szavazó vétóerős, amint azt a Pareto függvény esete mutatja (lásd a 3.4. és 3.5. példákat).

Ha $\mathcal{D}$ valódi részhalmaza $\mathcal{L}(A)^m$-nek, akkor már nem feltétlenül igaz a 4.8 tétel. Legyen $\mathcal{D}$ az A egy adott rendezésére nézve egycsúcsú profilok halmaza. Ekkor a T többségi függvény nyilván teljesíti a 4.8. tétel feltételeit, kivéve i)-t. Most nincs olyan szavazó, aki vétóerős lenne, amennyiben $m \geq 2$.

4.9. Példa. Ha a 4.7. tételben az F kvázitranzitivitását elejtjük, akkor már nem igaz a tétel. Valójában már akkor sem igaz, ha a kvázitranzitivitást aciklikusságra enyhítjük. Legyen ugyanis $\#V > \#A, \mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$ és legyen F a 3.6. példa vétómentes függvénye. Az F ekkor a 3.7. megjegyzés miatt aciklikus, továbbá a kvázitranzitivitást kivéve teljesíti a 4.7. tétel valamennyi feltételét, azonban nincs olyan szavazó, aki vétóerős lenne.

4.10. Definíció. *Legyen az R egy reláció az A-n. Ha az $a_1, \ldots, a_k \in A$ sorozat csupa különböző elemből áll, akkor $a_1 R a_2, \ldots, a_{k-1} R a_k$ esetén irányított egyszerű útról, és ha a fentieken kívül még $a_k R a_1$ is fennáll, akkor egyszerű irányított körről beszélünk. Irányított egyszerű utak egy rendszerét pont-diszjunktnak nevezzük, ha a hozzájuk tartozó csúcsok halmazai páronként diszjunktak.*

4.11. Definíció. *Azokat az aciklikus összjóléti függvényeket, melyekre teljesül a párok függetlensége feltétel, döntési függvényeknek nevezzük.*

Az elnevezést indokolja, hogy a 2.20. állítás miatt pontosan az aciklikus relációk azok a relációk, melyekre igaz, hogy az alternatívák bármely nemüres részhalmazában van maximális elemük.

4.12. Tétel. (Blair-Pollak [8]) *Legyen $\#A = n \geq 4, n > m$ és legyen adott az F döntési függvény, melyre teljesül*

i) $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ *vagy* $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$;

ii) a Pareto-feltétel.

Ekkor valaki legalább $(n - m + 1)(n - 1)$ pár fölött vétóerős.

Bizonyítás. A tétel állításával ellentétben, tegyük fel, hogy mindenki kevesebb, mint $(n - m + 1)(n - 1)$ pár fölött vétóerős.

Szükségünk lesz a következő gráfelméleti tételre, amelynek bizonyítása meghaladja e cikk kereteit, így azt mellőzzük (lásd [9]):

Tétel. *Legyen $\#A = n \geq 4, n > m$. Ha adottak a D_i $(i = 1, \ldots, m)$ irreflexív (tehát xD_ix semmilyen $x \in A$-ra sem teljesül) relációk az A-n, úgy, hogy D_i legalább $(m-1)(n-1)+1$ élet tartalmaz $(i = 1, \ldots, m)$, akkor találhatók olyan $e_i \in D_i, (i = 1 \ldots, m)$ élek, hogy az $\{e_1, \ldots, e_m\}$ élrendszer pont-diszjunkt egyszerű utak egyesítése.*

Visszatérve tételünk bizonyításához, minden $i = 1, \ldots, m$ esetén definiáljuk a D_i relációt az A-n az alábbi módon:

$$aD_ib \Leftrightarrow \text{az } i \text{ nem vétóerős a } (b, a) \text{ fölött.}$$

Indirekt feltevésünk miatt a D_i-k mindegyike legalább $n(n-1)-(n-m+1)(n-1)+1=(n-1)(m-1)+1$ élet tartalmaz.

A fenti tétel miatt található olyan pont-diszjunkt egyszerű utak egyesítéseként előálló $E=\{e_i\}_{i=1}^m$ élrendszer, melyre $e_i \in D_i$, ha $i \in V$. Új élek hozzávételével egészítsük ki az E élrendszert egy $a_1,\dots,a_{m+k}$ egyszerű irányított körré. Legyen ebben a körben $e_i=(a_{i^*},a_{i^*+1}), i=1,\dots,m$. A kényelmesebb jelölésmód érdekében nevezzük át a V szavazóit úgy, hogy az i új neve i^* legyen minden $i \in V$-re, és legyen az új névhalmaz V^*. Ekkor tehát azt mondhatjuk, hogy a $i \in V^*$ szavazó nem vétóerős az (a_{i+1},a_i) párra nézve. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in V^*$-ra található olyan $\mathbf{R}^i \in \mathcal{D}$ profil, melyre $a_{i+1}(R_i^i)^{\succ}a_i$ és $a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}$.

Másrészt, ha $i \in \{1,\dots,m+k\} \setminus V^*$, akkor legyen $\mathbf{R}^i \in \mathcal{D}$ egy olyan profil, melyre $a_i(R_j^i)^{\succ}a_{i+1}$ minden $j \in V^*$-ra. Mivel az F-re teljesül a Pareto-feltétel, ezért $a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}$, ha $i \in \{1,\dots,m+k\} \setminus V^*$ (a szokásos $a_{m+k+1}=a_1$ konvencióval). Az eddigieket összevetve kapjuk, hogy minden $i=1,2,\dots,m+k$-ra igaz, hogy $a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}$. Ha találnánk olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilt, melyre minden $i=1,2,\dots,m+k$-nál igaz, hogy

$$\mathbf{R}|_{\{a_i,a_{i+1}\}}=\mathbf{R}^i|_{\{a_i,a_{i+1}\}}, \quad \text{ha} \quad i=1,\dots,m+k\ ,$$

akkor készen volnánk, hiszen ekkor a párok függetlensége feltétel és

$$a_iF(\mathbf{R}^i)^{\succ}a_{i+1}, \quad (i=1,2,\dots,m+k)$$

miatt az $F(\mathbf{R})$ reláció ciklikus lenne, ellentétben feltételezésünkkel.

Ilyen profil azonban található, hiszen ha a $t \in V^*$ szavazót rögzítjük, akkor a $\left\{R_t^i|_{\{a_i,a_{i+1}\}}\right\}_{i=1,\dots,m+k}$ preferenciahalmaz $\mathcal{D}=\mathcal{WL}(A)^m$ ill. $\mathcal{D}=\mathcal{WL}(A)^m$ esetén egyaránt kiegészíthető az A lineáris ill. gyenge rendezésévé (ekkor mindkét esetben az $a_{m+k}R_t^ia_1$ és a $a_{t+1}R_t^ia_t$ szigorú preferenciák ellentétes irányúak az $a_1\dots a_{m+k}$ körön), s így $\mathbf{R}=(R_i)_{i\in V^*}$ megfelel, hiszen i) miatt $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$. □

A 4.12. tételben a $(n-m+1)(n-1)$ korlát az $m \geq 3$ esetben a lehető legjobb. Legyen ugyanis $\mathcal{D}=\mathcal{L}(A)^m$ vagy $\mathcal{D}=\mathcal{WL}(A)^m$, és ha $A=\{a_1,\dots,a_n\}$, akkor $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $a_sF(\mathbf{R})a_t \Leftrightarrow [1 \leq t \leq m-1$ és $\exists i,j \in V, i \neq j : a_sR_ia_t, a_sR_ja_t]$ vagy $[m \leq t \leq n$ és $\exists i \in V : a_sR_ia_t]$. Mivel $m \geq 3$, ezért az $F(\mathbf{R})$ teljessége nyilvánvaló. Minden szavazó az (a_s,a_t) pár fölött vétóerős, ahol $m \leq t \leq n, 1 \leq s \leq n$, azaz éppen $(n-m+1)(n-1)$ pár fölött. Az F definíciójából világos, hogy a párok függetlensége és a Pareto-feltétel is teljesül. Az aciklikusság igazolásához indirekte, tegyük fel, hogy valamely $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ profilra az $F(\mathbf{R})$ reláció ciklikus, legyen az $b_1,\dots,b_k$ egy olyan A-beli sorozat, melyben ismétlődés nem fordul elő és minden $t=1,\dots,k$-ra $b_tF(\mathbf{R})^{\succ}b_{t+1}$ teljesül. Ilyen sorozat nyilván található. Az F definíciója alapján csak az olyan t-kre találhatunk (és akkor is csak egy) olyan i szavazót, akire $b_{t+1}R_ib_t$, melyekre $b_{t+1}=a_s$ valamilyen $s=1,\dots,m-1$-re. Mivel m szavazónk van, ezért lesz egy olyan i szavazó, akire $b_{t+1}R_i^{\succ}b_t$ minden $t=1,\dots,k$-ra, ami ellentmondás, hiszen R_i aciklikus.

A szakasz hátralévő részében a Banks-tétellel foglalkozunk. Ez a tétel aciklikus összjóléti függvényekről szól, és azt mondja, hogy ha $\#V \geq \#A$ és a Pareto-feltétel teljesül, akkor mindig találhatunk olyan szavazót, aki nélkül nincs erős koalíció. Egy ilyen szavazó nyilván túl nagy hatalommal rendelkezik, így tehát ez is egy negatív eredmény. Az eredmény igen általános, hiszen az igazoláshoz még a párok függetlensége feltételre sincs szükség.

4.13. Definíció. *A V-beli $\mathcal{W}$ monoton halmazrendszert egyszerű játéknak nevezzük, ha $\emptyset \notin \mathcal{W}$.*

A $\mathcal{W}$-beli koalíciókat úgy interpretálhatjuk, mint —bizonyos értelemben— nyertes koalíciókat, melyek nyertes volta valamilyen előre megadott szabályból következik.

4.14. Definíció. *Egy $\mathcal{W}$ egyszerű játékot valódinak nevezünk, ha abból, hogy $K \in \mathcal{W}$, következik, hogy $V \setminus K \notin \mathcal{W}$.*

A fenti természetes követelmény azt fogalmazza meg, hogy egy nyertes koalíción kívüli egyének nem alakíthatnak nyertes koalíciót.

4.15. Definíció. *Ha $\mathcal{W}$ egy valódi egyszerű játék, és adott az A alternatívahalmaz, akkor $\mathbf{R} \in \mathcal{WL}(A)^m$ esetén legyen az $F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})$ reláció az a teljes reláció az A-n, melynek $F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ}$ szigorú része az alábbiak szerint adott:*

$$xF_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ}y \Leftrightarrow \exists K \in \mathcal{W} : x\mathbf{R}_K^{\succ}y.$$

Mivel a $\mathcal{W}$ egyszerű játék valódi, ezért a fenti $F_{\mathcal{W}}$ összjóléti függvény jóldefiniált.

4.16. Definíció. *Egy $\mathcal{W}$ egyszerű játékot vétómentesnek nevezünk, ha*

$$\bigcap \mathcal{W} = \emptyset.$$

4.17. Definíció. *Egy $\mathcal{W}$ vétómentes egyszerű játék esetén legyen*

$$\nu(\mathcal{W}) = \min\{\#\mathcal{W}' \mid \mathcal{W}' \subset \mathcal{W},\ \bigcap \mathcal{W}' = \emptyset\}\,.$$

A $\nu(\mathcal{W})$ számot a $\mathcal{W}$ Nakamura-számának nevezzük.

Egy $\mathcal{W}$ vétómentes egyszerű játék Nakamura-száma tehát az olyan nyerő koalíciók minimális száma, melyeknek nincs közös eleme. A fenti definíció fontosságát mutatja az alábbi lemma:

4.18. Lemma. *Legyenek $a_1, \ldots, a_k$ páronként különböző alternatívák és $K_1, \ldots, K_k$ koalíciók. Pontosan akkor található olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(A)^m$ profil, melyre $a_i\mathbf{R}_{K_i}^{\succ}a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra, ha $\bigcap_{j=1}^k K_j = \emptyset$.*

Bizonyítás. Elégségesség. Minden $i \in V$-re legyen $B_i = \{(a_j, a_{j+1}) \mid i \in K_j\}$. Mivel most minden $i \in V$-hez található olyan $j \in \{1, \ldots, k\}$ melyre $i \notin K_j$, ezért minden $i \in V$-hez található olyan $j \in V$, melyre $(a_j, a_{j+1}) \notin B_i$.

Ezért B_i aciklikus és mivel még aszimmetrikus is, így nyilván kiterjeszthető egy R_i lineáris rendezéssé. Az $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ profil rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

Szükségesség. Ha $\bigcap_{j=1}^k K_j \neq \emptyset$ lenne, akkor $i \in \bigcap_{j=1}^k K_j$ esetén $a_j R_i a_{j+1}$ teljesülne minden $j = 1, \ldots, k$-ra, ami ellentmond annak, hogy R_i aciklikus. □

4.19. Tétel (Nakamura [35]). *Ha $\mathcal{W}$ egy valódi és vétómentes egyszerű játék, akkor az $F_{\mathcal{W}}$ összjóléti függvény pontosan akkor aciklikus, ha $\#A < \nu(\mathcal{W})$.*

Bizonyítás. Szükségesség. A $\nu(\mathcal{W}) = \nu$ definíciója alapján találhatók olyan $K_1, \ldots, K_\nu \in \mathcal{W}$ koalíciók, melyek metszete üres. A tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy $|A| \geq \nu$, s így találhatunk ν páronként különböző elemet az A-ban, legyenek ezek $a_1, \ldots, a_\nu$. Ekkor a 4.18. lemma miatt létezik olyan $\mathbf{R} \in \mathcal{L}(A)^m$ profil, melyre $a_i \mathbf{R}_{K_i}^{\succ} a_{i+1}$, $i = 1, \ldots, \nu$. Így azonban $a_i F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ} a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, \nu$-re, azaz $F_{\mathcal{W}}$ nem aciklikus.

Elégségesség. Indirekte, tegyük fel, hogy az $F_{\mathcal{W}}$ nem aciklikus, tehát találhatók olyan páronként különböző $a_1, \ldots, a_k$ alternatívák, melyekre minden $i = 1, \ldots, k$-ra $a_i F_{\mathcal{W}}(\mathbf{R})^{\succ} a_{i+1}$. Így tehát $a_i \mathbf{R}_{K_i}^{\succ} a_{i+1}$ bizonyos $K_i \in \mathcal{W}$ koalíciókra ($i = 1, \ldots, k \leq \#A$). Ekkor azonban a 4.18. miatt $\bigcap_{i=1}^k K_i = \emptyset$, ami alapján $k \geq \nu(\mathcal{W})$, s így $\#A \geq \nu(\mathcal{G})$, ellentmondás. □

4.20. Definíció. *Egy összjóléti függvényt kollégiuminak nevezünk, ha valamely szavazó minden erős koalíciónak tagja.*

4.21. Definíció. *Ha F egy összjóléti függvény, akkor jelölje $\mathcal{W}_F$ az erős koalíciók halmazát.*

4.22. Lemma. *Ha az F nem kollégiumi összjóléti függvényre teljesül a Pareto-feltétel, akkor $\nu(\mathcal{W}_F) \leq m$.*

Bizonyítás. A $\mathcal{W}_F$ halmazrendszer most nyilván egy valódi egyszerű játék, amely az F nem kollégiumi volta miatt vétómentes. Legyen $\nu(\mathcal{W}_F) = \nu$ és legyen $K_1, \ldots, K_\nu \in \mathcal{W}_F$, $\bigcap_{i=1}^\nu K_i = \emptyset$. Ekkor a K_i-k közül akárhánynak a metszetét is vesszük, az nem része egy, a metszetben nem szereplő indexű K_i-nek, hiszen ellenkező esetben a $\{K_i\}_{i=1}^\nu$ rendszer nem volna minimális, ellentétben ν definíciójával. Innen indukcióval világos, hogy

$$m - \nu \geq \left| \bigcap_{i=1}^{\nu} K_i \right| = 0\,.$$

□

4.23. Tétel (Banks [4]). *Tegyük fel, hogy $m \leq n$ és legyen $\mathcal{D} \supset \mathcal{L}(A)^m$. Ha az F aciklikus összjóléti függvényre teljesül a Pareto-feltétel, akkor az F kollégiumi.*

Bizonyítás. Ha a tétel állításával ellentétben az F nem volna kollégiumi, akkor a 4.22. lemma miatt $\nu(\mathcal{W}_F) \leq m$ teljesülne és ez az $m \leq n$ feltételünkkel együtt azt eredményezné, hogy $\nu(\mathcal{W}_F) \leq n$. Mivel a $\mathcal{W}_F$ most vétómentes, így a 4.19. tétel szerint az $F_{\mathcal{W}_F}(\mathbf{R})$ reláció ciklikus valamely $\mathbf{R}$ profil esetében.

Másrészt nyilván $F_{\mathcal{W}_F}(\mathbf{R})^{\succ} \subset F(\mathbf{R})^{\succ}$, tehát az $F(\mathbf{R})$ is ciklikus, ellentétben feltételezésünkkel. $\square$

A következő állítás mutatja, hogy a 4.23. és a 4.12. tételek nem igazak, ha $\#A > \#V$:

4.24. Állítás. *Ha $\#V > \#A$, akkor létezik olyan, a Pareto-feltételt kielégítő döntési függvény, melynél senki sem vétóerős semmilyen alternatívapár fölött.*

Bizonyítás. Legyen $\#V = m$, $\#A = n$, $m > n$, $\frac{n-1}{n} < \alpha \leq \frac{m-1}{m}$, $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$. Tetszőleges $x, y \in A$ esetén álljon fenn $xF(\mathbf{R})y$ pontosan akkor, ha $\#\{i \in V \mid xR_iy\} > (1-\alpha)m$. Mivel $\alpha > \frac{1}{2}$, ezért az $F(\mathbf{R})$ egy teljes reláció minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re. Tehát F egy összjóléti függvény. Az F definíciója alapján az F-re teljesül a párok függetlensége feltétel, továbbá $\alpha \leq \frac{m-1}{m}$ miatt minden $m-1$ tagú koalíció erős, ezért teljesül a Pareto-feltétel, sőt, senki sem vétóerős semmilyen alternatívapár fölött. Az F aciklikusságának igazolásához indirekte, tegyük fel, hogy az $a_1, \ldots, a_k$ olyan, páronként különböző A-beli alternatívák, melyekre $a_iF(\mathbf{R})^{\succ}a_{i+1}$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. A $K_i = \{j \in V \mid a_iR_ja_{i+1}\}$ jelöléssel az F definíciója alapján ekkor látszik, hogy $\#K_i \geq \alpha m$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Ezért a de-Morgan szabályt felhasználva kapjuk, hogy $\#\bigcap_{i=1}^k K_i = \#\left(\bigcup_{i=1}^k K_i^c\right)^c = m - \#\bigcup_{i=1}^k K_i^c \geq m - \sum_{i=1}^k \#K_i^c \geq m - m(1-\alpha)k \geq m - m(1-\alpha)n > m - m\frac{1}{n}n = 0$. A fenti egyenlőtlenségsorozatból következik, hogy $\#\bigcap_{i=1}^k K_i > 0$, azaz $\bigcap_{i=1}^k K_i \neq \emptyset$. Ez indirekt feltételezésünkkel együtt ellentmond a 4.18. lemmának, tehát F valóban aciklikus. $\square$

5 Bináris alapú optimum függvények

Ebben a fejezetben és a későbbiekben is az állítások, tételek bizonyítását jórészt mellőzzük. Ennek oka, hogy a bizonyítások vagy pusztán technikai jellegűek, jóformán semmit sem adva az elmélet lényegéhez, vagy éppen nehezek és hosszúak, ezért a terjedelmi korlátok nem teszik lehetővé azok megadását.

5.1. Definíció. *Egy $c : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ típusú függvényt optimum függvénynek nevezünk, ha $c(X) \subset X$ minden $X \subset A$-ra teljesül, továbbá $c(X) = \emptyset$-ből következik, hogy $X = \emptyset$.*

A későbbiekben ismertetendő modellben minden profilhoz hozzárendelünk egy c optimumfüggvényt, és a $c(X)$-et úgy interpretáljuk, mint az X-beli társadalmilag —vagy legalábbis a szavazási rendszer tervezője által— optimálisnak tekintett alternatívák halmazát az adott profilnál.

5.2. Definíció. *Legyen f_1 és f_2 két optimum függvény. Az f_1 és f_2 optimum függvények $f_1 \cup f_2$ egyesítését ill. $f_1 \cap f_2$ közös részét az $(f_1 \cup f_2)(X) = f_1(X) \cup f_2(X)$, ill. $(f_1 \cap f_2)(X) = f_1(X) \cap f_2(X)$ egyenlőségekkel definiáljuk.*

Világos, hogy két optimum függvény egyesítése is optimum függvény.

5.3. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy öröklődő, ha $X \subset Y \subset A$ esetén $c(Y) \cap X \subset c(X)$.*

Az öröklődést úgy illusztrálhatjuk, hogy azok a magyarok, akik világbajnokok, egyben magyar bajnokok is. A definícióból könnyen következik az alábbi

5.4. Állítás. *Két öröklődő optimum függvény egyesítése is öröklődő.*

5.5. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy kiterjedő, ha $X, Y \subset A$ esetén $c(X) \cap c(Y) \subset c(X \cup Y)$.*

A definíció tehát azt mondja, hogy egy kiterjedő optimum függvény esetében ha egy alternatíva két halmazban is optimális, akkor optimális azok egyesítésében is.

5.6. Megjegyzés. Ha a c optimum függvény kiterjedő, akkor indukcióval könnyen adódik, hogy $X_i \subset A$, $i = 1, \dots, k$ esetén $\bigcap_{i=1}^k c(X_i) \subset c(\bigcup_{i=1}^k X_i)$.

5.7. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy bináris alapú, ha található olyan R reláció az A-n, melyre $c(X) = \operatorname{argmax} R|_X$ minden $X \subset A$ halmazra teljesül, és ilyenkor R-re azt mondjuk, hogy a c egy alaprelációja. Ha az R választható aciklikusnak, kvázitranzitívnak ill. tranzitívnak, akkor aciklikus, kvázitranzitív ill. tranzitív alapú optimum függvényről beszélünk.*

A bináris alapú optimum függvények igen fontosak, hiszen az ilyen függvények helyettesíthetők egy (teljes) relációval, s így kapcsolatba hozhatók az összjóléti függvényekkel.

5.8. Állítás. *Egy bináris alapú optimumfüggvénynek minden alaprelációja aciklikus, s így minden bináris alapú optimumfüggvény aciklikus alapú.*

5.9. Tétel. *Egy c optimum függvény pontosan akkor bináris alapú, ha öröklődő és kiterjedő.*

5.10. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy vesztesfüggetlen, ha $c(Y) \subset X \subset Y \subset A$ esetén $c(X) = c(Y)$.*

Egy c vesztesfüggetlen optimum függvény esetében tehát, ha eltávolítunk néhány „vesztest" az $X \setminus c(X)$ halmazból, akkor a keletkezett szűkebb halmaz „győzteseinek" halmaza megegyezik $c(X)$-szel.

5.11. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy két vesztesfüggetlen optimum függvény egyesítése is vesztesfüggetlen.

5.12. Tétel (Schwartz [39]). *Egy c optimum függvény pontosan akkor kvázitranzitív alapú, ha öröklődő, kiterjedő és vesztesfüggetlen.*

5.13. Definíció. *Egy c optimum függvény teljesíti az Arrow féle racionalitási feltételt (**ARF**-et), ha $X \subset Y \subset A$ és $c(Y) \cap X \neq \emptyset$ esetén $c(Y) \cap X = c(X)$.*

Megjegyezzük, hogy egy **ARF**-et teljesítő optimum függvény nyilván mindig öröklődő.

5.14. Példa. Legyen $p \in I\!N$ és legyen $R \in \mathcal{L}(A)$ rögzített, úgy, hogy $a_1 R a_2 R \dots R a_n$. Ha $X \subset A$, $|X| > p$, akkor legyen $c_p(X)$ az R szerinti p legjobb eleme az X-nek, azaz legyen $c_p(X) = Y$, ahol $Y \subset X$, $|Y| = p$, $YR(X \setminus Y)$. Különben legyen $c_p(X) = X$. A c_p optimum függvény öröklődő, hiszen egy alternatíva pozíciója egy szűkebb halmazban nem romolhat. A vesztesfüggetlenség is világos, hiszen ha szűkítjük a szóban forgó halmazt úgy, hogy annak p legjobb elemét megtartjuk, akkor a p legjobb elem ugyanaz marad. Ha $2 \leq p < n$, akkor viszont a c_p nem kiterjedő s így az 5.9. tétel miatt nem is bináris alapú. Legyen ugyanis $X = \{a_1, a_3, \dots, a_{p+1}\}$, $Y = \{a_2, a_3, \dots, a_{p+1}\}$, akkor $c_p(X) \cap c_p(Y) = \{a_3, \dots, a_{p+1}\}$, míg $c_p(X \cup Y) = X \cup Y = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$.

5.15. Tétel. *Egy c optimum függvény pontosan akkor gyenge rendezés alapú, ha teljesíti* **ARF**-*et.*

5.16. Definíció. *Egy c optimum függvényre azt mondjuk, hogy teljesíti a kinyilvánított preferencia feltételt (***MPF**-*et), ha $X, Y \subset A$ esetén abból, hogy $x \in c(X)$, $y \in X \setminus c(X)$, következik, hogy ha $x \in Y$, akkor $y \notin c(Y)$.*

A fenti definíció egyszerű átfogalmazásaként adódik a következő

5.17. Állítás. *Egy c optimumfüggvény pontosan akkor teljesíti* **MPF**-*et, ha $x, y \in X \cap Y$, $x \in c(X)$, $y \in c(Y)$ esetén $x \in c(Y)$.*

A kinyilvánított preferencia feltétel szerint ha az alternatívák egy adott megengedett halmazában az x alternatíva optimális, de az y nem, akkor ha egy másik megengedett halmazban az x jelen van, akkor az y ott szintén nem lehet optimális. Ez bináris hátteret sejtet, valóban, a következő tétel szerint az **MPF** nem új feltétel:

5.18. Tétel. **ARF** *és* **MPF** *ekvivalensek.*

5.19. Definíció. *Egy optimumfüggvényt részlegesen bináris alapúnak nevezünk, ha található olyan L lineáris rendezés, melyre* $\operatorname{argmax} L|_X \in c(X)$ *minden $\emptyset \neq X \subset A$-ra teljesül.*

Egy bináris alapú optimumfüggvény részlegesen is bináris alapú, amint az könnyen látható.

5.20. Állítás. *Egy c optimumfüggvény pontosan akkor részlegesen bináris alapú, ha minden $\emptyset \neq X \subset A$ esetén található olyan $x \in c(X)$, melyre minden $Y \subset X$ esetén igaz, hogy*

$$x \in Y \;\Rightarrow\; x \in c(Y)\ . \tag{14}$$

Mivel öröklődő optimumfüggvény esetén a (14)-ben szereplő x tetszőlegesen választható a $c(X)$-ben, ezért igaz az

5.21. Állítás. *Egy öröklődő optimum függvény mindig részlegesen bináris alapú.*

6 A modell kiterjesztése

6.1. Definíció. *Ha $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$, akkor egy $c^* : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(A)$ függvényt, melyre minden $X \in \mathcal{S}$ esetén $c^*(X) \subset X$, továbbá $X \in \mathcal{S}$, $c^*(X) = \emptyset$ esetén $X = \emptyset$, általánosított optimum függvénynek nevezünk.*

A szokásos értelmezés szerint az $\mathcal{S}$ halmaz a megengedett alternatíva halmazok családja. Ebben a modellben tehát lehetőség nyílik arra, hogy olyan eseteket is kezeljünk, amikor egy jelölt —mondjuk stratégiai meggondolásból— visszalép a megmérettetéstől.

6.2. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$. Egy $F : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \to \mathcal{P}(A)$ függvényt összoptimum függvénynek nevezünk, ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re az $F(\mathbf{R}, \cdot)$ függvény egy általánosított optimum függvény. Ha $\mathcal{S} = \{A\}$, akkor egyszerű összoptimum függvényről, ha pedig $\mathcal{S} = \mathcal{P}(A)$ (tehát amikor $F(\mathbf{R}, \cdot)$ egy optimum függvény) akkor teljes összoptimum függvényről beszélünk.*

6.3. Definíció. *Egy F összoptimum függvény teljesíti a Pareto-feltételt, ha $x, y \in X \in \mathcal{S}$, $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén $x\mathbf{R}^{\succ}_V y$-ból következik, hogy $y \notin F(\mathbf{R}, X)$.*

6.4. Definíció. *Egy F összoptimum függvény teljesíti a függetlenségi feltételt, ha abból, hogy $X \in \mathcal{S}$, $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{R}|_X = \mathbf{S}|_X$, következik, hogy $F(\mathbf{R}, X) = F(\mathbf{S}, X)$.*

6.5. Definíció. *Egy F összoptimum függvény teljesíti az Arrow féle racionalitási feltételt (**ARF**-et), ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re az $F(\mathbf{R}, \cdot)$ optimum függvényre teljesül, hogy $X, Y \in \mathcal{S}$, $X \subset Y$, $F(\mathbf{R}, Y) \cap X \neq \emptyset$ esetén $F(\mathbf{R}, Y) \cap X = F(\mathbf{R}, X)$.*

6.6. Definíció. *Ha F egy összoptimum függvény, és található olyan $i \in V$, melyre minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{S}$ esetén $F(\mathbf{R}, X) \subset \operatorname{argmax} R_i|_X$, akkor az i-t diktátornak, az F-t diktatórikusnak nevezzük.*

6.7. Definíció. *Egy összoptimum függvényre azt mondjuk, hogy Arrow-típusú, ha*

i) teljesíti a függetlenségi feltételt;

*ii) teljesíti az Arrow féle racionalitási feltételt (**ARF**-et).*

6.8. Tétel (Arrow [3]). *Legyen $|A| \geq 3$, és $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$. Ha F egy teljes Arrow-típusú összoptimum függvény, amely teljesíti a Pareto-feltételt, akkor az F diktatórikus.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, akkor ha $xRy \Leftrightarrow x \in F(\mathbf{R}, \{x, y\})$, akkor az $\mathbf{R} \to R$ hozzárendelés az 5.15. tétel miatt egy Arrow-típusú összjóléti függvény mely teljesíti a Pareto-feltételt is, tehát Arrow tétele (3.26. következmény) miatt diktatórikus az ottani értelemben. Ebből viszont következik a tétel állítása. □

Az egyszerű összoptimum függvény fogalma lehetővé teszi, hogy az ú.n. Hansson-féle függetlenségi feltételt definiáljuk. Ily módon az Arrow-féle problémát megfogalmazhatjuk egyszerű összoptimum függvényes modellben is.

Sajnos, mint látni fogjuk (6.11. tétel), a megfelelő negatív tartalmú tétel itt is áll.

6.9. Definíció. *Egy F egyszerű összoptimum függvény teljesíti a Hansson-féle függetlenségi feltételt, ha minden olyan $x, y \in A$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$ esetén, melyre $\mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}}$, abból, hogy $x \in F(\mathbf{R})$ és $y \notin F(\mathbf{R})$, következik, hogy $y \notin F(\mathbf{S})$ (itt és a továbbiakban is $F(\mathbf{R}, A)$ helyett $F(\mathbf{R})$-t írunk).*

6.10. Definíció. *Legyen az F egy egyszerű összoptimum függvény. Azt mondjuk, hogy a $K \subset V$ koalíció erős, ha minden $x, y \in A$-ra és minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re teljesül, hogy $x\mathbf{R}_K^{\succ}y$ esetén $y \notin F(\mathbf{R})$.*

6.11. Tétel (Hansson [23]). *Legyen $|A| \geq 3$ és $\mathcal{D} = \mathcal{L}(A)^m$ vagy $\mathcal{D} = \mathcal{WL}(A)^m$. Ha az F egyszerű összoptimum függvényre teljesül a Pareto-feltétel és a Hansson-féle függetlenségi feltétel, akkor az F diktatórikus.*

Bizonyítás. Legyen az L egy rögzített lineáris rendezés az A-n, és ha $X \subset A$, akkor minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$ esetén legyen $\mathbf{R}^X = (R_1^X, R_2^X, \ldots, R_m^X)$ az alábbi profil:

$$\mathbf{R}^X : \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \ldots & m \\ \hline R_1|_X & R_2|_X & \ldots & R_m|_X \\ L|_{A\setminus X} & L|_{A\setminus X} & \ldots & L|_{A\setminus X} \end{array}$$

tehát a $\mathbf{L} = (L, L, \ldots, L)$ jelöléssel $\mathbf{R}^X|_X = \mathbf{R}|_X, \mathbf{R}^X|_{A\setminus X} = \mathbf{L}|_{A\setminus X}$, továbbá $X(\mathbf{R}^X)_V^{\succ}Y$. Vagyis arról van szó, hogy az $\mathbf{R}^X$ profilban az X-beli alternatívák között az $\mathbf{R}$-beli preferenciák teljesülnek, a szigorúan alattuk lévő $A \setminus X$-beliekre pedig az L-beli preferenciák.

Legyen $\mathbf{R} \in \mathcal{D}, x, y \in A$ esetén az $F^*(\mathbf{R})$ reláció az alábbiak szerint megadva az A-n:

$$xF^*(\mathbf{R})y \Leftrightarrow x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}}) \ .$$

Állítjuk, hogy F^* egy Arrow-típusú összjóléti függvény. Először is megjegyezzük, hogy a Pareto-feltétel miatt $F(\mathbf{R}^X) \subset X$ mindig teljesül, ha $\emptyset \neq X \subset A$, s így az $X = \{x, y\}$ esetben kapjuk, hogy $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$ vagy $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$, tehát $F^*(\mathbf{R})$ egy teljes reláció minden $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$-re, s így az F^* egy összjóléti függvény.

A bizonyítás további részében többször használni fogjuk a Hansson-féle függetlenségi feltétel alábbi átfogalmazását:

$$\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D},\ \mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}},\ x \in F(\mathbf{R}),\ y \in F(\mathbf{S}) \ \Rightarrow\ x \in F(\mathbf{S}) \ . \tag{15}$$

A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, $xF^*(\mathbf{R})y$ és $yF^*(\mathbf{R})z$. Mivel $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$ teljesül, ezért ha $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$, akkor $\mathbf{R}^{\{x,y\}}|_{\{x,y\}} = \mathbf{R}^{\{x,y,z\}}|_{\{x,y\}}$ miatt (15) alapján $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$. Mivel $y \in F(\mathbf{R}^{\{y,z\}})$, így ha $z \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$, akkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$, és így a fentiek miatt megint csak $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$. Tehát $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,y,z\}})$-nek mindenképpen teljesülnie kell, ezért, ha $z \in F(\mathbf{R}^{\{x,z\}})$, akkor megint csak a fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,z\}})$. Így tehát $x \in F(\mathbf{R}^{\{x,z\}})$, s így $xF^*(R)z$.

Az F^*-ra teljesül a párok függetlensége feltétel is, hiszen ha $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{R}|_{\{x,y\}} = \mathbf{S}|_{\{x,y\}}$, akkor $\mathbf{R}^{\{x,y\}} = \mathbf{S}^{\{x,y\}}$.

Beláttuk tehát F^* egy Arrow-típusú összjóléti függvény. Az F^*-ra teljesül a Pareto-feltétel, hiszen ha $\mathbf{R} \in \mathcal{D}$, $x\mathbf{R}_V^{\succ}y$, akkor $F(\mathbf{R}^{\{x,y\}}) = x$ az F-re vonatkozó Pareto-feltétel miatt, s így $xF^*(\mathbf{R})^{\succ}y$.

A 3.26. következmény feltételei tehát teljesülnek F^*-ra, s így F^* diktatórikus, legyen a diktátor i. Állítjuk, hogy ekkor az i diktátora F-nek is. Tegyük fel, hogy $x \in F(\mathbf{R})$, és állításunkkal ellentétben, tegyük fel, hogy $yR_i^{\succ}x$ valamely $y \in A$-ra. Ekkor $yF^*(\mathbf{R})^{\succ}x$, így tehát $y \in F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$, $x \notin F(\mathbf{R}^{\{x,y\}})$, de ekkor a Hansson-féle függetlenségi feltétel miatt kapjuk, hogy $x \notin F(\mathbf{R})$, ellentmondás. □

Az alábbi könnyen igazolható állítás mutatja, hogy bizonyos értelemben az egyszerű összoptimum függvényekre vonatkozó Hansson-féle függetlenségi feltétel gyengébb, mint a Arrow-típusú összjóléti függvényekre vonatkozó párok függetlensége feltétel:

6.12. Állítás. *Legyen az $F : \mathcal{D} \to \mathcal{WL}(A)$ egy Arrow-típusú összjóléti függvény. Ekkor a $G(\mathbf{R}) = \operatorname{argmax} F(\mathbf{R})$ egyszerű összoptimum függvényre teljesül a Hansson-féle függetlenségi feltétel.*

A következő, összoptimum függvényekről szóló tétel kiutat jelenthet a lehetetlenségi tételek köréből abban a speciális esetben, amikor a megengedett halmazok közös része nemüres, azaz létezik egy olyan alternatíva (nevezhetjük status quo-nak), amely minden helyzetben —mondjuk döntésképtelenség esetében— adoptálható.

6.13. Tétel (Gibbard-Hylland-Weymark [22]). *Legyen $|A| \geq 3$, $|V| \geq 2$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(A)$. Tegyük fel, hogy $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$, és tegyük fel, hogy $\#\mathcal{S} > 1$. Tetszőleges $\mathcal{D} \subset \mathcal{WL}(A)^m$ esetén található olyan Arrow-típusú összoptimum függvény, mely teljesíti a Pareto-feltételt és mégsem diktatórikus.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \bigcap \mathcal{S}$. Ha $(\mathbf{R}, X) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ akkor legyen $F_0(\mathbf{R}, X) = \{x \in X \mid x\mathbf{R}_V a\}$, és legyen $F(\mathbf{R}, X) = \operatorname{argmax} R_1|_{F_0(\mathbf{R},X)}$. Mivel ha $X \in \mathcal{S}$, akkor $a \in F_0(\mathbf{R}, X) \subset X$, ezért az F nyilván egy összoptimum függvény. Belátjuk, hogy F-re teljesül a Pareto-feltétel. Tegyük fel, hogy $(\mathbf{R}, X) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}, x, y \in X, x\mathbf{R}_V^{\succ}y$. Két eset lehetséges:

1. eset: $y \notin F_0(\mathbf{R}, X)$. Ekkor nyilván $y \notin F(\mathbf{R}, X)$. 2. eset: $y \in F_0(\mathbf{R}, X)$. Ekkor $x\mathbf{R}_V^{\succ}y$ miatt $x \in F_0(\mathbf{R}, X)$, és így $xR_1^{\succ}y$ miatt $y \notin F(\mathbf{R}, X)$ megint csak teljesül.

Az F-re teljesül a függetlenségi feltétel, hiszen ha $(\mathbf{R}, X)$, $(\mathbf{S}, X) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ és $\mathbf{R}|_X = \mathbf{S}|_X$, akkor $a \in X$ miatt $F_0(\mathbf{R}, X) = F_0(\mathbf{S}, X)$, s így valóban $F(\mathbf{R}, X) = F(\mathbf{S}, X)$.

Belátjuk, hogy F-re teljesül az Arrow-féle racionalitási feltétel. Tegyük fel, hogy $X, Y \in \mathcal{S}$, $X \subset Y$. Tegyük fel, hogy $x \in F(\mathbf{R}, Y) \cap X$ tetszőleges. Ekkor $x \in X$, továbbá $x\mathbf{R}_V a$ és minden $y \in F_0(Y)$-ra teljesül, hogy xR_1y. Ezért $x \in X$ és $X \subset Y$ miatt világos, hogy $x \in F(\mathbf{R}, X)$.

Tegyük fel most, hogy $x \in F(\mathbf{R}, X)$ tetszőleges és hogy $F(\mathbf{R}, Y) \cap X \neq \emptyset$, mondjuk, $x_0 \in F(\mathbf{R}, Y) \cap X$. Az előző paragrafus miatt $x_0 \in F(\mathbf{R}, X)$, ezért xR_1x_0. Ha $y \in F_0(\mathbf{R}, Y)$ tetszőleges, akkor x_0R_1y, ezért xR_1y, s így $x \in F(\mathbf{R}, Y) \cap X$.

Az F nem diktatórikus, hiszen bárki bármely olyan alternatívát megvétózhat a-n kívül, amely megengedett halmazba tartozik (és ilyen létezik, mert a tétel $\bigcap \mathcal{S} \neq \emptyset$ és $\#\mathcal{S} > 1$ feltételeiből következik, hogy található legalább kételemű megengedett halmaz). □

7 Útfüggetlen optimum függvények

A gyakorlatban, amikor a legjobb (vagy legalábbis a számunkra elfogadható) alternatívákat keressük, gyakran járunk el úgy, hogy először az alternatívák néhány áttekinthető részhalmazában keressük meg a legjobb elemeket, így megszabadulván az esélytelenektől. Ezt az eljárást folytatjuk a megmaradt halmazzal, s.í.t., amíg el nem jutunk a legjobb alternatíváknak egy végsőnek tekintett halmazához. Erre a módszerre szükség lehet például, amikor a kommunikációs vagy a logisztikai költségek magasak. Megeshet azonban, hogy az eljárás végeredménye függ a részhalmazok megválasztásától. Például a többségi relációt alapul véve, a napirendi szavazás nagymértékben függ a napirendtől (lásd a 2.9. példát), tehát az ütköztetendő alternatívapárok megválasztásától. Minimális konzisztencia-követelmény ezért, hogy az eljárás végeredménye ne függjön az általunk választott részhalmazoktól, az ,,úttól”, melyen hozzá jutunk. A következő definíció ezt fogalmazza meg a legegyszerűbb esetben, de látni fogjuk, hogy ez már magában hordozza a fenti általános kívánalmat is.

7.1. Definíció. *Az $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ típusú függvényeket halmazfüggvényeknek hívjuk. Egy halmazfüggvényre azt mondjuk, hogy útfüggetlen, ha $f(X \cup Y) = f(f(X) \cup Y)$ teljesül minden $X, Y \subset A$-ra.*

Mint látható, a definíció általában halmaz függvényekre lett kimondva. Ennek oka, hogy a későbbiekben az útfüggetlen optimumfüggvények vizsgálatánál szükségünk lesz erre az általános fogalomra. A következő állítást az $Y = \emptyset$ választással kapjuk a 7.1. definícióban:

7.2. Állítás. *Egy f útfüggetlen halmazfüggvény mindig idempotens, azaz $f(f(X)) = f(X)$ minden $X \subset A$-ra.*

A 7.1. definíció egyenes következménye továbbá, hogy ha adott az $X \subset A$ halmaz egy tetszőleges felbontása, melyben a halmazok nem feltétlenül diszjunktak, de még csak nem is feltétlenül különbözők, akkor ha ezekből a halmazokból felépítünk egy többszörösen összetett kifejezést az egyesítés művelet és a c útfüggetlen halmazfüggvény segítségével, majd az eredményt c-be helyettesítjük, akkor az eredmény mindig $c(X)$ lesz. Példának tekintsük az $A \circ B = c(A \cup B)$ műveletet, amely a fentiek alapján tehát asszociatív.

Arrow maga is foglalkozott az útfüggetlenség problémájával [3], elismerve, hogy az **ARF**-re (lásd az 5.13. definíciót) inkább csak azért volt szüksége, hogy az útfüggetlenséget biztosítsa. A 6.8. tétel viszont nem igaz, ha az **ARF** feltételt az útfüggetlenséggel helyettesítjük. Így tehát az útfüggetlen optimum függvények tanulmányozása az Arrow problémakör nézőpontjából is indokolt.

A következő tétel egyszerű jellemzését adja az útfüggetlen optimum függvényeknek:

7.3. Tétel. *Egy optimum függvény pontosan akkor útfüggetlen, ha öröklődő és vesztesfüggetlen.*

Bár az útfüggetlenség definíciója egy bizonyos fokú racionalitást fogalmaz meg, nem minden útfüggetlen optimum függvény bináris alapú, amint az alábbi példa mutatja:

7.4. Példa. A 7.3. tétel és az 5.14. példában elmondottak alapján állíthatjuk, hogy a c_k optimumfüggvény egy nem bináris alapú útfüggetlen optimum függvény.

7.5. Példa. Legyen a P egy kvázitranzitív reláció az A-n és $X \subset A$ esetén legyen $f(X) = \operatorname{argmax} P|_X$. Ekkor az 5.12. és a 7.3. tételek alapján az f egy útfüggetlen optimum függvény.

7.6. Példa. Legyen a R egy tranzitív reláció az A-n és $X \subset A$ esetén legyen $f(X) = \{x \in A \mid \exists y \in X : yRx\}$. Ekkor f egy útfüggetlen halmazfüggvény.

A 7.3. tétel alapján az 5.4. és az 5.11. megjegyzések alapján kapjuk az alábbi állítást:

7.7. Tétel. *Két útfüggetlen optimum függvény egyesítése is útfüggetlen.*

A 7.3. és az 5.9. valamint az 5.12. tételek alapján állíthatjuk, hogy ha egy útfüggetlen optimumfüggvény bináris alapú, akkor kvázitranzitív alapú. Az 5.14. példa alapján azonban világos, hogy nem minden útfüggetlen optimum függvény bináris alapú. A későbbiekben látni fogjuk, hogy egy-egy értelmű kapcsolat van az n-elemű A halmazon tekintett útfüggetlen optimumfüggvények és antimatroidok között, melyek száma aszimptotikusan 2^{2^n} ([28]), míg a bináris alapú optimumfüggvények száma nyilván legfeljebb $3^{\binom{n}{2}}$. A $3^{\binom{n}{2}}/2^{2^n}$ arány azonban gyorsan tart a 0-hoz, amint az n tart a végtelenhez.

A következő nevezetes tétel egyszerű jellemzését adja az útfüggetlen optimum függvényeknek:

7.8. Tétel (Aïzerman és Malisevszkij [2]). *Egy c optimum függvény pontosan akkor útfüggetlen, ha találhatók olyan $L_1, \ldots, L_k$ lineáris rendezések az A-n, melyekre igaz, hogy minden $X \subset A$ esetén*

$$c(X) = \{\operatorname{argmax} L_1|_X, \ldots, \operatorname{argmax} L_k|_X\} . \tag{16}$$

7.9. Definíció. *Ha $X \subset Y \subset A$ akkor legyen $[X, Y] = \{Z \subset A \mid X \subset Z \subset Y\}$. Az $[X, Y]$ halmazt intervallumnak nevezzük.*

7.10. Definíció. *A $\mathcal{P}(A)$-nak egy partíciójára azt mondjuk, hogy intervallum eltolásra zárt, ha igaz, hogy ha $[X, Y]$ egy részhalmaza valamely C osztálynak, akkor $Z \subset A \setminus Y$ esetén $[X \cup Z, Y \cup Z]$ is részhalmaza valamely osztálynak (amely esetleg nem csak a C-től függ, hanem magától az $[X, Y]$-tól is).*

7.11. Definíció. *Ha c egy halmazfüggvény, akkor $X \subset A$ esetén legyen* $\mathrm{arc}(X) = \{Y \subset A \mid c(Y) = c(X)\}$, *és legyen* $k_c(X) = \bigcup \mathrm{arc}(X)$.

7.12. Tétel. *Ha a c egy útfüggetlen optimum függvény, akkor a* $\mathrm{P} = \{\mathrm{arc}(X) \mid X \subset A\}$ *halmazcsalád egy intervallumokból álló, eltolásra zárt partíciója $\mathcal{P}(A)$-nak és az üres halmaz egymaga alkot osztályt. Fordítva, tegyük fel, hogy $\emptyset \notin \mathrm{P}$ és a P egy intervallumokból álló, eltolásra zárt partíciója $\mathcal{P}(A)$-nak, és az üres halmaz egymaga alkot osztályt. Ekkor található egy olyan egyértelműen meghatározott c útfüggetlen optimum függvény, melyre* $\{\mathrm{arc}(X) \mid X \subset A\} = \mathrm{P}$.

7.13. Példa. Tegyük fel, hogy $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és hogy egy döntéshozó testület egy adott helyzetben (mondjuk egy adott profilnál) olyan c útfüggetlen optimum függvényt szeretne, melyre

$$c\{1,3,4\} = \{1,3\} \quad \text{és} \quad c\{2,3,4\} = \{2,4\}\,. \tag{17}$$

Ha létezik ilyen c, akkor a 7.12. tétel miatt a hozzá tartozó P partíció osztályainak részei lesznek a $[24, 234]$ és a $[13, 134]$ intervallumok (a könnyebb olvashatóság kedvéért a kapcsos zárójeleket és a vesszőket elhagytuk). Mivel a P eltolásra zárt, ezért a $[124, 1234]$ és a $[123, 1234]$ nem diszjunkt intervallumok is részei a P bizonyos osztályának. De ekkor $[124 \cap 123, 1234] = [12, 1234]$ is része a P ezen osztályának. Ha most a

$$\{[24, 234], [13, 134], [12, 1234]\} \tag{18}$$

halmazt kiegészítjük az elfajuló intervallumokból álló

$$\{\emptyset, [1,1], [2,2], [3,3], [4,4], [14,14], [23,23], [34,34]\} \tag{19}$$

halmazzal, akkor könnyen láthatóan egy eltolásra zárt P partícióját kapjuk a $\mathcal{P}\{1,2,3,4\}$-nek. Így tehát a 7.12. tétel miatt a P-hez tartozó c optimum függvény útfüggetlen, és természetesen a kezdeti $c\{1,3,4\} = \{1,3\}$ és $c\{2,3,4\} = \{2,4\}$ feltételek is teljesülnek.

A továbbiakban egy c útfüggetlen optimum függvény és a hozzárendelt k_c halmazfüggvény közötti kapcsolatot vizsgáljuk. Ez a kapcsolat elvezet a konvex geometriákhoz és az antimatroidokhoz, melyek elmélete kiterjedt és széles alkalmazási területtel bírnak. A közölt eredményeket nem bizonyítjuk, egyrészt helyszűke miatt, másrészt a (jól követhető) bizonyításaik megtalálhatók a hivatkozott irodalomban.

7.14. Tétel. *Ha c egy útfüggetlen optimum függvény, akkor k_c-re igazak az alábbi állítások:*

i) $k_c(\emptyset) = \emptyset$;

ii) $X \subset A$ *esetén* $X \subset k_c(X)$ *(bővülő);*

iii) $X \subset A$ *esetén* $k_c(k_c(X)) = k_c(X)$ *(idempotens);*

iv) $X \subset Y \subset A$ *esetén* $k_c(X) \subset k_c(Y)$ *(monoton);*

v) *minden* $X \subset A$ *esetén található olyan* $M \subset A$, *melyre* $k(M) = k(X)$, *és ha* $k(Y) = k(X)$, *akkor* $M \subset Y$ *(található legszűkebb feszítő halmaz).*

7.15. Definíció. *A 7.14. tétel i)–v) feltételeit kielégítő halmazfüggvényeket konvex lezárásnak nevezzük.*

A következő néhány példára vonatkozó állítás a definíció alapján könnyen bizonyítható:

7.16. Példa. Legyen a R egy parciális rendezés az A-n és $X \subset A$ esetén legyen $f(X) = \{x \in A \mid \exists y \in X : yRx\}$. Ekkor f egy konvex lezárás.

7.17. Tétel. *Ha* k_1 *és* k_2 *konvex lezárások, akkor* $k_1 \cap k_2$ *is konvex lezárás.*

7.18. Példa. Legyen A egy véges ponthalmaz $\mathbb{R}^d$-ben, és $X \subset A$ esetén legyen $k(X) = \mathrm{conv}(X) \cap A$, ahol $\mathrm{conv}(X)$ az X konvex burka, tehát az a legszűkebb konvex halmaz, amely tartalmazza az X-et. Ekkor a k egy konvex lezárás.

7.19. Példa. Legyen adott a G fa az A csúcshalmazzal. Ha $X \subset A$ esetén $k(X)$ az a legszűkebb csúcshalmaz, melyre a $G[k(X)]$ indukált részgráf összefüggő, akkor k egy konvex lezárás.

7.20. Definíció. *Ha* k *egy halmazfüggvény, akkor legyen minden* $X \subset A$*-ra* $c_k(X) = \bigcap \mathrm{arc}(X)$.

7.21. Tétel. *Ha* k *egy konvex lezárás, akkor* c_k *egy útfüggetlen optimum függvény.*

7.22. Tétel. *A* $c \to k_c$ *ill.* $k \to c_k$ *leképezések kölcsönösen egyértelmű leképezések az útfüggetlen optimum függvények és a konvex lezárások ill. a konvex lezárások és az útfüggetlen optimum függvények között, továbbá egymás inverzei. A két leképezés között fennáll továbbá az alábbi duális kapcsolat:*

$$i)\ c_{k_1 \cap k_2} = c_{k_1} \cup c_{k_2}\,; \qquad ii)\ k_{c_1 \cup c_2} = k_{c_1} \cap k_{c_2}\,.$$

7.23. Definíció. *Ha* k *egy halmazfüggvény, akkor jelölje* $\mathcal{F}_k$ *a* k *zárt halmazainak családját, tehát az* $\{X \subset A \mid k(X) = X\}$ *halmazt.*

7.24. Definíció. *Ha* $\mathcal{F}$ *egy* A*-beli halmazrendszer, akkor* $X \subset A$ *esetén legyen* $k_{\mathcal{F}}(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{F} \mid X \subset Y\}$.

7.25. Definíció. *Egy* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ *halmazrendszert konvex geometriának nevezünk, ha*

i) $\emptyset, A \in \mathcal{F}$;

ii) $X, Y \in \mathcal{F}$ *esetén* $X \cap Y \in \mathcal{F}$;

iii) $X \in \mathcal{F}$, $X \neq A$ *esetén található olyan* $x \in A \setminus X$, *melyre* $X \cup x \in \mathcal{F}$. *Az* $\mathcal{F}$ *elemeit konvex halmazoknak nevezzük.*

7.26. Tétel. *A $k \to \mathcal{F}_k$ ill. a $\mathcal{F} \to k_{\mathcal{F}}$ leképezések kölcsönösen egyértelmű leképezéseket határoznak meg a konvex lezárások és a konvex geometriák ill. a konvex geometriák és a konvex lezárások között, továbbá egymás inverzei.*

7.27. Definíció. *Egy A-beli $\mathcal{A}$ halmazrendszert antimatroidnak nevezünk, ha*

i) $\emptyset, A \in \mathcal{A}$;

ii) $X, Y \in \mathcal{A}$ *esetén* $X \cup Y \in \mathcal{A}$;

iii) $X, Y \in \mathcal{A}$, $Y \backslash X \neq \emptyset$ *esetén található olyan* $x \in Y \backslash X$, *melyre* $X \cup x \in \mathcal{A}$.

7.28. Tétel. *Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer az A-n pontosan akkor konvex geometria, ha az $\{F^c \mid F \in \mathcal{F}\}$ halmazrendszer antimatroid.*

7.29. Tétel. *Legyenek P és Q véges ponthalmazok az $\mathbb{R}^d$-ben, úgy, hogy* $\mathrm{conv}(P) \cap \mathrm{conv}(Q) = \emptyset$. *Ekkor*

$$\{X \subset P \mid \mathrm{conv}(X \cup Q) \cap P = X\} \tag{20}$$

egy konvex geometria a P-n.

A (20) típusú konvex geometriákat konvex burkolásnak nevezzük. Az alábbi reprezentációs tétel igaz:

7.30. Tétel (Kashiwabara [25]). *Minden konvex geometria izomorf valamely konvex burkolással.*

7.31. Definíció. *Ha az $\mathcal{F}$ egy konvex geometria, akkor egy $X \in \mathcal{F}$-re azt mondjuk, hogy metszet-irreducibilis, ha $Y, Z \in \mathcal{F}$, $Y \cap Z = X$-ből következik, hogy $Y = X$ vagy $Z = X$.*

7.32. Tétel (Edelman és Saks [19]). *A 7.8. tételben a reprezentációhoz elegendő lineáris rendezések minimális száma egyenlő az $\mathcal{F}_{k_c}$ halmazban a páronként összehasonlíthatatlan metszet-irreducibilis halmazok maximális számával.*

7.33. Példa. Tekintsük a 7.13. példában szereplő útfüggetlen optimum függvényt. A (18) és (19) halmazrendszerek egyesítéséből adódó halmazrendszerből kiolvasható az $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{k_c}$ konvex geometria:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 4, 14, 23, 34, 234, 134, 1234\} .$$

A metszet-irreducibilis halmazok $\mathcal{M}$ családja $\mathcal{F}$-ben:

$$\mathcal{M} = \{\emptyset, 1, 2, 14, 23, 234, 134, 1234\} ,$$

innen pedig látható, hogy $\mathcal{M}$-ből legfeljebb kettő összehasonlíthatatlan halmaz választható ki. A 7.32. tételből következik, hogy a c lineáris reprezentációjához elegendő lineáris rendezések számának minimuma kettő. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2341 és az 1432 rendezések megfelelőek.

Irodalom

1. Aïzerman, M. és Aleskerov, F.: *Theory of Choice*, North-Holland, (1995)
2. Aïzerman, M. és Malishevski, A. V.: General theory of best variants choice: some aspects, *IEEE Transactions on Automatic Control*, V.AC-26 5 (1981) 1030–1041.
3. Arrow, K. J.: Social Choice and Individual Values, 2nd edition, Wiley, New York, (1963)
4. Banks, J. S.: Acyclic social choice from finite sets, *Social Choice and Welfare,* 12 (1995) 293–310.
5. Bell, C. E.: A random voting graph almost surely has a Hamiltonian cycle when the number of alternatives is large, *Econometrica*, 49 (1981) 1597–1603.
6. Bilbao, J. M. és Edelman, P. H.: The Shapley value on convex geometries, *Discrete Applied Mathematics*, 103 (2000) 33–40.
7. Black, D.: *The Theory of Committees and Elections*, Kluwer Academic Publishers, 1958.
8. Blair D. H. és Pollak, R. A.: Acyclic collective choice rules, *Econometrica*, 50 (1982) 931–943.
9. Blair D. H. és Pollak, R. A.: Polychromatic acyclic tours in colored multigraphs, *Mathematics of Operations Research*, 8 (3) (1983) 471–476.
10. Borda, J. C.: Mémoire sur les Élections au Scrutin, *Histoire de l' Académie Royale des Sciences*, (1781)
11. Condorcet, Caritat, Marquis de, M.J.A.M.: Essai sur l' Application de l' Analyse a la Probabilité des *Decisions rendues a la pluralitedes voix L' Imprimerie Royale,* Paris, (1785)
12. Danilov, V. és Koshevoy, G.: Mathematics of Plott choice functions, *Mathematical Social Sciences,* 40 (2005) 245–272.
13. Deb, R.: Binariness and rational choice, *Mathematical Social Sciences,* 5 (1983) 97–106.
14. Demange, G.: Single-peaked orders on a tree, *Mathematical Social Sciences*, 3 (4) (1982) 389–397.
15. Dodgson, Rev. C. L.: A Discussion of the Various Methods of Procedure in Conducting Elections (az előszó 1873. december 18-ára datálva) 15+1 oldal.
16. Dodgson, Rev. C.L.: Suggestions as to the Best Method of Taking Votes, Where More than Two Issues are to be voted on, (az előszó 1874. júius 13-ára datálva) 15+1 oldal.
17. Dodgson, Rev. C. L.: A Method of Taking Votes on More than Two Issues, 1876. február 23., 20 oldal.
18. Edelman, P. H. és Jamison, R. E.: The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata,* 19 (1985) 247–270.
19. Edelman, P. H. és Saks M. E.: Combinatorial representation and convex dimension of convex geometries, *Order,* 5 (1988) 23–32.
20. Erdős, P. és Moon, J. W.: On sets of consistent arcs in a tournament, *Canadian Mathematical Bulletin,* 8 (1965) 269–271.
21. Gibbard, A. F.: Social choice and the Arrow condition, Mimeograph (Harvard Egyetem) 1969

22. Gibbard, A. F. és Hylland, A. és Weymark, J. A.: Arrow's theorem with a fixed feasible alternative, *Social Choice and Welfare,* 4 (1987) 105–115.
23. Hansson, B.: Voting and group decision functions, *Synthese,* 20 (1969) 526-537.
24. Johnson, M. R. és Dean, R. A.: Locally complete path independent choice functions and their lattices, *Mathematical Social Sciences,* 42 (2001) 53–87.
25. Kashiwabara, K., Nakamura, M. és Okamoto, Y.: The affine representation theorem for abstract convex geometries, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 30 (2005) 129–144.
26. Koshevoy, G. A.: Choice functions and abstract convex geometries, *Mathematical Social Sciences*, 38 (1999) 35–44.
27. Laplace, P-S.: Leçons de Mathématiques, données à l'École Normale en 1795, *Journal de l' École Politechnique, tome II, septième et huitième cahiers* (1812)
28. Lovász László személyes közlése.
29. Mala, J.: On λ-majority voting paradoxes, *Mathematical Social Sciences*, 37 (1999) 39–44.
30. www.wallis.rochester.edu/miniconf03/maskin.pdf
31. www.sss.ias.edu/publications/papers/papereleven.pdf
32. McGarvey, D. C.: A theorem on the construction of voting paradoxes, *Econometrica*, 21 (1953) 608–610.
33. Monjardet, B. és Raderanirina, V.: The duality between the semi-lattice of anti-exchange closure operators and path-independent choice operators, *Mathematical Social Sciences*, 41 (2001) 131–150.
34. Moulin, H.: Choice functions over a finite et: a summary, *Social Choice and Welfare,* 2 (1985) 147–160.
35. Nakamura, K.: The vetoers in a simple game with ordinal preferences, *International Journal of Game Theory*, 8 (1979) 55–61.
36. Plott, C. R.: Path independence, rationality and social choice, *Econometrica,* 41 (1973) 1075–1091.
37. Saari, D. G.: Mathematical structure of voting paradoxes: I. Pairwise votes, *Economic Theory,* 15, Issue 1 (2000)
38. Saari, D. G.: Mathematical structure of voting paradoxes: II. Positional voting, *Economic Theory,* 15, Issue 1, (2000)
39. Schwartz, T.: Choice functions, 'rationality' conditions and variations of the weak axiom of revealed preference, *Journal of Economic Theory*, 13 (1976) 414–427.
40. Wilson, R. B.: Social choice without the Pareto principle, *Journal of Economic Theory*, 5 (1972) 14–20.

ARROW-TYPE IMPOSSIBILITY THEOREMS

This review article considers the famous Arrow impossibility theorem of social choice theory with its generalizations. The theorem is about the impossibility of a voting system that satisfies a couple of innocent-looking conditions. We show that the impossibility remains in two models in a very general setting. We give the

proofs of the theorems showing the basic methods of the theory at the same time. We also survey the theory of path independent choice functions, a new approach to resolve Arrow's theorem.