POZÍCIÓS JÁTÉKOK[1]

PLUHÁR ANDRÁS
Szegedi Tudományegyetem

A pozíciós játékok többnyire véges, kétszemélyes, zérusösszegű, teljes információs játékok, amelyekben még kevert stratégiák alkalmazására sincs szükség. A pozíciós játékok megadási módjuk miatt viszont mátrixjátékként nem kezelhetők jól, így a vizsgálatukra változatos matematikai eszköztár alakult ki. Jelen áttekintés célja ezek vázlatos ismertetése, néhol kiterjesztése.

1 Bevezetés

A *pozíciós játék* pontos definíciója nem adható meg, mindenféle játékot beleérthetünk, ahol a nyerés feltétele valamely alakzat eléréséhez/elkerüléséhez kapcsolódik. Első közelítésben *pozíciós játék*, vagy *hipergráf játék* alatt a következőt értjük. Adott egy $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, \mathcal{H})$ hipergráf, azaz $\mathcal{H} \subset 2^V$. A V halmaz elemei alkotják a *táblát*, míg az $\mathcal{H}$ elemei az ún. *nyerő* halmazok. Két játékos, a kezdő és a második, vagy I és II, felváltva választja a tábla elemeit. Amelyikük elsőként megszerezi egy nyerő halmaz összes elemét az megnyeri a játékot.

Az X játékos nyer (döntetlent ér el) kifejezés alatt azt értjük, hogy mindkét játékos tökéletes játéka esetén ez lenne az eredmény. Ha a tábla véges, akkor használhatjuk az alábbi tételt:

1. Tétel (Zermelo-Neumann, [12, 20]). *Egy teljes információs, véges, kétszemélyes játékot vagy az egyik játékos nyeri vagy a játék döntetlen.*

Megjegyzés. Az 1. tételre Zermelo adott bizonyítást[2], így többnyire Zermelo tételként, vagy ún. játékelméleti *tertium non datur*[3] elvként hivatkozzák.

1. Példa. Tic-Tac-Toe. I és II felváltva tesz egy jelet a 9 négyzetből álló, 3×3-as tábla egy-egy mezőjére. Aki hamarabb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót, az nyer.

2. Példa. Tic-Toc-Tac-Toe. Ez a Tic-Tac-Toe 3-dimenziós változata, aminek a táblája $4 \times 4 \times 4$-es kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, lap és test főátlók, összesen 76 darab.

---

[1] Beérkezett: 2007. május 30. *1991 Mathematics Subject Classification.* 91A24, 90D42, 05C65. A kutatást támogatta az OTKA T034475 és T049398 pályázata. E-mail: `pluhar@inf.u-szeged.hu`.

[2] Az első bizonyítás hiányos volt, ezt később Kőnig Dénes és Kalmár László javította ki, lásd [20].

[3] Azaz a *harmadik eset nem létezik.* Végtelen játékokra más a helyzet, u. i. a *kiválasztási axióma* használatával készíthető olyan játék, amelynek kimenetele *eldönthetetlen.*

3. Példa Amőba (5-in-a-row). Itt a tábla a végtelen négyzetrács (a gyakorlatban lehet a 19×19-es go tábla vagy füzetlap). A játékosok felváltva jelölik a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer.

4. Példa k-amőba (k-in-a-row). A fentihez hasonló, csak ebben k egymást követő jel kell a nyeréshez.

A gyakorlatból tudjuk, a kezdőjátékos (itt I) előnyös helyzetben van a fentiekben. Ez matematikai eszközökkel is belátható, sőt sokkal általánosabban igaz:

2. Tétel (Hales-Jewett, [31]). *Bármely $(V, \mathcal{H})$ hipergráf játékban a kezdő nyer, vagy döntetlen az eredmény.*[4]

Bizonyítás. Ez az ún. *stratégia lopás* módszerrel[5] kapható meg. Általános pozíciós játékokra Alfred Hales és Robert Jewett mondta ki a [31]-ben. Ha II nyerne, azaz lenne *nyerő stratégiája*[6], akkor I is használhatná ezt, hiszen a saját, korábbi lépései sohasem ártanak. Vagyis I megfeledkezhet az első lépéséről, és ha a stratégia ezt kérné, akkor úgy tehet, mintha éppen most lépné meg ezt, és az esedékes lépését tetszőlegesen helyezheti el. □

Az 1. és 2. tételek sokszor megmondják, *mi* lesz az eredmény, de arról keveset árulnak el, *hogyan* játszunk. Ez már a példáinkban sem egyszerű, általában még kevésbé várható. A tic-tac-toe könnyen láthatóan döntetlen, míg a tic-toc-tac-toe-t I nyeri. Az utóbbi igazolásához viszont 1500 óra gépidőt használt fel Oren Patashnik a hetvenes évek végén, és megjegyezhető nyerő stratégiát eddig nem találtak rá, lásd [16, 42]. Az amőbát (legalábbis a go táblán) a kezdő nyeri, a k-amőba pedig döntetlen, ha $k \geq 8$. A $k = 6, 7$ esetén viszont nem tudjuk, mi az igazság, lásd [2, 16, 28].

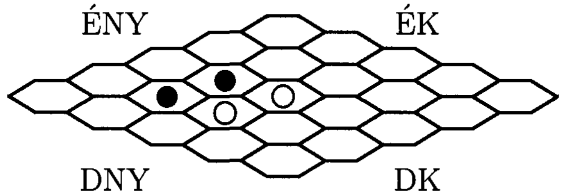
Általában sincs ez másképpen, sok kérdésre van jó válaszunk, még többre viszont nincs. A pozíciós játékoknak számtalan meglepő kapcsolata van a matematika egymástól távoleső területeivel; ezért is olyan nehezek és egyben vonzók a problémái. Ezekre láthatunk újabb példákat a továbbiakban.

2 Topológia

Kezdjük a hex játékkal; ezt Piet Hein 1942-ben, lásd [34] és John Nash 1948-ban találta ki egymásról nem tudva. Egy hatszögekből álló, rombusz alakú $n \times n$-es táblára felváltva helyezhet I fehér és II fekete korongokat. I célja egy összefüggő fehér út létrehozása az északnyugati és délkeleti, II-é pedig egy fekete úté az északkeleti és délnyugati oldalak között. A hex —ellentétben jónéhány csak matematikai szempontból érdekes játékkal— izgalmas, addiktív játék. Feladványokat közölnek, versenyeket rendeznek belőle; ilyenkor az $n = 10$ vagy $n = 11$ a tábla méret. (A legjobb eredményt Kohei Noshita érte el, $n \leq 8$-ra ismert a nyerő stratégia, lásd [41].)

---

[4]Ha egyik fél sem nyer véges lépésben, akkor döntetlennek tekintjük a játékot.
[5]A módszert először John Nash alkalmazta a hex játék vizsgálatára, lásd [16, 26].
[6]A stratégia egy f függvény, amely a tábla egy állapotához a teendő lépést rendeli.



1. ábra. Az 5×5-ös hex tábla

Az első definíciónk értelmében a hex *nem* hipergráf játék, hiszen a nyerő halmazok *nem egyformák* a két játékosra. Érdemes tehát a $(V, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *aszimmetrikus* hipergráf játékot bevezetni, ahol értelemszerűen az I illetve II akkor nyer, ha a $\mathcal{H}_1$ illetve a $\mathcal{H}_2$ egy elemét hamarabb elfoglalja, ahol $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset 2^V$.

Nyilvánvalónak tűnik, hogy csak az egyik játékos nyerhet a hexben. Ez így is van, de ekvivalens a szintén egyszerűnek tűnő *Jordan-féle görbetétellel*[7]. Szintén előkelő rokonsága van a topológiában az alábbi, ún. *hex tételnek*:

3. Tétel (Nash-Gale). *Ha a hex tábla összes mezőjét kiszínezzük fehérrel vagy feketével, akkor vagy lesz fehér északnyugati-délkeleti, vagy fekete északkelet-délnyugati út.*

Azaz döntetlen még akkor sem lehetséges, ha a két játékos erre törekedne. Kombinálva ezt az eredményt a 2. tétel ötletével (és felhasználva, hogy a $\mathcal{H}_1$ képe egy megfelelő tengelyes tükrözésnél éppen a $\mathcal{H}_2$) kapjuk, hogy:

4. Tétel (John Nash, 1949). *A kezdő játékos nyer a hexben.*[8]

Visszatérve a topológiai kapcsolatokra, 1979-ben igazolta David Gale, hogy a hex tétel és a *Brouwer-féle fixpont tétel* ekvivalensek, lásd [26]. Vele egyidőben, tőle függetlenül Lovász László az ún. *Sperner lemmából* vezette le a hex tételt klasszikus könyvében, [40]. Ehhez hasonló módon bizonyították Hochberg és társai [35], hogy a Sperner lemmából következik az ún. *konnektor tétel*. Később Chris Hartman foglalta össze egy nagyon gazdaságos ciklikus bizonyításban a következő eredményeket, lásd [33]. Az egyszerűség kedvéért a 2-dimenziós eseteket mondjuk ki, az n-dimenziós eset a fenti cikkben elérhető.

Legyen T az ABC háromszög egy háromszögezése, melynek a pontjai az alábbi módon színezettek: (i) Az A, B és C pontok színei rendre 1, 2 és 3. (ii) Az ABC háromszög oldalain fekvő pontok az oldal egyik végpontjának a színét kapják.

Sperner lemma. T-ben van olyan háromszög, amelynek csúcsai három különböző színt kaptak.

[7] Egy egyszerű, zárt görbe a síkot két —egy külső és egy belső— összefüggő részre osztja.

[8] A tétel a pozíciós játékok talán legismertebb eredménye. Ugyanakkor egy tisztán egzisztencia bizonyítás, amelyben a létezésén kívül semmit sem tudunk meg a nyerő stratégiáról. Nagyon nehéz, ún. PSPACE-teljes probléma megmondani, hogy *melyik* fél nyer, ha adott az $n \times n$-es hex tábla egy részleges kitöltése, [48].

Legyen G egy, a külső oldalát kivéve, háromszög lapokból álló síkgráf. Rögzítsük a külső oldalon az x, y, z pontokat ebben a körüljárási irányban. Az $[x, y]$ *intervallum* az x-t, y-t és a köztük lévő pontokat jelenti. (Az $[y, z]$ és $[z, x]$ analóg módon.) G pontjainak egy C részhalmaza *konnektor*, ha a C által feszített részgráf összefüggő, és tartalmaz pontot az $[x, y]$, $[y, z]$ és $[z, x]$ intervallumok mindegyikéből.

Konnektor tétel. Ha két színnel színezzünk a fenti módon definiált G pontjait, akkor abban lesz egy C egyszínű konnektor.[9]

Legyen $e_1 = (1, 0)$ és $e_2 = (0, 1)$ a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységvektorok, és az $a, b \in \mathbb{Z}^2$, melyre $a_i \leq b_i$ $i = 1, 2$-re. A $D(a, b)$ *doboz* pedig a következő pontok halmaza: $D(a, b) := \{(x_1, x_2) : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ és } x_i \text{ egész } i = 1, 2\}$. D két pontja *szomszédos*, ha mindkét koordinátájuk legfeljebb egy egységgel tér el.

Pouzet lemma. Ha egy $f : D(a, b) \mapsto \{\pm e_1, \pm e_2\}$ függvényre minden $x \in D(a, b)$-re teljesül az $x + f(x) \in D$, akkor vannak olyan szomszédos x és y pontok, hogy $f(x) = -f(y)$.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a hex tábla felfogható, mint az előbbi D. Ebben $x, y \in D$ akkor szomszédosak, ha $x - y$ vagy $y - x$ eleme $\{0, 1\}^2$-nak, és az egyik játékosnak a D doboz alsó és felső, a másiknak a jobb és bal oldalát kell összekötni. Hasonlóan történhet d-dimenziós hex tábla megadása is.

Brouwer-féle fixpont tétel. Ha egy f folytonos függvény az R^2 egységgömbjét önmagába viszi, akkor van olyan x, melyre $f(x) = x$.

Cris Hartman az alábbi utat adja a [33]-ban: Sperner lemma ⇒ konnektor tétel ⇒ hex tétel ⇒ Pouzet lemma ⇒ Brouwer-féle fixpont tétel[10] ⇒ Sperner lemma.

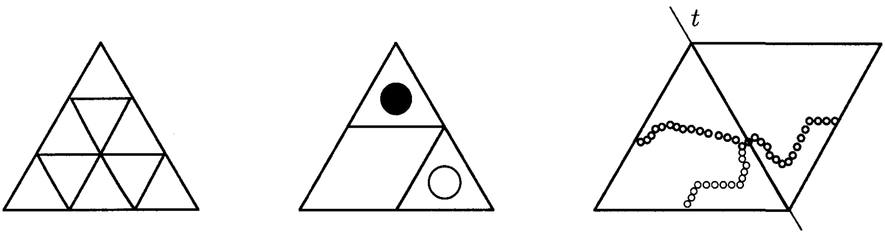
A konnektor tételt (és az y-játékot) a hex tétel (hex játék) általános formájának tartják, bár mint látható, ekvivalensek. Az egymásból levezethetőség igazából mindkét irányban *könnyű*, amely az alábbi ábrán látható.

A baloldal a 4-es y-játék; vegyük észre, hogy a szomszédság a gráfon olyan, mint a hexben a mezők között. A középső ábrán egy kitöltött hex táblát kiegészítettünk egy csupa fehér ill. fekete pontot tartalmazó háromszöggel, amely egy lejátszott y-játékra vezet.

---

[9] Craige Schensted és Charles Titus, illetve Claude Shannon már 1952-ben bevezette az ún. *y-játékot*. Ennek a táblája a szabályos háromszög rács szintén szabályos háromszög alakú darabja és a cél egy konnektor megszerzése, ahol a háromszög csúcsai a rögzített pontok. A konnektor tétel miatt az y-játék nem lehet döntetlen, így azt a 2. tétel miatt a kezdő nyeri.

[10] Természetesen a véges módszerek csak ϵ-approximációt adhatnak. Azaz adott $\epsilon > 0$-ra olyan x létezését, amelyre $\|f(x) - x\|_2 < \epsilon$. A fixponthoz még a szokásos kompaktsági érvelés szükséges.



2. ábra. A 4 × 4-es y-játék tábla, a kiegészített hex tábla és a t-re tükrözött y-játék

A konnektor tétel miatt van egy egyszínű konnektor, de ez egy egyszínű nyerő halmazt jelent az eredeti hex táblán. Végül a jobb oldali ábrán egy lejátszott y-játék tábláját tükrözzük a t-tengelyre, a szélső sort félbevágva. Ezzel egy (szimmetrikusan) kitöltött hex táblát kapunk. A hex tétel miatt létező nyerő halmaznak az eredeti táblából kilógó részeit ,,visszatükrözve" egy egyszínű konnektort kapunk.

Sávszélesség. Hochberg és társai a [35]-ben a konnektor tétel felhasználásával a T_n, az n oldalélű háromszögrács (y-játék tábla) *sávszélességére* adtak alsó korlátot.[11] A sávszélesség meghatározása már speciális gráfokra is nehéz feladat; valójában már 3 maximális fokszámú fákra is NP-teljes, [29]. Meglepő tehát, hogy egy nem triviális esetben a játékok segítenek ebben.

Fordított játékok. A hex tétel felveti az ún. *fordított játék*, (a [16]-ban *misère game*) lehetőségét. Általában egy fordított játékban az nyer, aki az eredetiben veszítene. A fordított hex sem lehet döntetlen, a stratégia lopás egy kifinomult változatával mutatható meg az alábbi tétel a [38]-ból:

Misère hex tétel. A kezdő nyer a fordított $n \times n$-es hexben, ha n páros, különben a második nyer. Továbbá a vesztes félnek van olyan stratégiája, amellyel nem veszít a tábla összes mezejének elfoglalása előtt.

Vegyük észre, hogy az állítás második feléből következik az első; ezen alapszik az említett stratégia. Megmutatható, hogy gondolatmenet alkalmazható a fordított y-játékra is, ott a tábla pontszámának, $|V(T_n)|$, paritásán múlik a nyerés, páros méretre I, páratlanra II nyer. Hasonlóan definiálhatjuk a fordított hipergráf játékokat, amelyek, ha lehet, még nehezebbek, mint a normál változat, hiszen a 2. tétel sem használható rájuk.[12]

3 Párosítások és matroidok

Nagyon hatékony eszköz a játékelméletben a párosítás. Egy klasszikus feladatban I és II egyforma érméket helyez egy köralakú asztalra. Az átfedés

[11] Legyen $G = (V(G), (G))$ egy egyszerű gráf. Az η *cimkézés* $V(G)$ bijekciója $\{1, \dots, |V(G)|\}$-be. Az η *sávszélessége* $B(\eta, G) = \max\{|\eta(u) - \eta(v)| : uv \in (G)\}$. A G gráf *sávszélessége* $B(G) := \min_\eta\{B(\eta, G)\}$. $B(T_n) = n + 1$, míg például az $n \times n$-es négyzetrácsra, a $P_n \times P_n$-re $B(P_n \times P_n) = n$.

[12] Ebben a sokkal általánosabb *kombinatorikus játékokra* hasonlítanak, bővebben [16, 19].

nem megengedett, és az veszít, aki nem tud lépni. A kezdő könnyen nyer a középpontba téve, majd az ellenfél lépéseit erre tükrözve. (Persze ha az asztal nem középpontosan szimmetrikus, alig tudunk valamit.) Egy tengelyes tükrözéssel nyerhető a $n \times (n+1)$-es hex is a közelebbi oldalakat összekötni kívánó félnek, [16, 27].

A hipergráf játékok párosítási stratégiái a [31]-ből származnak. Alfred Hales és Robert Jewett vezette be a $HJ(n,d)$-vel jelölt játékokat, ahol n és d termszetes számok. A $HJ(n,d)$ táblája egy d dimenziós kocka, amelyik n^d kisebb kockából van összerakva úgy, hogy a nagy kocka minden éle mentén n kis kocka fekszik. Formálisan a hipergráf alaphalmaza a d hosszú sorozatok, ahol minden koordináta egy 1 és n között lévő egész szám, azaz $V(HJ(n,d)) = \{1,\dots,n\}^d$. A hipergráf élei azon n elemű részhalmazok, melyeknek elemei sorba rendezhetők oly módon, hogy egy rögzített koordinátában az $1,2,\dots,n$, az $n, n-1,\dots,1$ vagy konstans értéket vesznek fel a sorozatok. Persze a $HJ(3,2)$ nem más, mint a tic-tac-toe, a $HJ(4,3)$ pedig a tic-toc-tac-toe.

Definíció. Egy $\chi : V \mapsto \{1,\dots,k\}$ az $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ hipergráf *jó színezése*, ha minden $A \in \mathcal{H}$ halmaz képe legalább kételemű. A minimális k, amelyre van jó színezés, $\mathcal{F}$ *kromatikus száma*, jele $\chi(\mathcal{F})$.

Ha egy $\mathcal{F}$ hipergráfra a $\chi(\mathcal{F}) > 2$, akkor a rajta értelmezett ott játék nem végződhet döntetlenül. Az y-játék mellett például a $HJ(3,3)$ is ilyen. Másrészt a $HJ(4,3)$ példa arra, hogy I-nek lehet nyerő stratégiája egy $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ játékban akkor is, ha $\chi(\mathcal{F}) = 2$.

Hales–Jewett tétel. Bármely n természetes számra létezik olyan $d > 0$ egész, hogy a $HJ(n,d)$ játék hipergráfjának kromatikus száma nagyobb, mint kettő.

Így az a kérdés, milyen n és d mellett érhet el döntetlent II? Ennek kimondásához szükség van az ún. Kőnig-Hall tételre, lásd [40].

Adott véges halmazoknak egy $\{A_i\}_{i=1}^m$ véges rendszere. Egy $S = \{s_i\}_{i=1}^m \subseteq \cup_{i=1}^m A_i$ *diszjunkt reprezentáns rendszer*, ha $s_i \neq s_j$, $i \neq j$-re és $s_i \in A_i$ az $i = 1,...,m$ esetén.

5. Tétel (Kőnig D.-Ph. Hall). *A véges halmazokból álló $\{A_i\}_{i=1}^m$ halmazrendszernek pontosan akkor létezik diszjunkt reprezentáns rendszere, ha minden $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ esetén $|\cup_{i\in I} A_i| \geq |I|$.*[13]

6. Tétel (Hales–Jewett). *Ha egy véges $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ hipergráf játékban minden $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ esetén $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$, akkor a játék döntetlen.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{H} = \{A_1,\dots,A_m\}$, legyen $\mathcal{H}^* = \{A_1, A_1^*, A_2, A_2^*,\dots, A_m, A_m^*\}$, ahol $A_i = A_i^*$ minden $i = 1,\dots,m$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$ feltételből következik, hogy minden $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{H}^*$ választásra $|\cup_{A\in\mathcal{G}^*} A| \geq |\mathcal{G}^*|$, azaz a $\mathcal{H}^*$ rendszerre alkalmazható az 5. tétel. Legyen a

[13] Kőnig Dénes a tételt páros gráfokra vonatkozó alakban mondta ki. *Marshall Hall Jr.* 1949-ben belátta olyan végtelen halmazrendszerekre, amelyekben minden pont fokszáma véges, [32].

diszjunkt reprezentáns rendszer $S = \{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, \ldots, a_m, a_m^*\}$. II kövesse az alábbi stratégiát: Valahányszor I választ egy elemet S-ből (a_i-t vagy a_i^*-ot), akkor II válassza a megegyező indexűt (a_i^*-ot vagy a_i-t), különben tetszőlegesen léphet. I nem szerezheti meg A_i összes elemét egyetlen $i = 1, \ldots, m$-re sem, mert az $a_i, a_i^* \in A_i$ közül legalább az egyiket II szerzi meg. □

Vegyük észre, hogy a $HJ(n,d)$ hipergráfban minden pont legfeljebb $\frac{1}{2}(3^d - 1)$ nyerő halmaznak eleme, ha n páratlan. Páros n-re ez a szám $2^d - 1$. Így a 6. tételt alkalmazva egyből kapjuk:

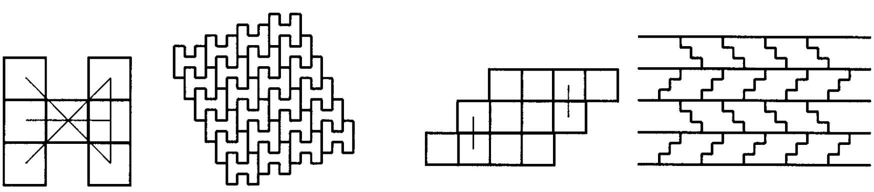
7. Tétel (Hales–Jewett, 1963). *A $HJ(n,d)$ döntetlen, ha $n \geq 3^d - 1$ és $n = 2l + 1$, vagy ha $n \geq 2^{d+1} - 2$ és $n = 2l$.*

Párosítási stratégiával ennél sokkal jobb korlát nem adható, más módszerrel viszont, ahogy azt látni fogjuk, igen. A fordított játék a paritástól (is) függ, I (II) nem veszít a fordított $HJ(n,d)$-ben, ha d páratlan (páros).[14]

A 6. tételt (Marshall Hall Jr. javításával) alkalmazhatjuk a végtelen táblán játszott k-amőbára. Ez $k \geq 15$ esetén döntetlent ad. Ha d-dimenziós táblán játszunk, akkor ez a korlát $k \geq 2(3^d - 1) - 1$, [44]. Hales és Jewett megadott egy párosítást, amely $k \geq 9$-re döntetlent ad, de ez nem a 6. tételen alapul, [16].

Segédjátékok. Egy párosítás nem más, mint a tábla szétvágása kisebb, könnyebben áttekinthető részekre. A résztáblákon a játékos egymástól független új, segédjátékokat játszik, amelyek együttesen a céljához segítik.

Ennek egyik első példája Shannon és Pollak ötlete, amellyel a 9-amőbára adtak döntetlen stratégiát. Ezt megjavította egy, a T. G. L. Zetters álnéven[15] színre lépő holland matematikus csoport, belátván, hogy már a 8-amőba is döntetlen, [16, 30].



3. ábra. A Shannon-Pollak parkettázás és a T. G. L. Zetters parkettázás

[14] A $\{1, \ldots, n\}^d$ kocka középpontjára szimmetrikus lépésekkel ez elérhető. Ha n páratlan, I elfoglalhatja a centrumot, különben II játszhat középpontos tükrözéssel.

[15] Az álnév régi fogás a matematikában, amikor úgy véli egy szerző, hogy támadásoknak lehet céltáblája a munkája miatt, pl. *Student, Blanche Descartes, Bourbaki, Alon Nilli* stb. A 7-amőba kimenetele máig nyitott, a megoldója bátran vállalhatná. (Ilyen a 6-amőba és a $HJ(5,3)$ is.)

II, ha lehetséges, azon a résztáblán/parkettán lép, mint I. A Shannon-Pollak parketta nyerő halmazait a vékony vonal jelöli; ez négy darab, három elemű halmaz. A T. G. L. Zetters parketta nyerőhalmazai a parketta három sora, négy 45 fokos átlója és a két, vékony vonallal jelölt pár. Egy kis munkával ellenőrizhető, hogy (i) a segédjátékokban nem veszít II, (ii) ha I nem nyer legalább egy segédjátékban, akkor nem nyerheti meg a 9- illetve 8-amőbát sem.

Valójában a fentiekben erősebb állításokat igazoltunk, mint amiket kimondtunk. A kezdő játékos akkor sem tud nyerő halmazt megszerezni, ha a másodiknak nincs lehetősége ellentámadni. Azaz hiába szerez meg II egy nyerő halmazt, a játék folyik tovább. Ez a pozíciós játékok ún. *építő-romboló* (Maker-Breaker) változata, ahol az építő akkor nyer, ha megszerez egy nyerő halmazt, míg a romboló akkor, ha ezt megakadályozza.[16] Ha II rombolóként nyer ebben az építő-romboló változatban, akkor döntetlene van az eredetiben is. Fordítva ez nem igaz, a tic-tac-toe-t a kezdő építőként megnyeri. Definiálható egy építő-romboló játék megfordítása is, nevezzük ezt *sumák-hajcsár* (Avoider-Enforcer) játéknak. Ebben a sumák nyer, ha elkerüli nyerő halmaz megszerzését, a hajcsár pedig akkor, ha rá tudja kényszeríteni ellenfélet egy nyerő halmaz elfoglalására.

A párosítások és a tábla egyéb felosztása hatékony módszer önmagában, vagy más eszközökkel kombinálva. További példák találhatóak erre a [8, 12, 14, 22, 45, 46, 49] számú írásokban.

Sávszélesség játék. Legyen egy n pontú G gráf sávszélessége $B(G)$, és a felek felváltva helyezzék G pontjaira a $\{1, \ldots, n\}$ számokat. Aki egy x pontot q-val számoz, úgy, hogy egy x-szel szomszédos pont y pont már számozott r-rel és $|q - r| \geq B(G)$, az veszít. Középpontos tükrözéssel a táblára és $\{1, \ldots, n\}$-re látható, hogy a $P_k \times P_k$ rácsra a kezdő pontosan akkor nyer, ha $k > 1$ és páratlan. Más gráfokra, mint pl. a T_k nem ismert, hogyan kell játszani, vagy az, hogy ki nyer.[17]

Shannon-féle kapcsoló játék. Ez a játék a hex, az y-játék és a David Gale által kigondolt *Brigit* mintájára készült, [16]. Ezekben az összekötős játékokban pontosan az egyik fél nyer, kézenfekvő hát, hogy építő-romboló formában beszéljünk róluk. Ha adott egy G gráf, akkor egy-egy élt[18] választva fordulónként az építő G egy *feszítőfáját* akarja megszerezni, míg a romboló célja az, hogy az építő éleiből álló részgráf ne legyen összefüggő.

8. Tétel (Alfred Lehman, 1964, [39]). *Tegyük fel, hogy a romboló kezdi a Shannon-féle kapcsoló játékot. Egy adott n-pontú G gráfra építő pontosan akkor nyer, ha G-ben van két diszjunkt feszítőfa, F_1 és F_2.*

[16] A nyerés eldöntése mind a normál, mind az építő-romboló változatban PSPACE-teljes feladat, ennek egyszerű bizonyítása található a [17] dolgozatban.

[17] Számos kombinatorikai tétel lehet efféle *elkerülhetetlenségi* játék alapja. A felsoroltak mellett a Ramsey, a van der Waerden és a Hales-Jewett tételek játék hátterét kutatták nagy erőkkel, [4, 11].

[18] A hex és az y-játék szintén alapozható egy-egy gráfra, de ott nem az éleket, hanem a pontokat szerzik meg a játékosok. Ez a látszólag kis eltérés egy teljesen más világba visz; itt képesek vagyunk a nyerő stratégiák leírására.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: A játék i-edik menetében F_1^i és F_2^i fákról beszélünk majd a G_i gráfban. ($G_1 = G$, $F_1^1 = F_1$ és $F_2^1 = F_2$.) Ha a romboló az i-edik lépésben nem az $E(F_1^i) \cup E(F_2^i)$-ből választ, akkor az építő bármit léphet. Ha mondjuk F_1^i-ből vesz egy e_i élt romboló, akkor az $E(F_1^i) \setminus \{e_i\}$ élek által feszített részgráf pontosan két, C_1^i és C_2^i, komponensből áll. Az építő ekkor egy olyan $f_i \in F_2^i$ élt választ, mely a C_1^i-t összeköti C_2^i-vel. (A fák alapvető tulajdonságai a [40]-ből felidézhetők.) Mivel az f_i él két végpontja, x_i és y_i többé nem szakad el egymástól, *húzzuk össze* az f_i élt.[19] Könnyen látható, ha F_1^i és F_2^i diszjunkt feszítőfái a G_i-nek, akkor az $F_1^{i+1} = F_1^i/f_i$ és $F_2^{i+1} = F_2^i/f_i$ szintén diszjunkt feszítőfák G_{i+1}-ben. Továbbá $|V(G_i)|-1 = |V(G_{i+1})|$, ezért $|V(G_{n-1})| = 1$, és az $\{f_1, \ldots f_{n-1}\}$ élek G egy feszítőfáját alkotják.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy az építő nyer és lopja el ezt a stratégiát a romboló. A játék végére a romboló megszerzi az F_r, az építő pedig az F_m feszítőfa éleit, amelyek G-ben vannak és diszjunktak. $\square$

Megjegyzés. A fenti érvelést eredetileg nem gráfokra, hanem *matroidokra* adták. A matroidoknak sok egyenértékű jellemzése van, nekünk most a *bázis* fogalma a legkényelmesebb. A véges V halmaz feletti $\mathcal{B}$ halmazrendszert egy *matroid bázisainak* nevezzük, ha

1. $\mathcal{B}$ nem-üres,
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in A \setminus B$ esetén $\exists\, y \in B \setminus A$, hogy $\{A \setminus \{x\}\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Ezzel a 8. tétel általánosabb formában így szól: Ha az építő-romboló $(V, \mathcal{B})$ pozíciós játékban a romboló kezd, akkor az építő pontosan akkor nyer, ha léteznek $A, B \in \mathcal{B}$ halmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Az élek törlése és kontrakciója természetes matroid műveletek, a 2. axióma mintha a fenti bizonyításra lenne szabva.[20] A 8. tétel olyan helyzetekben is működik, amikor párosítási stratégia biztosan nem létezik. Vegyük a teljes gráfot az $\{x, y, v, w\}$ pontokon, és a q, z pontokat úgy, hogy q szomszédos x-szel és y-nal, z pedig v-vel és w-vel.

4 A véletlen módszer és a súlyfüggvények

A véletlen módszerek a matematika legtöbb ágában jelentős szerepet játszanak, a kombinatorikában és a játékelméletben pedig alapvetőt. Az inkább a meglepő, hogy viszonylag későn jelentek meg a pozíciós játékokban. Az áttörést Erdős Pál és John Selfridge 1973-as eredménye, [24], hozta.[21]

[19] Az új gráfban, G_{i+1}-ben x_i és y_i helyett egy új, z_i pontot veszünk fel, melyet x_i és y_i összes szomszédjával kötünk össze, jelben $G_{i+1} = G_i/f_i$.

[20] A látszat csal, hiszen a matroidokat már Hassler Whitney [53] vizsgálta az 1930-as években. Lehman tétele jelentősen növelte a matroidok elfogadottságát. Ezt megelőzően pl. William Tutte néhány matroidokra vonatkozó klasszikus eredményét inkább gráfokra mondta ki, [36]. Azóta viszont a matroidok a kombinatorika, a kombinatorikus optimalizálás és a véges geometria fontos részévé váltak.

[21] John H. Conway híres békás problémája is *lehetett volna* volna a kezdet, [16]. Az ott használt súlyfüggvénynek viszont nincs közvetlen valószínűségi jelentése, talán emiatt maradt visszhangtalan.

9. Tétel (Erdős-Selfridge, 1973). *Tegyük fel, hogy egy* $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ *hipergráf játék építő-romboló változatában az építő kezd, és* $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. *Ekkor a romboló nyer.*

Bizonyítás. Legyen az építő i-edik lépése x_i, míg a rombolóé y_i, $X_i = \{x_1, \dots, x_i\}$, $Y_i = \{y_1, \dots, y_i\}$ és $A_i(I) = |A \cap X_i|$, illetve $A_i(II) = |A \cap Y_{i-1}|$. Egy $A \in \mathcal{H}$ halmaz *súlya* az i-edik lépésben:

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)} & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Egy $x \in V$ *elem súlya* $w_i(x) = \sum_{x\in A} w_i(A)$, a *potenciál* pedig $w_i = \sum_{A\in\mathcal{H}} w_i(A)$.

A romboló az ún. *mohó algoritmust* követi, azt a $z \in V \setminus (X_i \cup Y_{i-1})$ elemet veszi az i-edik lépésben, amelyre a $w_i(z)$ érték maximális. Ez a $w_i \geq w_{i+1}$ egyenlőtlenséget adja minden i-re. Valóban, $w_{i+1} \leq w_i - w_i(y_i) + w_i(x_{i+1})$, hisz a romboló i-edik lépése $w_i(y_i)$-vel csökkenti, míg az építő az $i+1$-edik lépése legfeljebb $w_i(x_{i+1})$-el növelheti a potenciált, hisz pontosan azoknak az x_{i+1}-et tartalmazó halmazok súlyát duplázza meg, amelyeknek nem eleme y_i. A mohó algoritmus miatt $w_i(y_i) \geq w_i(x_{i+1})$, így adódik a potenciál monotonitása. Másrészt $w_1 \leq 2w_0$ mivel x_1 azon halmazok súlyát duplázza, amelyeknek eleme.

Ezért a 9. tétel feltétele miatt $w_1 \leq 2w_0 = \sum_{A\in E(\mathcal{H})} 2^{-|A|+1} < 1$. Tegyük fel, hogy az építő megnyeri a játékot, mondjuk a k-adik lépésben. Ez azt jelenti, hogy van olyan $A^* \in \mathcal{H}$, amelyre $|A^*| = A_k^*(I)$, így

$$1 > w_1 \geq w_k = \sum_{A\in E(\mathcal{H})} w_k(A) \geq w_k(A^*) = 2^{-|A^*|+A_k^*(I)} = 2^0 = 1.$$

Azaz a feltevésünk, hogy az építő nyer, ellentmondásra vezet. □

Vegyük észre, hogy amíg a 6. tétel csak a *ritka*, de tetszőleges méretű, addig a 9. tétel a *sűrű*, de legfeljebb exponenciális méretű hipergráfokra adhat eredményt. A módszerek részben összevegyíthetőek, lásd [8, 11, 12].

A 9. tétel vezet a *hatékony derandomizációkhoz* és a játékok mélyebb megértéséhez. Ez konkrétan éppen Erdős egy régi tételének bizonyításából tünteti el a véletlent, mely szerint ha $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$ egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra, akkor $\chi(\mathcal{F}) \leq 2$. Vegyük észre, ha V pontjait egymástól függetlenül, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel színezzük kékre vagy pirosra[22], akkor az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} = \sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1}$. Mivel $\mathbb{E} < 1$, lennie kell egy jó színezésnek, [1]. Ezért az összes $2^{|V|}$ darab kettő színezésből legalább egy jó.

Az $\mathcal{F}$ paramétereiben polinom időben is adhatunk egy jó színezést: játsszon mindkét játékos úgy, mintha romboló lenne. A $w_i(A)$ súly annak a feltételes valószínűsége, hogy A például kék lesz, ha az i-edik lépéstől pénzfeldobással

---

[22] Ez egy érme ismételt feldobásával elérhető. A példa mutatja, mekkora ereje van a véletlennek.

színezünk. A játékok vizsgálatához is kapunk egy vezérfonalat, amely sokszor segít.

A véletlen heurisztika. Cseréljük ki a két tökéletesen játszó játékost két teljesen véletlenül játszóra. Nagyjából ugyanaz lesz a végeredmény.[23]

A valószínűségszámítási módszer és a pozíciós játékok elmélete közt szoros kapcsolat van. Lényegében minden módszernek az elsőből megvan a megfelelője a másodikból. 9. tétel, és főképpen a bizonyítási módszere, az ún. *első momentum módszer* derandomizálása. Így származtatható a (játékelméleti) második momentum módszer, Lovász lokális lemma stb, [1, 9, 12].

A 9. tétel éles, vannak olyan $\mathcal{F}$ hipergráfok, melyre $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} = 1$, és az építő nyer. Legyen T_n egy n-szintes bináris fa, $V = V(T_n)$ és $A \in \mathcal{H}$, ha A a gyökér és egy levél közti út pontjaiból áll. (Az építő a gyökeret foglalja el, majd maradékból mindig annak a részfának a gyökerét, amelyiket elkerülte a romboló.) Egy másik példa: $V = \cup_{i=1}^{n-1}\{x_i, y_i\} \cup z$, $A \in \mathcal{H}$ ha $z \in A$ ś $|A \cap \{x_i, y_i\}| > 0$ minden i-re. (Itt az építő z-t veszi először, majd ha a romboló egy $\{x_i, y_i\}$ pár egyik elemét választja, akkor ő a másikat.)

Beck József a [12]-ben vizsgálta a *kérdező-választó* (Picker-Chooser) és *választó-kérdező* (Chooser-Picker) játékokat. Itt a kérdező (Picker) kivesz két elemet, legyenek ezek $\{x_i, y_i\}$ az i-edik fordulóban, majd a választó (Chooser) dönthet, az egyiket a saját, a másikat a kérdező színére festi. Az első helyen álló játékos az építő, míg a másik a romboló szerepet kapja. A tapasztalat szerint a kérdező helyzete nem rosszabb, mintha egy építő-romboló játékot kellene játszania. Ezt a heurisztikát fejti ki Beck a [10]-ben, pontosabb formáját pedig szerzőtársaimmal a [21] dolgozatban adjuk meg:

10. Sejtés (Beck). *A kérdező nyeri a kérdező-választó (választó-kérdező) játékot az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfon, ha építő (romboló), mint második játékos nyeri az építő-romboló játékot az $\mathcal{F}$ hipergráfon.*

Egyelőre csak néhány játékra[24] bizonyított a 10. sejtés, lásd [10, 21], az általános eset nem igérkezik könnyűnek. Jóval korábban, lásd [13], felvetette Beck József a kérdező-választó játékhoz hasonló, az ún. megbízó-festő játékot. Ebben a megbízó a kérdező, a festő pedig a választó. A megbízó nyer, ha lesz egyszínű halmaz, különben a monotóniát kerülő festő a nyerő. A [13] tartalmazza a 9. tételt megbízó-festő játékokra; a bizonyítás a szokásos súlyfüggvény módszer.

Az érdekesség kedvéért most bemutatunk egy véletlen módszert használó gondolatmenetet; hasonlót Joel Spencer használt a *véglegesítés játék* (tenured game) elemzésben, [1, 50].

---

[23] Természetesen a véletlen heurisztika csak elv, sokszor érvényes, néha nem. De bármely játék esetén célszerű megnézni, hogy mit *jósol*. Véletlenül játszani viszont csak ritkán érdemes, lásd [15].

[24] Ilyenek a később említett *Ramsey játékok*. Továbbá még a 8. tétel, a 8-amőba és a $HJ(4, 2)$ választó-kérdező változata. A 9. tétel választó-kérdező változatát egyelőre nem sikerült teljes erejében igazolni, bár ez a 10. sejtés egyik legérdekesebb speciális esete.

A 9. tétel megbízó-festő játékokra. *A festő nyer, ha*

$$\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1 \,.$$

Bizonyítás. Színezze a festő a kapott elemeket pénzfeldobással. Nézzük meg, milyen valószínűséggel lesz egyszínű egy $A \in E(\mathcal{H})$ halmaz. Ha egy $\{x_i, y_i\} \subset A$, akkor nem lehet egyszínű A. Ha $|\{x_i, y_i\} \cap A| \leq 1$ minden i-re, akkor ez a valószínűség $2^{-|A|+1}$.

Ezért az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} \leq \sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$ a megbízó *bármely* stratégiája esetén. Ha a megbízónak lenne nyerő stratégiája, akkor minden játék végén lenne egyszínű halmaz, azaz $\mathbb{E} \geq 1$. Mivel a játék nem lehet döntetlen, így az 1. tétel miatt a festőnek van nyerő stratégiája. □

Elfogult játékok. Sűrű gráfokra is érdekessé tehető a Shannon-féle kapcsoló játék, ha a romboló nem egy, hanem több, mondjuk b élt vehet el egyszerre, [18]. Ha a K_n-n (n-pontú teljes gráf) játszunk, van egy b_0 *töréspont*, azzal, ha $b < b_0$, akkor az építő, ha $b > b_0$ akkor meg a romboló nyer.[25] A fenti példában $b_0 \approx n/\log n$, vagyis az építő élei akkor kötik össze a pontokat, ha ennél jóval kisebb a b, és akkor nem, ha $b >> b_0$. Az építő által megszerezhető részgráf más $\mathcal{P}$ tulajdonságai is érdekesek: Hamilton kör vagy hosszú utak léte, [7, 9, 51], a legnagyobb komponens mérete, [15], az átmérő, [3] vagy a minimális fokszám, [9, 52].

Az egyik legfontosabb eszköz a 9. tétel általánosítása, Beck József, [5]. A $(V, \mathcal{H}, a, b)$ hipergráf játék szabályaiban megegyezik a $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ játékkal, csak az egyik fél, (építő-romboló változatban az építő) a, a másik (romboló) pedig b elemet vehet fordulónként.

Erdős-Selfridge-Beck tétel. A $(V, \mathcal{H}, a, b)$ hipergráf játék építő-romboló változatában ha $\sum_{A\in\mathcal{H}} (1+b)^{1-|A|/a} < 1$, akkor a romboló nyer.

Igazolni a korábbi súlyfüggvények kis módosításával lehet. Ez a tétel is éles, azaz a feltételben egyenlőséget írva már nem igaz.

Felmerül, honnan lehet megtippelni, mit várjunk egy-egy gráf játékban, azaz milyen a és b érték mellett érhet el az építő egy $\mathcal{P}$ tulajdonságot? Itt újra a véletlen heurisztika játszik döntő szerepet, a véletlen gráfokra alapozva, [1].

A $G(n,p)$**.** A $G(n,p)$ valószínűségi mező úgy keletkezik, hogy az n pontú teljes gráf éleit egymástól teljesen függetlenül, p valószínűséggel hagyjuk meg.[26]

A $G(n,p)$-re vonatkozó eredmények jó része arról szól, ha adott egy $\mathcal{P}$ monoton gráftulajdonság,[27] akkor egy $G \in G(n,p)$ milyen $f_{\mathcal{P}}(p)$ valószínűséggel $\mathcal{P}$ tulajdonságú? Ha $\mathcal{P}$ nem triviális, akkor $f_{\mathcal{P}}(0) = 0$, $f_{\mathcal{P}}(1) = 1$, és

---

[25] A b_0 pontos értékének kiszámítása többnyire reménytelen, általában csak becslések adhatók.

[26] Sok más véletlen gráf modellt is használnak. A *perkoláció elméletben* rácsok éleit veszik p valószínűséggel, az ún. *kis-világ gráfok* leírására egy hatványtörvényt követő fokszám eloszlásúak közül húznak egyet egyenletes eloszlás szerint.

[27] A $\mathcal{P}$ attól monoton, ha egy G rendelkezik vele, akkor új éleket véve G-hez megmarad $\mathcal{P}$. Monoton pl. az összefüggőség, Hamilton kör léte, de nem ilyen Euler köré.

$f_{\mathcal{P}}(p)$ monoton növő p-ben. Sok esetben van egy olyan p_0 *küszöb*, ami körül ugrik fel $f_{\mathcal{P}}$ majdnem nulláról majdnem egyre, [1].

A véletlen gráf heurisztika. A $\mathcal{P}$ monoton gráftulajdonság elérését célzó, a K_n élein folyó építő-romboló játék b_0 töréspontja ott van, ahol a megegyező élsűrűséget adó p_0 küszöb értéke $\mathcal{P}$-nek a $G(n,p)$-ban. Pontosabban, $b_0 \approx a(1-p_0)/p_0$, vagy $p_0 \approx a/(a+b_0)$, [5].

Ez a heurisztika oly eredményes, hogy az a különleges, ha nem ad jó eredményt. Erre példa az átmérő játék, lásd [3]. Itt egy rögzített $d \in \mathbb{N}$-re az építő azt szeretné, ha a részgráfjának *átmérője* [28] nem haladná meg d-t. Jelöljük ezt $\mathcal{D}_d(a,b)$-vel, ahol a és b, mint eddig. A véletlen gráf heurisztika szerint az építőnek nyernie kellene az $\mathcal{D}_2(1,1)$ játékot, hisz egy véletlen $G \in G(n,1/2)$ gráfra nagy valószínűséggel $\mathrm{diam}(G) = 2$. Ez nincs így, a romboló nyeri a $\mathcal{D}_2(1,1)$ játékot, ha $n \geq 4$. (A romboló vesz egy xy élt, majd párosítást játszik: az építő egy xz lépésére yz-vel, az yz-re pedig xz-vel felel.) Ugyanakkor, ha az építő két élt vehet lépésenként, akkor majdnem helyreáll a rend; az építő nyeri a $\mathcal{D}_2(2,b)$ játékot, ha $b \leq 0.25n^{1/7}/(\ln n)^{3/7}$ és n elég nagy, lásd [3].

Magukon a véletlen gráfokon is értelmezhetők pozíciós játékok, itt követjük Miloš Stojaković és Szabó Tibor leírását az [51]-ből. Adott egy $(V,\mathcal{H},a,b)$ hipergráf játék. A $(V_p,\mathcal{H}_p,a,b)$ *véletlen játék* olyan játékok valószínűségi mezője, melyekre minden $x \in V$ egymástól függetlenül, p valószínűséggel kerül V_p-be, és az $\mathcal{H}_p = \{W \in \mathcal{H} : W \subset V_p\}$. Ha például $V = (K_n)$ és $\mathcal{H}$ a K_n gráf feszítőfái, akkor feltehető a kérdés, milyen p értékekre nyer az építő (romboló) nagy valószínűséggel a $(V_p,\mathcal{H}_p,a,b)$ véletlen játékban? Mint a véletlen gráf heurisztika alapján ez várható, lesz egy b^p töréspont, továbbá $b^p = \Theta(pn/\log n)$, feltéve hogy $p \geq c\log n/n$, valamely $c > 0$-ra, [51].

Egy pozíciós játékban a *lépés joga* is függhet a véletlentől. Yuval Peres és társai a [43]-ban egy olyan hexet vizsgálnak, ahol minden fordulóban érmedobással döntik el, hogy melyik fél léphet. Többféle alakú tábla definiálható, de a véletlen heurisztika hibátlanul jósol: ugyanakkora valószínűséggel nyer az egyik, mondjuk a fehér, a tökéletesen, mint a véletlenül játszó ellenfelek esetén. Meglepő módon az $n \times n$ véletlen hex bármely állásában az optimális stratégia polinom időben kiszámítható és a választandó mező mindkét félre ugyanaz. A játék szoros kapcsolatban van a hatszögrács perkoláció elméletével, és, határátmenetben, a konform leképzésekkel.

Általában is beszélhetünk egy $(V,\mathcal{H})$ játék véletlen változatáról; erre kiterjeszthető a 9. tétel.

Erdős-Selfridge véletlen játékra. Ha a $(V,\mathcal{H})$ hipergráf játék véletlen változatára $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|} < 1$, akkor azt legalább $1/2$ valószínűséggel nyeri a romboló.

Bizonyítás. Játszon a romboló úgy, mint a 9. tételben. Ekkor $\mathbb{E}[w_{i+1}] \leq \mathbb{E}[w_i] < 1$ minden i-re, és ebből a Markov egyenlőtlenség adja az állítást. $\square$

---

[28] egy G gráf átmérője, $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y\in V(G)} d(x,y)$, ahol $d(x,y)$ az x és y pontok közti legrövidebb út hossza.

A második momentum módszer. Egy $G \in G(n, 1/2)$-ben a legnagyobb klikk mérete, $\omega(G)$ a legtöbb n-re nagy valószínűséggel egy k_n értékre koncentrálódik,[29] [1]. Ez a k_n, pontosabban a $q_n = k_n - 2 = 2\log_2 n - 2\log_2\log_2 n + 2\log_2 e - 3$ szám döntő szerepet játszik a *Ramsey játékokban.* Itt a felek a K_n éleit veszik, és a cél (vagy éppen elkerülendő dolog) egy K_q részgráf összes élének megszerzése. Beck József belátta a [10]-ben, hogy q_n a Ramsey játékok töréspontja nagy n-ekre. Pontosabban, ha q_n nincs nagyon közel egy egészhez, akkor $q \leq \lfloor q_n \rfloor$-ra lesz egyszínű K_q, míg ha $q \geq \lceil q_n \rceil$, akkor ez elkerülhető.[30] A véletlen heurisztika megint jól működik, hisz a q_n nemcsak az építő-romboló, sumák-hajcsár, de a kérdező-választó játékokra is érvényes. Szintén a derandomizáció az ötlet a fokszám játékban, [3, 9, 52], itt az építő célja a K_n éleiből *minden pontnál* legalább $n/2 - k$ élt megszerezni. Ha $k \geq \sqrt{n \log n}$, akkor az építő, ha $k \leq \sqrt{n}/24$, akkor a romboló nyer. Hasonló igaz kérdező-választó, vagy megbízó-festő játékokra; az utóbbi alsó korlátja különösen egyszerű.

A megbízó-festő fokszám játék. Itt a festő akkor nyer, ha az lesz olyan x, melynél a megbízó és festő által vett élek különbsége $\geq k$, ahol k előre adott. Ha $k^2 = \binom{n}{2} = m$, akkor a festő nyer.

Bizonyítás (Beck ötlete alapján, lásd [9]). Az $\mathcal{H}$ a gráf egy-egy pontjára illeszkedő élek halmazai. Egy $A \in \mathcal{H}$-ra jelölje $A_i(F)$ ill. $A_i(M)$ a festő ill. a megbízó által az i-dik forduló végéig elfoglalt elemeinek a számát. Továbbá az A súlya $w_i(A) = A_i(F) - A_i(M)$ és $w_i = \sum_{A \in \mathcal{H}} w_i^2(A)$. A $w_i^2(A)$ *változása* (ha pont egy élét színezzük) $w_{i+1}^2 = w_i^2(A) \pm 2w_i(A) + 1$, ezért a festő *mindig* elérheti, hogy $w_i + 2 \leq w_{i+1}$. A játék végén a $w_{m/2} \geq m$, ezért lesz olyan A^*, melyre $w_{m/2}^2(A^*) \geq m$, vagy $w_{m/2}(A^*) \geq \sqrt{m} = k$. Ekkor viszont az egyik játékosnak k-val több éle van az A^*-nak megfelelő pontnál, mint a másiknak. □

Ritka hipergráfok. Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfban minden $A \in \mathcal{H}$-ra az $|A| \geq n$ és A legfeljebb d másikkal éllel metsződik. Ekkor az ún. Lovász-féle lokális lemmából következik, ha $d \leq 2^{n-3}$, akkor $\chi(\mathcal{F}) \leq 2$, lásd [1, 23]. Sokáig nem volt azonban világos, hogyan találhatjuk meg gyorsan (polinom időben) az $\mathcal{F}$ egy jó színezését. Kicsivel erősebb feltételek mellett Beck József leírt egy ilyen algoritmust a [8]-ban. Ezek alapján azt várnánk, ha *d nem túl nagy* (például $d \leq 2^{n/2}$), akkor az építő-romboló játékot a romboló nyeri a $\mathcal{H}$-n.

Általában ez a kérdés teljesen nyitott, de az ún. *majdnem diszjunkt* hipergráfok esetében többet tudunk. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf majdnem diszjunkt, ha $A \neq B \Rightarrow |A \cap B| \leq 1$, minden $A, B \in \mathcal{H}$-ra. Ez teljesül a $HJ(n, d)$ játékokra; ekkor megmutatható, léteznek olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy a romboló nyer, ha $d < c_1 n^2 / \log n$, míg az építő nyer, ha $d > c_2 n^2$, lásd [11, 12]. Ha $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ majdnem diszjunkt és $|A| \leq 3$ minden $A \in \mathcal{H}$, akkor polinom időben eldönthető az építő-romboló játék, lásd [37].

[29] A koncentráció bizonyításának eszköze a második momentum módszer.

[30] Vegyük észre, hogy ez lényegében teljesen pontos eredmény!

Újrafelhasznált játékok. A malomhoz (Nine Men's Morris) hasonló pozíciós játékok az alábbiak. Adott egy $\mathcal{H}$ hipergráf és egy n paraméter. Az első n lépesben a szokásos módon játszanak a felek, majd utánna a már lerakott (saját) jeleket Lehet áthelyezni. Ha egy építő-romboló $\mathcal{F}$ játékban a rombolónak van nyerő párosítási stratégiája, akkor ez használható az $\mathcal{RF}$ újrafelhasznált változatban is.[31] Nyitott kérdés viszont, hogy általánosítható-e a 9. tétel? Néhány, *Kaplansky típusú* újrafelhasznált játékra vannak nem triviális redmények.

Kaplansky eredeti problémájában az $\mathbb{R}^2$ pontjait vehetik felváltva a játékosok, $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Az nyer, akinek először k pontja egy olyan ℓ egyenesen, amin az ellenfelének nincsen pontja. (Az építő-romboló változatban építő akkor nyer, ha lesz olyan ℓ egyenes, amelyen neki k pontja van, míg a rombolónak egy sem.) A [6]-ban, többek közt szerepel olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok léte, hogy az n lépésig tartó játékot a romboló nyeri, ha $k > c_1 \log n$, és az építő nyeri, ha $k < c_2 \log n$. Az építő nyerése az $\mathbb{R}^2$ egy alkalmasan választott véges S halmazán és az alábbi tételen alapul. Itt

$$\Delta_2(\mathcal{F}) = \max_{x,y \in V} |\{A : x, y \in A \in \mathcal{H}\}| \,.$$

Tétel (Beck, [6]). Az építő kezdőként megnyeri a $(\mathcal{H}, p, q)$ építő-romboló játékot, ha

$$\sum_{A \in \mathcal{H}} \left(\frac{p+q}{p}\right)^{-|A|} \geq p^2 q^2 (p+q)^{-3} \Delta_2(\mathcal{H}) |V|.$$

Ha csak a vízszintes, függőleges és ± 1 meredekségű egyeneseken játszunk, és $p = 2$, $q = 1$ akkor vannak olyan $c_1, c_2 > 0$ konstansok, hogy az újrafelhasznált Kaplansky játékot a romboló nyeri ha $k > c_1 \log n$, míg az építő nyer, ha $k < c_2 \log n$, lásd [47]. Ugyanitt található, hogy az általános esetben (azaz az $\mathbb{R}^2$ összes egyenesét tekintve) a romboló nyer, ha $k > 2n^{1/3}$.

Az utóbbi eredmény Szemerédi Endre és William Trotter egy klasszikus kombinatorikus geometriai tételén múlik.[32] Egy *illeszkedés* egy (p, L) pár, ahol $p \in \mathbb{R}^2$, L egy egyenes és $p \in L$.

Szemerédi-Trotter tétel. Vegyünk n pontot és m egyenest a síkon, és legyen I az illeszkedések száma. Ekkor $I \leq c(n + m + (nm)^{2/3})$, ahol c egy abszolút konstans.

Így ha m azon egyenesek száma, amelyek mindegyike legalább k pontját tartalmazza egy n-pontú halmaznak, akkor $m \leq c_2 n^2 / k^3$, ha $k \leq \sqrt{n}$, ahol c_2 konstans. Ez garantálja, hogy a rombolónak mindig lesz egy olyan pontja, amelynek elmozdítása nem befolyásol egy megfelelő súlyfüggvényt, [47].

Alakzatok a síkon. Szintén a Kaplansky játék motiválta az alábbi típusú problémákat, lásd [14]. Adott egy k pontból álló D alakzat a síkon, és az

[31] Az $\mathcal{RF}$-amőbát a romboló nyeri, ha $k \geq 9$. A $k = 8$-ra már nem világos a helyzet.

[32] Ennek egy nagyon szép, a véletlen módszert használó bizonyítását adta Székely László, lásd [1].

építő akkor nyer, ha megszerzi az összes pontját valamely $\phi(D)$-nek, ahol ϕ az $\mathbb{R}^2$ mozgáscsoportjának egy eleme.

Tétel (Beck, [14]). Az építő nyeri az alakzat játékot a síkon minden véges D esetén.

Beck ötletes konstrukcióval egyfajta véges rácsot készít a D elforgatott, eltolt példányaiból, majd a fent említett, [6]-beli tételt alkalmazza.[33]

5 Nyitott problémák

Az eddigiekből talán az a kép alakult ki, hogy a hipergráf játékok elmélete nagyjából lezárt, jelentős új eredmények nem várhatók. Áttöréseket természetesen nem tudunk ígérni, de arról szó sincs, hogy ne lenne meg ennek a lehetősége. Tömérdek játékról alig tudunk valamit, illetve a PSPACE-teljesség miatt egészen kicsiny játékok sem oldhatók meg számítógéppel.[34] Néhány megoldatlan kérdéssel köszönünk el az Olvasótól, egy hosszabb listáért lásd [14].

1. Nyer-e a kezdő játékos az 5-amőbában a végtelen táblán?

2. Ki nyeri az építő-romboló 6- illetve 7-amőbát?

3. Játszuk a 6-amőbát a következő formában. Az kezdő játékos egy elemet választhat, azután a játékosok 2-2 elemet vehetnek felváltva. Mi lesz a végeredmény?

4. Megnyerheti a kezdő a $HJ(5,3)$-at? Mi a helyzet az építő-romboló változattal?

5. Hogyan nyer a kezdő a 10×10-es hexben?

6. Egy építő-romboló játékban a végtelen négyzetrácson építő célja az alábbi D minta egy $\phi(D)$ példánya. $D =$  és ϕ egy izometria. Nyerhet az építő?

7. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra $|A| = n$ minden $A \in \mathcal{H}$ és minden $x \in V$-re $|\{A : x \in A\}| \le 2^{n-3}/n$. Ki nyeri az építő-romboló játékot $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$-n?

8. Egy d-reguláris G gráf éleit véve játszik fokszámjátékot építő és romboló. El tud érni építő $d/2 - c\sqrt{d \log d}$ fokszámot minden pontra, ahol $c > 0$, d-től és G-től független konstans? Esetleg $d/3$-at?

[33] A játék *hossza* ezzel a stratégiával óriási már akkor is, ha D egy szabályos ötszög csúcshalmaza.

[34] Az ún. állapotgráf vizsgálatára van szükség; ennek nagyjából $O(N3^N)$ pontja van, ahol $N = |V|$ a $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$-ra. Ez pl. a $HJ(5,3)$-ra $O(3^{125})$ pontú gráfot jelent, azaz reménytelen vállalkozás.

9. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Igaz, hogy ekkor a kérdező nyeri a választó-kérdező játékot $\mathcal{F}$-en?

10. Az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Igaz, hogy ekkor a romboló nyeri az újrafelhasznált építő-romboló játékot $\mathcal{F}$-en?

11. A K_n élein játszik $(1 : b)$ elfogult játékot építő és romboló. Építő akkor nyer, ha megszerez egy feszítőfát. Mi a legnagyobb $b(n)$ amelyre nyerhet? (Nyerhet, ha $b(n) = (1-\epsilon)n/\log n$, $\epsilon > 0$, $n > n_\epsilon$?)

12. $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ majdnem diszjunkt hipergráfra $|A| \leq 4$ minden $A \in \mathcal{H}$-ra. El lehet dönteni polinom időben, hogy ki nyeri az építő-romboló játékot $\mathcal{F}$-n?

13. PSPACE-teljes probléma eldönteni, hogy ki nyer egy tetszőleges választó-kérdező játékban?

14. Nyerhet a kezdő a Kaplansky játékban, ha $k \geq 4$?

15. Nyerhet a kezdő az alakzat játékban a síkon egymillió lépésnél kevesebbel, ha D a szabályos 17-szög csúcshalmaza?

Irodalom

1. N. Alon and J. Spencer, *The Probabilistic Method*, Academic Press, New York, (1992)
2. L. V. Allis, H. J. van den Herik and M. P. Huntjens, Go-Moku solved by new search techniques. Proc. 1993 AAAI Fall Symposium on Games: Planning and Learning, AAAI Press Technical Report FS93-02, pp. 1-9, Menlo Park, CA.
3. J. Balogh, R. Martin and A. Pluhár, The diameter game. *Horizon of Combinatorics* konferencia, Balatonalmádi (2006).
4. J. Beck, Van der Waerden and Ramsey games. *Combinatorica* **1** (1981), 103–116.
5. J. Beck, Remarks on positional games. *Acta Math Acad Sci Hungar* **40** (1982), 65–71.
6. J. Beck, On a generalization of Kaplansky's game. *Discrete Mathematics* **42** (1982) 27–35.
7. J. Beck, Random graphs and positional games on the complete graph. *Annals of Discrete Mathematics* **28**(1985), 7–13.
8. J. Beck, An algorithmic approach to the Lovász Local Lemma. I. *Random Structures and Algorithms* **2** (1991), 343–365.
9. J. Beck, Deterministic graph games and a probabilistic intuition. *Combinatorics, Probability and Computing* **3** (1994), 13–26.
10. J. Beck, Positional games and the second moment method. *Combinatorica* **22** (2) (2002) 169–216.

11. J. Beck, Tic-Tac-Toe. Contemporary combinatorics, 93–137, *Bolyai Soc. Math. Stud.*, **10**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

12. J. Beck, Positional Games. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005), 649–696.

13. J. Beck, *Lecture notes, Rutgers University* New Brunswick 1993.

14. J. Beck, *Tic-Tac-Toe Theory.* Cambridge University Press (2006).

15. M. Bednarska, and T. Łuczak, Biased positional games and the phase transition. *Random Structures and Algorithms* **18** (2001), no. 2, 141–152.

16. E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways For Your Mathematical Plays*, Volume **2**. Academic Press, New York 1982.

17. J. M. Byskov, Maker-Maker and Maker-Breaker Games are PSPACE-complete. *Technical Report, BRICS Research Series* RS-04-14, Dept. Comp. Sci., Univ. Aarhus, August 2004.

18. V. Chvátal and P. Erdős, Biased positional games. Algorithmic aspects of combinatorics (Conf., Vancouver Island, B.C., 1976). *Annals of Discrete Mathematics* **2** (1978), 221–229.

19. J. H. Conway, *On numbers and games.* London Mathematical Society Monographs, No. 6. Academic Press, London-New York, 1976.

20. B. Csákány, A form of the Zermelo-von Neumann theorem under minimal assumptions. *Acta Cybernetica* **15** (2002), no. 3, 321–325.

21. A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games. *közlésre benyújtva.*

22. L. Csirmaz, On a combinatorial game with an application to Go-Moku. *Discrete Mathematics* **29** (1980), 19–23.

23. P. Erdős and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. in: *Infinite and Finite Sets eds.: A. Hajnal et al., Colloq. Math. Soc. J. Bolyai,* **11**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 609–627.

24. P. Erdős and J. L. Selfridge, On a combinatorial game. *Journal of Combinatorial Theory Series A* **14** (1973), 298–301.

25. S. Even and R. E. Tarjan, A combinatorial problem which is complete in polynomial space. *J. Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976), no. 4, 710–719.

26. D. Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *American Mathematical Monthly* **86** (1979), no. 10, 818–827.

27. M. Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon an Schuster Inc., New York 1959.

28. M. Gardner, Mathematical Games. *Scientific American* **225** #2 (Aug. 1971) 102-105; **232** #6 (June 1975) 106-111; **233** #6 (Dec. 1975) 116-119; **240** #4 (Apr. 1979) 18-28.

29. M. R. Garey, D. S. Johnson, and R. L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete Problems. *Proc 6th ACM Symposium on the Theory of Computation*, 1974, pp. 47–63.

30. R. K. Guy and J. L. Selfridge, Problem S. 10, *American Mathematical Monthly* **86** (1979); solution T. G. L. Zetters **87** (1980) 575-576.

31. A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games. *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222–229; M.R. # 1265.

32. M. Hall Jr., Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 922–926.

33. C. Hartman, `http://www.cs.uaf.edu/ hartman/pouzethex.pdf`, letöltés: 2006, augusztus 2.

34. P. Hein, Vil de lære Polygon? Politiken newspaper, Denmark, 26 December 1942.

35. R. Hochberg, C. McDiarmid and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles. *Discrete Mathematics* **138** (1995) 261–265.

36. A. Hoffman, személyes közlés.

37. M. Kutz, Weak Positional Games on Hypergraphs of Rank Three. *PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2004.*

38. J. Lagarias and D. Sleator, Who wins Misère Hex? In Elwyn Berlekamp and Tom Rodgers (eds): *The Mathemagician and Pied Puzzler*, pages 237–240. A. K. Peters, 1999.

39. A. Lehman, A solution of the Shannon switching game. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **12** 1964 687–725.

40. L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. A magyar nyelvű változat: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex kiadó, 1999.

41. K. Noshita, Union-Connections and Straightforward Winning Strategies in Hex. *ICGA Journal*, 2005 28(1): cover, 3–12.

42. O. Patashnik, Qubic: $4\times4\times4$ tic-tac-toe. *Mathematical Magazine* **53** (1980), no. 4, 202–216.

43. Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield and D. B. Wilson, Random-turn Hex an other Selection Games. arXiv:math.PR/0508580 v2 26 Apr 2006

44. A. Pluhár, *Positional Games on the Infinite Chessboard* Ph.D. dissertation, Rutgers University 1994.

45. A. Pluhár, Generalized Harary Games. *Acta Cybernetica* **13** no. 1, (1997) 77–83.

46. A. Pluhár, The accelerated k-in-a-row game. *Theoretical Computer Science* **270** (2002), no. 1-2, 865–875.

47. A. Pluhár, The Recycled Kaplansky's Game. *Acta Cybernetica* **16** no. 3, (2004) 451–458.

48. S. Reisch, Hex ist PSPACE-vollständig. *Acta Informatica* **15** (1981), no. 2, 167–191.

49. N. Sieben, Hexagonal polyomino weak $(1, 2)$-achievement games. *Acta Cybernetica* **16** (2004), no. 4, 579–585.

50. J. Spencer, Randomization, derandomization and antirandomization: three games. *Theoretical Computer Science* **131** (1994), no. 2, 415–429.

51. M. Stojaković and T. Szabó, Positional Games on Random Graphs. *Random Structures and Algorithms* **26** (2005), no. 1-2, 204–223.

52. L. A. Székely, On two concepts of discrepancy in a class of combinatorial games. *Finite and Infinite Sets, Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Vol. **37**, North-Holland, 1984, 679–683.

53. H. Whitney, On the Abstract Properties of Linear Dependence. *American Journal of Mathematics* **57** (1935), no. 3, 509–533.

POSITIONAL GAMES

In the Introduction we define the Positional (or Hypergraph) Games, and the most basic facts (Zermelo-von Neumann theorem, the Strategy Stealing argument) concerning those. A few examples are also listed, such as the Tic-Tac-Toe, the Tic-Toc-Tac-Toe, the 5-in-a-row, and its generalization the k-in-a-row. Formally a Positional Game is defined as follows. Given an arbitrary hypergraph $\mathcal{F} = (V, \mathcal{F})$, the first and second players take elements of V in turns. The player, who takes all elements of an edge $A \in \mathcal{F}$ first wins the game. In the second section (Topology) we mainly deal with the game of hex, the hex theorem and its relatives. There is no draw in hex, and this fact is equivalent to the Brouwer fixed point theorem, the Pouzet lemma, or that the y-game also cannot end in a draw. The central result of the third section (Pairing and Matroids) is the Hales-Jewett theorem. It comes from the classical Kőnig-Hall theorem and the main consequences of it are the bounds on the Hales-Jewett games. There are natural generalizations of pairing strategies; one is the divisions of the board into pieces that can be used in the k-in-a-row games. The other is a *dynamic pairing* that is based on matroids and gives Lehman's theorem. The fourth section (The probabilistic method and weight functions) are devoted to the variants of the Erdös-Selfridge theorem. The main issue is how to turn random graph/hypergraph arguments into deterministic strategies. Here we discuss Maker-Breaker and Picker-Chooser games, biased games, games defined on the complete graph K_n or even on the random space $G(n, p)$. At the end of the section we mention some problems involving infinite hypergraphs; those are the Kaplansky's game, and its variants/derivatives. Finally we provide a list of open research problems.