REDUNDANCIA KOOPERATÍV JÁTÉKOK MEGOLDÁSAIBAN I: A MAG ÉS A SZŰKMAG[1]

SOLYMOSI TAMÁS
Budapesti Corvinus Egyetem

1 Bevezetés, alapfogalmak

A kooperatív játékok az olyan többszereplős döntési helyzetek matematikai modelljei, amelyekben a szereplők együttműködhetnek egymással, ha az számukra előnyös. Mint minden a játékelmélet eszközeivel vizsgált helyzetben, a szereplők itt is szuverén döntéshozók, akik csak részleges befolyással bírnak a helyzet kimenetelére, ugyanakkor —a többi szereplő döntésétől való függés keretein belül— képesek a saját érdekeik érvényesítésére, például úgy, hogy nem vesznek részt egy számukra nem kedvező együttműködésben.

Az elemzéshez használt modellek fontos sajátossága az, hogy nem részletezik a játék időbeli lefolyását, a szereplők döntési lehetőségeit, az információk elérhetőségét, az alkufolyamatokat, hanem csak az egyes társulások által elérhető kimeneteleket adják meg. Jelentős mértékben megkönnyíti a kooperatív döntési helyzet modellezését és vizsgálatát, ha az elérhető kimeneteleknek van egy olyan tetszőlegesen osztható és a szereplők között átvihető eleme, ami egy minden szereplő számára azonos megítélési skálát adhat. Ilyen esetben ugyanis ezen az egységes skálán mérhetjük az egyes társulások együttműködési potenciálját. Jelen dolgozatban csak ilyen kooperatív döntési helyzetekkel foglalkozunk, és a feltételezett univerzális érték-közvetítő eszközt *pénz*nek fogjuk hívni. Habár tudjuk jól, hogy a valóságban egy adott pénzmennyiség megszerzése vagy elvesztése nem ugyanazt jelenti egy koldusnak, mint egy milliomosnak, mégis számos esetben jogos a szereplők azonos értékelését feltételezni.

Egy ilyen ,,egy-az-egyben" átváltható egyéni hasznosságokkal rendelkező helyzet matematikai modelljét TU-játéknak (transferable utility game) hívjuk, de a továbbiakban elhagyjuk a TU jelzőt. Egy *játék* alapvetően két összetevőből áll: a játékosok nemüres, véges N halmazából, és egy $v : 2^N \to \mathbb{R}$ koalíciós függvényből, amire az egyetlen megkötés az, hogy $v(\emptyset) = 0$ teljesüljön. A koalíciós függvény tehát a játékosok tetszőleges $S \subseteq N$ *koalíciójára* megadja annak $v(S)$,,értékét" a feltételezett egységes hasznosság-skálán.

[1]Beérkezett: 2008. március 16. Ezen munka a szerző Bolyai János Kutatási Ösztöndíja alatt készült, bemutatását a First Spain Italy Netherlands Meeting on Game Theory (Maastricht, NL, 2005) konferencián az OTKA T46194 pályázat támogatta. Köszönet illeti Biró Pétert a különböző kéziratváltozatok gondos átolvasásáért, pontosító észrevételeiért, és különösen a magra vonatkozó megállapítások élesítését eredményező hasznos javaslataiért. Természetesen a fennmaradó esetleges hibák kizárólag a szerző számlájára írandók (az alábbi címen). E-mail: `tamas.solymosi@uni-corvinus.hu`.

Egy $S \subseteq N$ koalíció *tagsági vektora* alatt azt az $e^S \in \{0,1\}^N$ vektort értjük, amelynek az $i \in S$-hez tartozó komponenseire $e_i^S = 1$, míg az $i \in N \setminus S$-hez tartozó komponenseire $e_i^S = 0$ teljesül. A nemüres koalíciók halmazát $\mathcal{N}$-nel fogjuk jelölni, azaz $\mathcal{N} = 2^N \setminus \{\emptyset\}$, a valódi részkoalíciók halmazát pedig $\mathcal{N}_+$-al, azaz $\mathcal{N}_+ = 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$.

Itt csak olyan döntési helyzetekkel foglalkozunk, amelyekben joggal feltehető, hogy az összes szereplő együttműködik és létrejön az N *nagykoalíció*. Ekkor ugyanis a fő kérdés ,,csak" az, hogy miként részesedjenek az egyes játékosok a közösen elérhető $v(N)$-ből, de nem kell törődnünk a koalíciók formálódásának — az osztozkodáshoz egyébként szorosan kapcsolódó — problémájával.

Az egységes hasznosság-skálán mérve jelölje $x_i \in I\!R$ az $i \in N$ játékos részesedését. Az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy x_i az i játékos *kifizetése*. Az (N,v) játék által leírt kooperatív döntési helyzet egy lehetséges kimenetelét a játékosok kifizetéseit tartalmazó $x = (x_i)_{i \in N} \in I\!R^N$ vektorral adjuk meg, amitől csak azt követeljük meg, hogy *szétosztás*[2] legyen, azaz teljesítse a $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ egyenlőséget[3]. Ez magában foglalja egyrészt a nagykoalíció általi elérhetőséget / megvalósíthatóságot $\big(\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)\big)$, másrészt a nagykoalíció általi elfogadhatóságot $\big(\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)\big)$.

Az itt tárgyalt megoldások abban térnek el egymástól, hogy ezen alaphalmaz elemeire milyen egyéb kívánalmakat rónak ki. Közös bennük viszont az, hogy csak a figyelembe vett koalíciók többletétől függnek. Egy adott (N,v) játékban az $S \subseteq N$ koalíciónak az $x \in I\!R^N$ kifizetésnél vett *többlete* alatt az $e(S,x) = v(S) - x(S)$ számot értjük, ahol $x(S) = e^S \cdot x$ jelöli a koalíciónak jutó összkifizetést. A többlet nemcsak azt jelzi, hogy az adott kifizetés elérhető-e a koalíció számára, hanem mintegy azt is ,,méri", hogy a koalíció mennyire ,,elégedetlen ill. elégedett" (ha a többlet pozitív ill. negatív) a neki jutó összkifizetéssel. Vegyük észre, hogy tetszőleges (N,v) játékban tetszőleges $x \in I\!R^N$ kifizetésnél $e(\emptyset, x) = 0$. A játék lehetséges kimeneteleinek halmaza a többlettel kifejezve:

$$\mathbf{pIm} = \Big\{ x \in I\!R^N : e(N,x) = 0 \Big\} . \tag{1}$$

Állapítsuk meg, hogy a szétosztások halmaza bármely játékban egy hipersík, tehát nem üres.

A szóbajöhető kimenetelekkel szemben támasztott kívánalmak egyik alaptípusa a bizonyos koalíciók általi elfogadhatóság. Azt mondjuk, hogy az (N,v) játékban az $x \in I\!R^N$ kifizetésvektor *elfogadható* az S koalíció számára, ha $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. Egyébként ugyanis az S koalíció x-nél vett $e(S,x)$ többlete pozitív lenne, s ennek szétosztásával úgy kaphatna többet az S mindegyik tagja, hogy összességében nem lépnék túl az általuk elérhető $v(S)$-t, az S tehát megalapozottan utasítaná el az x-et.

Amennyiben az összes egyszereplős koalíció általi elfogadhatóságot előír-

[2] Angolul *preimputation* a leginkább elterjedt szóhasználat.
[3] E követelményt szokás hatékonyságnak / Pareto-optimalitásnak is nevezni.

juk, akkor az

$$\mathbf{Im} = \Big\{x \in \mathbf{pIm} : e(\{i\}, x) \leq 0 \quad \forall i \in N\Big\} \tag{2}$$

halmazba tartozó kifizetésvektorokat tekintjük. Az ilyen kimeneteleket *elosztás*nak[4] nevezzük. Általánosan, ha az elfogadhatóságot megköveteljük egy bizonyos $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ családba tartozó minden koalícióra, akkor a szóbajöhető kimenetelek

$$\mathbf{Co}(\mathcal{B}) = \Big\{x \in \mathbf{pIm} : e(S, x) \leq 0 \quad \forall S \in \mathcal{B}\Big\} \tag{3}$$

halmazát $\mathcal{B}$-*mag*nak hívjuk. Az $\mathcal{N}_+$-magot röviden csak *mag*nak[5] nevezzük, és egyszerűen **Co**-val jelöljük. A $\mathcal{B}$-mag axiomatikus jellemzésével kapcsolatban Pulido és Sánchez-Soriano (2006), illetve Llerena (2007) munkáit említjük.

Dolgozatunkban először azt vizsgáljuk, hogy a $\mathcal{B}$-mag miként függ a figyelembe vett koalíciók $\mathcal{B}$ családjától. Melyek azok a $\mathcal{B}$-beli koalíciók, amelyek elhagyhatók anélkül, hogy a $\mathcal{B}$-mag megváltozna? Cikkében e kérdés fontosságát hangsúlyozza Ray (1989).

2 A $\mathcal{B}$-mag

Ebben a fejezetben is egy rögzített (N, v) játék esetén vizsgáljuk a magkoncepciót, ezért a jelölésekben ezeket a paramétereket nem tüntetjük fel. Továbbra is $\mathcal{N}_+ = 2^N \setminus \{\emptyset, N\}$ jelöli a valódi koalíciók halmazát.

Kezdjük a $\mathcal{B}$-mag nemürességének kérdésével. Legyen a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ koalíciócsalád rögzített. Azt mondjuk, hogy az (N, v) játék $\mathcal{B}$-*kiegyensúlyozott*, ha

$$\Big[\sum_{T \in \mathcal{B}} \gamma_T\, e^T = e^N \; ; \; \gamma_T \geq 0 \quad \forall T \in \mathcal{B}\Big] \implies \sum_{T \in \mathcal{B}} \gamma_T\, v(T) \leq v(N)\ , \tag{4}$$

azaz ha a szétosztandó $v(N)$ nem kevesebb, mint az N bármelyik $\mathcal{B}$-beli koalíciókkal történő kiegyensúlyozott felbontásának az értéke.

A következő állítás a TU-játékokban a mag nemürességét jellemző, a Bondareva (1963), illetve Shapley (1967) nevéhez köthető klasszikus eredmény kézenfekvő általánosítása. Bizonyítását is csak a teljesség kedvéért és a később alkalmazott gondolatmenetek szemléltetése céljából adjuk meg. További általánosításokra vonatkozó hasonló eredmények találhatók Faigle (1989) munkájában.

1. Állítás. *Egy játék $\mathcal{B}$-magja pontosan akkor nem üres, ha a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott.*

Bizonyítás. A (3) definíció alapján a $\mathcal{B}$-mag pontosan akkor nem üres, ha

[4] Angolul *imputation* a leginkább elterjedt szóhasználat.
[5] Angolul *core*.

van lehetséges megoldása az alábbi lineáris programozási feladatnak:

$$\begin{array}{rcl} & \min\ e^{\emptyset}\cdot x & \\ e^{T}\cdot x & \geq & v(T) \quad \forall T\in\mathcal{B} \\ -\,e^{N}\cdot x & = & -v(N) \\ & x\in I\!R^{N}\,. & \end{array} \tag{5}$$

Az azonosan 0 célfüggvény miatt az (5) feladatnak pontosan akkor van lehetséges megoldása, ha van optimális megoldása (amikor persze az optimum értéke 0). A dualitási tétel szerint ez pontosan akkor következik be, ha az (5) feladat duáljának, azaz a

$$\begin{array}{c} \max \sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, v(T) - \mu_N v(N) \\ \sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, e^{T} - \mu_N e^{N} = e^{\emptyset} \\ \lambda_T \geq 0\,, \quad \mu_N \in I\!R\,, \quad \forall T\in\mathcal{B} \end{array} \tag{6}$$

lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása (amikor persze a duál optimumérték is 0).

Mivel a (6) feladat bármely lehetséges megoldásának tetszőleges pozitív skalárszorosa is a (6) egy lehetséges megoldása, így a (6) feladatnak pontosan akkor van optimális megoldása, ha minden nemtriviális $\big((\lambda_T)_{T\in\mathcal{B}},\mu_N\big)$ lehetséges megoldására a célfüggvényérték nempozitív. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott. Egyrészt ugyanis a (6) tetszőleges nemtriviális $\big((\lambda_T)_{T\in\mathcal{B}}\ ,\mu_N\big)$ lehetséges megoldásában $\mu_N>0$ kell legyen, így a $\big(\gamma_T=\frac{\lambda_T}{\mu_N}\big)_{T\in\mathcal{B}}$ egy olyan súlyvektor, amire teljesül a (4) implikáció feltétele. Másrészt, a (4) implikáció feltételét teljesítő tetszőleges $\big(\gamma_T\big)_{T\in\mathcal{B}}$ súlyvektorra a kibővített $\big((\gamma_T)_{T\in\mathcal{B}}\ ,1\big)$ vektor a (6) egy lehetséges megoldása. Harmadrészt pedig a (6) egy lehetséges megoldására a célfüggvényérték nyilvánvalóan pontosan akkor nempozitív, ha a hozzá (kölcsönösen egyértelműen) rendelt súlyvektorra teljesül a (4) implikáció következtetése. □

Legyen a rögzített (N,v) játék $\mathcal{B}$-magja nemüres. Azt mondjuk, hogy az $S\in\mathcal{B}$ koalíció *redundáns a $\mathcal{B}$-magra nézve*, ha $\mathbf{Co}(\mathcal{B}\setminus\{S\})=\mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Mivel nyilván mindig $\mathbf{Co}(\mathcal{B}\setminus\{S\})\supseteq\mathbf{Co}(\mathcal{B})$, egy koalíció akkor redundáns, ha figyelmen kívül hagyása nem változtatja meg a megoldást, újabb kifizetésvektorok nem kerülnek a magba.

A redundancia jellemzésében kulcsszerepet játszik egy, a (6)-hoz nagyon hasonló feladattípus. Valójában csak a feltételi egyenletrendszer jobb oldalát változtatjuk a nullvektorról az adott koalíció tagsági vektorára. Tetszőleges $S\subseteq N$-re és $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{N}_+$-ra jelölje $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ az alábbi lineáris programozási feladatot:

$$\mathrm{LP}(S,\mathcal{B}): \qquad \begin{aligned} &\max \sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, v(T) - \mu_N v(N) \\ &\sum_{T\in\mathcal{B}} \lambda_T\, e^T - \mu_N e^N = e^S \\ &\lambda_T \geq 0\,, \quad \mu_N \in I\!R\,, \quad \forall T \in \mathcal{B} \end{aligned} \tag{7}$$

Az $S \neq N$ koalíció egy *gyenge felbontása* alatt az $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ egy olyan lehetséges megoldását értjük, amelyben $\lambda_S = 0$. Amennyiben a $\mu_N = 0$ is teljesül (vegyük észre, hogy minden lehetséges megoldásban $\mu_N \geq 0$), akkor a gyenge jelzőt elhagyhatjuk. Az S egy *felbontása* tehát csak az S valódi részhalmazaiból állhat. Az $N \notin \mathcal{B}$ miatt a nagykoalíció gyenge felbontásáról nem beszélhetünk, felbontásáról viszont igen, lásd a (4) implikáció feltételét. Az N felbontásai tehát pontosan megfeleltethetők a $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott koalíció-családoknak.

Fontos a következő észrevétel.

2. Megjegyzés. Bármely $S \neq \emptyset$ koalícióra, ha az $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$-nek van lehetséges megoldása, akkor van optimális megoldása is, hiszen a célfüggvénye csak egy olyan lehetséges félegyenes mentén tarthatna a $+\infty$-be, amelyik egy lehetséges félegyenes az $\mathrm{LP}(\emptyset,\mathcal{B})$ feladatban is, de mivel a két célfüggvény azonos, ez ellentmondana a $\mathcal{B}$-mag feltételezett nemürességének, ugyanis a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozottságának eldöntését lehetővé tevő, homogén feltételrendszerű (6) feladat éppen az $\mathrm{LP}(\emptyset,\mathcal{B})$. (Ez a feladat egyébként más megoldási koncepciók vizsgálatánál is hasznos, erre vonatkozóan lásd Derks és Reijnierse (1998) cikkét.)

Jelölje $\max \mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ az $\mathrm{LP}(S,\mathcal{B})$ feladat optimumértékét, illetve legyen $\max \mathrm{LP}(S,\mathcal{B}) = -\infty$, ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása.

3. Állítás. *Egy $S \in \mathcal{B}$ koalíció pontosan akkor redundáns a játék nemüres $\mathcal{B}$-magjára nézve, ha $v(S) \leq \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$.*

Bizonyítás. Legyen a játék $\mathcal{B}$-magja nemüres. Ekkor nyilván a $\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$-mag sem üres. Tekintsük az $\mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$ duálját:

$$\begin{aligned} &\min\ e^S \cdot x \\ e^T \cdot x \quad &\geq \quad v(T) \quad \forall T \in \mathcal{B} \setminus \{S\} \\ -\, e^N \cdot x \quad &= \quad -v(N) \\ &x \in I\!R^N\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Itt a lehetséges megoldások halmaza éppen (a nemüres) $\mathbf{Co}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$. Az S tehát pontosan akkor redundáns a $\mathcal{B}$-magra nézve, ha a (8) feladat minden lehetséges megoldására az $e^S \cdot x \geq v(S)$ egyenlőtlenség is teljesül. Ez viszont ekvivalens azzal, hogy a minimum is $\geq v(S)$, és a dualitás tétel miatt azzal is, hogy $\max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big) \geq v(S)$. □

A fentiekből következik, hogy egy koalíciónak a $\mathcal{B}$-magra való redundanciája eldönthető egy $|\mathcal{B}|$-változós, $|N|$-feltételes lineáris programozási feladat megoldásával.

A 3. állítás szerint a nemüres $\mathcal{B}$-magra nézve redundáns koalíciók pontosan a *gyengén $\mathcal{B}$-majorálható* koalíciók, vagyis azok, amelyeknek van az értéküket elérő vagy azt meghaladó értékű $\mathcal{B}$-beli gyenge felbontásuk. A gyengén nem $\mathcal{B}$-majorálható (vagyis a $\mathcal{B}$-magra nézve nem redundáns) koalíciókra azt mondjuk, hogy *erősen alapvető*ek[6] a $\mathcal{B}$-ben. Jelölje $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$ ezek halmazát, azaz legyen

$$\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \Big\{S \in \mathcal{B} : v(S) > \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)\Big\}\,. \tag{9}$$

Definiáljuk továbbá az

$$\mathcal{SVH}(\mathcal{B}) = \Big\{S \in \mathcal{B} : v(S) \geq \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)\Big\}\,.$$

koalíciócsaládot.

A 3. állítás bizonyításából világos, hogy a $\mathcal{B}$-ben erősen alapvető koalíciókon kívül a

$$\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \Big\{S \in \mathcal{B} : v(S) = \max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)\Big\}$$

halmazbeli koalíciókhoz tartozó $e^S \cdot x \geq v(S)$ félterek is támaszfélterei a $\mathcal{B}$-magnak, hiszen ilyenkor a (8) feladatnak van optimális megoldása, és ez éppen az $e^S \cdot x = v(S)$ határsíkra esik. Akkor miért redundánsak mégis? A válasz az, hogy egyenként, a többiek megtartása mellett valóban elhagyhatók, de meghatározóvá válhatnak, ha több ilyen redundáns koalíciót is figyelmen kívül hagyunk. A jelenség szemléltetésére nézzük a következő 3-szereplős példát.

4. Példa. Legyen $N = \{1,2,3\}$, a koalíciós függvény pedig $v(S) = |S|$ minden $S \subseteq N$-re.

Legyen először $\mathcal{B} = \mathcal{N}_+$. A mag egyetlen eleme az $(1,1,1)$ szétosztás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \emptyset$ és $\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Például, $v(\overline{1}) = v(\overline{12}) + v(\overline{13}) - v(\overline{123}) = \max \mathrm{LP}(\overline{1}, \mathcal{B} \setminus \{\overline{1}\})$, illetve $v(\overline{12}) = v(\overline{1}) + v(\overline{2}) = \max \mathrm{LP}\big(\overline{12}, \mathcal{B} \setminus \{\overline{12}\}\big)$.

Másodszor, legyen $\mathcal{B} = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}\}$. A $\mathcal{B}$-mag egyetlen eleme továbbra is az $(1,1,1)$ szétosztás. Ugyanakkor most már $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ és $\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \emptyset$, vagyis az egyszereplős koalíciók elhagyása után erősen alapvetővé váltak az addig redundáns kétszereplős koalíciók.

Jelölje $\max \mathrm{LP}_0(S, \mathcal{B})$ annak az $\mathrm{LP}_0(S, \mathcal{B})$ feladatnak az optimumértékét, amelyet az $\mathrm{LP}(S, \mathcal{B})$ feladatból a $\mu_N = 0$ feltétel hozzáadásával (másképpen, a μ_N változó elhagyásával) kapunk. Most is legyen $\max \mathrm{LP}_0(S, \mathcal{B}) = -\infty$, ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása. A

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \Big\{S \in \mathcal{B} \cup \{N\} : v(S) > \max \mathrm{LP}_0\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)\Big\} \tag{10}$$

[6] Angolul *strongly vital*, de az elnevezés új.

halmazba tartozó koalíciókra azt mondjuk, hogy *alapvetőek*[7] a $\mathcal{B}$-ben. Vegyük észre, hogy $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, mert minden a tartalmazásra nézve minimális $\mathcal{B}$-beli koalíció alapvető $\mathcal{B}$-ben, hiszen a megfelelő (10)-beli LP_0-nak nincs lehetséges megoldása. Továbbá $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{B})$, hisz nyilvánvalóan $\max \mathrm{LP} \geq \max \mathrm{LP}_0$. A 4. példabeli első esetben $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \emptyset \subset \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \mathcal{V}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, tehát az erősen alapvető koalíciók halmaza lehet üres is, a tartalmazások pedig szigorúak. A második esetben viszont $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \mathcal{V}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

5. Megjegyzés. Az 1. állítás bizonyításából világos, hogy egy játék $\mathcal{B}$-magja pontosan akkor nem üres, ha $v(N) \geq \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big)$. Tehát, ha a $\mathcal{B}$-mag nem üres, de az N nagykoalíció nem alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor egyrészt $v(N) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \gamma_T \, v(T)$ valamilyen pozitív γ_T súlyokkal kiegyensúlyozott $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B} \setminus \{N\}$ koalíciócsaládra, másrészt az N akármelyik ilyen majorálásában szereplő bármelyik T koalíció kifizetése konstans a $\mathcal{B}$-magon. Pontosabban, $e^T \cdot x = v(T)$ tetszőleges $x \in \mathbf{Co}(\mathcal{B})$-re, ugyanis a

$$v(N) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \gamma_T \, v(T) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \gamma_T \, e^T \cdot x = e^N \cdot x = v(N)$$

láncban szereplő egyenlőtlenségnek, sőt az összegzésben szereplő mindegyik $v(T) \leq e^T \cdot x$ tag-egyenlőtlenségnek is egyenlőségként kell teljesülnie.

Az eddig bevezetett fogalmak szemléltetésére nézzük a következő 4-szereplős példát.

6. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, a koalíciós függvény pedig $v(\overline{12}) = 0$, $v(\overline{23}) = 6$, $v(\overline{24}) = 6$, $v(\overline{34}) = 6$, $v(\overline{123}) = 6$, $v(\overline{124}) = 6$, $v(\overline{134}) = 7$, $v(\overline{234}) = 9$, $v(N) = 10$, és $v(T) = 0$ minden egyéb T koalícióra.

Tekintsük a koalíciók $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{34}, \overline{134}, \overline{234}\} \subset \mathcal{N}_+$ családját. Az *1. táblázatban* feltüntettük ezen koalíciók besorolását, illetve a koalíció értékének összevetését a megfelelő LP egy-egy maximális értékű megoldásával is.

S	$v(S)$	$\mathcal{V}(\mathcal{B})$	$\mathcal{SV}(\mathcal{B})$	$\mathcal{H}(\mathcal{B})$	$\max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$
$\overline{1}$	0	$+$	$+$	$-$	$v(\overline{1}) > v(\overline{12}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{2}$	0	$+$	$-$	$-$	$v(\overline{2}) < v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{3}$	0	$+$	$-$	$-$	$v(\overline{3}) < v(\overline{23}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{4}$	0	$+$	$-$	$-$	$v(\overline{4}) < v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{12}$	0	$-$	$-$	$-$	$v(\overline{12}) < 2v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{23}$	6	$+$	$+$	$-$	$v(\overline{23}) > v(\overline{2}) + v(\overline{3})$
$\overline{24}$	6	$+$	$+$	$-$	$v(\overline{24}) > v(\overline{2}) + v(\overline{4})$
$\overline{34}$	6	$+$	$-$	$+$	$v(\overline{34}) = v(\overline{134}) + v(\overline{234}) - v(N)$
$\overline{134}$	7	$+$	$+$	$-$	$v(\overline{134}) > v(\overline{1}) + v(\overline{34})$
$\overline{234}$	9	$-$	$-$	$+$	$v(\overline{234}) = \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{34})$

1. táblázat

[7] Angolul *vital*.

Minden lehetséges típusra akad példa, a $(+,+,+)$, $(-,+,+)$ és $(-,+,-)$ kombinációk ugyanis nyilván nem fordulhatnak elő. Az $\overline{12}$ nem alapvető és nem is $\mathcal{SVH}$-beli, mert $v(\overline{12}) = v(\overline{1}) + v(\overline{2}) = \max \mathrm{LP}_0 < \max \mathrm{LP}$. A $\overline{234}$ sem alapvető, viszont $\mathcal{H}$-beli, ugyanis $v(\overline{234}) = \max \mathrm{LP}_0 = \max \mathrm{LP}$. Említést érdemel még az alapvető és $\mathcal{H}$-beli (és így nem erősen alapvető) $\overline{34}$ koalíció is, amire $\max \mathrm{LP}_0 < v(\overline{34}) = \max \mathrm{LP}$. Megjegyezzük, hogy mindkét $\mathcal{H}$-beli koalíciónak van maximális értékű, csak $\mathcal{SV}$-beli koalíciókkal történő gyenge majorálása is, hiszen a táblázatban megadottakon kívül $v(\overline{34}) = v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + 2v(\overline{134}) - 2v(N)$, illetve $v(\overline{234}) = v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$ is teljesül.

Az N alapvető a $\mathcal{B}$-re nézve, hiszen $v(N) = 10 > 9.5 = \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big) = \frac{1}{2}v(\overline{1}) + \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{134})$. A játék $\mathcal{B}$-magja tehát nem üres (lásd az 5. megjegyzést), sőt maximális-dimenziós, mivel csúcspontjai az affin független $(1,3,3,3)$, $(0,2,4,4)$, $(0,3,3,4)$, $(0,3,4,3)$ szétosztások.

Vizsgálatainkban fontos szerepet játszanak majd a következő észrevételek.

7. Lemma. *Legyen a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott és $S \in \mathcal{B}$ tetszőleges. Ekkor*

(i) $S \notin \mathcal{V}(\mathcal{B})$ esetén $\mathcal{V}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{V}(\mathcal{B})$;

(ii) $S \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ esetén $\mathcal{SVH}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ és $\mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SV}(\mathcal{B})$;

(iii) $S \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ esetén $\mathcal{SVH}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \setminus \{S\}$;

(iv) ha N alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor $S \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ esetén $\mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big) = \mathcal{SV}(\mathcal{B})$.

Bizonyítás. Először a (iv) kijelentést igazoljuk. Azért, hogy gondolatmenetünkből a többi kijelentés is könnyen adódjon, a $v(N) > \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big)$ feltevéssel majd csak akkor élünk, ha elengedhetetlenül szükséges. Addig csak egy tetszőleges $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékot feltételezünk. Mivel a nagykoalíción kívül előforduló összes koalíció $\mathcal{B}$-beli, így az átláthatóság kedvéért ezt csak a feltétlenül szükséges esetekben tüntetjük fel.

Legyen az $S \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ tetszőlegesen rögzített. Ekkor az $\mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$ feladatnak van olyan $\big((\lambda_R)_{R \neq S}, \mu_N\big)$ optimális megoldása, amire

$$v(S) \leq \sum_{R \neq S} \lambda_R v(R) - \mu_N v(N)\ . \tag{11}$$

Mivel bármely $T \in \mathcal{B}$-re nyilván $\max \mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B} \setminus \{T\}\big) \geq \max \mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B} \setminus \{S,T\}\big)$, így ha $T \in \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ akkor $T \in \mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$. Kapjuk tehát, hogy $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$.

A fordított irányú tartalmazás belátásához tegyük fel, hogy $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ és persze $T \neq S$ (ha nincs két különböző nem erősen alapvető koalíció $\mathcal{B}$-ben, akkor nincs mit igazolni). Ekkor van olyan $\big((\alpha_R)_{R \neq T}, \beta_N\big)$ optimális megoldása az $\mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B} \setminus \{T\}\big)$ feladatnak, amire

$$v(T) \leq \alpha_S v(S) + \sum_{R \neq S,T} \alpha_R v(R) - \beta_N v(N)\ . \tag{12}$$

Két eset lehetséges.

1. Ha $\alpha_S = 0$, akkor $T \notin \mathcal{SV}\big(\mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$, vagyis a T nem erősen alapvető a $\mathcal{B} \setminus \{S\}$ koalíciócsaládban sem.

2. Ha viszont $\alpha_S > 0$, akkor a (11) egyenlőtlenség α_S-szeresét a (12) egyenlőtlenségbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$(1-\alpha_S\lambda_T)v(T) \leq \sum_{R\neq S,T} (\alpha_R+\alpha_S\lambda_R)v(R)-(\beta_N+\alpha_S\mu_N)v(N)\ . \quad (13)$$

Természetesen, a megfelelő felbontásokkal ugyanezt a műveletet elvégezve a tagsági vektorok közötti analóg összefüggés egyenlőségként teljesül. Két aleset lehetséges.

(i) Ha $1-\alpha_S\lambda_T > 0$, akkor a (13) egyenlőtlenséget ezzel leosztva kapunk egy olyan lehetséges megoldását az $\mathrm{LP}\big(T, \mathcal{B}\setminus\{S,T\}\big)$ feladatnak, amire a célfüggvény értéke legalább $v(T)$. Tehát a T nem erősen alapvető a $\mathcal{B} \setminus \{S\}$ koalíciócsaládban sem.

(ii) Ha viszont $1-\alpha_S\lambda_T \leq 0$, akkor a (13) egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk a

$$(\beta_N+\alpha_S\mu_N)v(N) \leq (\alpha_S\lambda_T-1)v(T) + \sum_{R\neq S,T} (\alpha_R+\alpha_S\lambda_R)v(R) \quad (14)$$

összefüggést, amiben a koalíciós értékek súlyai már mind nemnegatívak. A bal oldalon a $v(N)$ együtthatója csak $\mu_N = \beta_N = 0$ esetben lehetne nulla, de ekkor egyrészt az α_S feltételezett pozitivitása és az $\mathrm{LP}_0\big(T, \mathcal{B}\setminus\{T\}\big)$ feltételrendszerében szereplő tagsági vektorok nemnegativitása miatt $S \subset T$, másrészt a feltételezett $\lambda_T \geq 1/\alpha_S$ pozitivitása és az $\mathrm{LP}_0\big(S, \mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$ feltételrendszerében szereplő tagsági vektorok nemnegativitása miatt $T \subset S$ kellene legyen, ami egyszerre nyilván lehetetlen. A (14) egyenlőtlenséget leosztva a pozitív $(\beta_N+\alpha_S\mu_N)$-nel kapunk egy olyan lehetséges megoldását az $\mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B}\setminus\{S,N\}\big)$ feladatnak, amire a célfüggvény értéke legalább $v(N)$. Kapjuk, hogy

$$v(N) \leq \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B}\setminus\{S,N\}\big) \leq \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B}\setminus\{N\}\big) \leq v(N)\ , \quad (15)$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozottsága miatt igaz. A (15)-beli mindegyik egyenlőtlenségnek tehát egyenlőségként kell teljesülnie. A (iv) kijelentés feltétele viszont ezt kizárja, így ilyen játékokban ez az aleset nem fordulhat elő.

Több (al)eset nem lévén a (iv) kijelentés bizonyítása ezzel kész.

A (iii) kijelentés nagyon hasonlóan igazolható. Egyrészt, nyilván $\mathcal{SVH}(\mathcal{B})\setminus\{S\} \subseteq \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$. Másrészt, legyen $S \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ és $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$. Ekkor $T \neq S$, a (11) egyenlőségként, a (12) viszont szigorú egyenlőtlenségként teljesül. Ha a (12)-ben $\alpha_S = 0$, akkor $T \notin \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}\setminus\{S\}\big)$. Ha viszont

$\alpha_S > 0$, akkor a fenti gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy a (13) is szigorú egyenlőtlenségként áll fenn. A 2(i) alesetben azt kapjuk, hogy $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$. A 2(ii) aleset pedig a (14), illetve a (15)-beli első egyenlőtlenség szigorú volta miatt zárható ki (bármilyen $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékban).

A (ii) kijelentés igazolása teljesen hasonló. Egyrészt nyilván $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$ és $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$. A fordított irányú tartalmazások belátásához legyen $S \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$. Tetszőleges $T \neq S$ és $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalícióra fennáll (12), sőt $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$-re szigorú egyenlőtlenségként, így $\alpha_S = 0$ mellett adódik a kívánt $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$, sőt az utóbbi esetben a $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$ is. Ha viszont $\alpha_S > 0$, akkor a most szigorú egyenlőtlenségként teljesülő (11) behelyettesítéséből azt kapjuk, hogy a (13) is szigorú egyenlőtlenségként áll fenn. Innen már tetszőleges $T \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalícióra az adódik a 2(i) alesetben, hogy $T \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B} \setminus \{S\}) \supseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B} \setminus \{S\})$. A 2(ii) aleset most is a (14), illetve a (15)-beli első egyenlőtlenség szigorú volta miatt zárható ki (bármilyen $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékban).

Az (i) kijelentés is könnyen adódik a fenti gondolatmenetből, hiszen $S, T \notin \mathcal{V}(\mathcal{B})$ esetén feltehető, hogy a (11) majorálásban $\mu_N = 0$, illetve a (12) majorálásban $\beta_N = 0$. Másképpen fogalmazva, az említett LP feladatok helyett vehetjük a megfelelő LP_0 feladatokat, ugyanakkor a megállapításokban az „erősen alapvető"-t nyilván „alapvető"-re kell cseréljük. A 2(ii) aleset kizárásához ekkor nincs szükség a játékra tett semmilyen feltételre, hiszen amint azt ott már meggondoltuk, $\mu_N = \beta_N = 0$ esetén α_S és λ_T egyszerre pozitív nem lehet. □

A 7. lemmabeli megállapítások szemléltetésére vegyük a következő játékot.

8. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, a koalíciós függvény pedig $v(\overline{12}) = 4$, $v(\overline{23}) = 6$, $v(\overline{24}) = 6$, $v(\overline{34}) = 2$, $v(\overline{123}) = 6$, $v(\overline{124}) = 6$, $v(\overline{134}) = 4$, $v(\overline{234}) = 7$, $v(\overline{1234}) = 8$, és $v(T) = 0$ minden egyéb T koalícióra.

Tekintsük a koalíciók $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{34}, \overline{134}, \overline{234}\} \subset \mathcal{N}_+$ családját. A játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, hiszen teljesül rá a (4) alatti implikáció. Továbbá, mivel $v(N) = 8 = \frac{1}{2}v(\overline{1}) + \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{134}) = \max \mathrm{LP}_0(N, \mathcal{B} \setminus \{N\})$, minden $\mathcal{B}$-magbeli kifizetésre teljesülnie kell az $x(\overline{1}) = 0 = v(\overline{1})$, $x(\overline{23}) = 6 = v(\overline{23})$, $x(\overline{24}) = 6 = v(\overline{24})$, $x(\overline{134}) = 4 = v(\overline{134})$ egyenlőségeknek (lásd az 5. megjegyzést). Sőt, mivel az $\mathrm{LP}_0(N, \mathcal{B} \setminus \{N\})$-nek maximumát adja az $\frac{1}{3}v(\overline{12}) + \frac{1}{3}v(\overline{23}) + \frac{1}{3}v(\overline{24}) + \frac{2}{3}v(\overline{134})$ felbontás is, a $\mathcal{B}$-mag minden elemére teljesülnie kell még az $x(\overline{12}) = 4 = v(\overline{12})$ egyenlőségnek is. Ennek az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, így a játék $\mathcal{B}$-magja az egyetlen $(0, 4, 2, 2)$ szétosztásból áll.

A *2. táblázatban* feltüntettük a $\mathcal{B}$-beli koalíciók besorolását, illetve a koalíció értékének összevetését a megfelelő LP egy-egy maximális értékű megoldásával is.

S	$v(S)$	$\mathcal{V}(\mathcal{B})$	$\mathcal{SV}(\mathcal{B})$	$\mathcal{H}(\mathcal{B})$	$\max \mathrm{LP}\big(S, \mathcal{B} \setminus \{S\}\big)$
$\overline{1}$	0	+	−	+	$v(\overline{1}) = v(\overline{12}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{2}$	0	+	−	−	$v(\overline{2}) < v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{3}$	0	+	−	−	$v(\overline{3}) < v(\overline{23}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{4}$	0	+	−	−	$v(\overline{4}) < v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$
$\overline{12}$	4	+	−	+	$v(\overline{12}) = 2v(\overline{1}) + v(\overline{23}) + v(\overline{24}) - v(N)$
$\overline{23}$	6	+	+	−	$v(\overline{23}) > v(\overline{3}) + v(\overline{12}) + v(\overline{234}) - v(N)$
$\overline{24}$	6	+	+	−	$v(\overline{24}) > v(\overline{4}) + v(\overline{12}) + v(\overline{234}) - v(N)$
$\overline{34}$	2	+	−	−	$v(\overline{34}) < v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + 2v(\overline{134}) - 2v(N)$
$\overline{134}$	4	+	+	−	$v(\overline{134}) > v(\overline{1}) + v(\overline{34})$
$\overline{234}$	7	−	−	−	$v(\overline{234}) < v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + v(\overline{134}) - v(N)$

2. táblázat

A $\mathcal{B}$-ben a $\overline{234}$ koalíció nem alapvető, ugyanis

$$e^{\overline{234}} = \frac{1}{2}e^{\overline{23}} + \frac{1}{2}e^{\overline{24}} + \frac{1}{2}e^{\overline{34}}, \quad \text{és} \quad v(\overline{234}) = \frac{1}{2}v(\overline{23}) + \frac{1}{2}v(\overline{24}) + \frac{1}{2}v(\overline{34}) \,. \tag{16}$$

Ugyanakkor a megfelelő LP_0-k megoldásával könnyen ellenőrizhető, hogy az összes többi koalíció alapvető $\mathcal{B}$-ben. Például, a $\overline{34}$ koalíció alapvető $\mathcal{B}$-ben, hiszen $v(\overline{34}) = 2 > 0 = \max \mathrm{LP}_0(\overline{34}, \mathcal{B} \setminus \{\overline{34}\})$. Ugyanakkor, a $\overline{34}$ nem erősen alapvető $\mathcal{B}$-ben, mert például

$$e^{\overline{34}} = e^{\overline{134}} + e^{\overline{234}} - e^{\overline{1234}}, \quad \text{de} \quad v(\overline{34}) < v(\overline{134}) + v(\overline{234}) - v(\overline{1234}) \,. \tag{17}$$

A megfelelő LP-k megoldásával kapjuk, hogy a $\mathcal{B}$-ben erősen alapvető koalíciók halmaza $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \{\overline{23}, \overline{24}, \overline{134}\}$.

A 7. lemma (i) kijelentése szerint egy nem alapvető koalíció elhagyása nem változtatja meg az alapvető koalíciók halmazát. A $\mathcal{B}$-ben alapvető $\overline{34}$ koalíció például alapvető marad, ha elhagyjuk a nem alapvető $\overline{234}$ koalíciót. Jóllehet a $\overline{34}$ nem erősen alapvető jellegét mutató (17) gyenge majorálásban a $\overline{234}$ is részt vesz, de szerepe kiváltható a nem alapvető jellegét mutató (16) majorálás behelyettesítésével. Vegyük észre, hogy a behelyettesített (16) majorálásban ugyan részt vesz maga a $\overline{34}$ koalíció is, de csak $\frac{1}{2}$ súllyal, ezért a tagsági vektorok egyenleteiből a $\overline{234}$-mentes $e^{\overline{34}} = e^{\overline{23}} + e^{\overline{24}} + 2e^{\overline{134}} - 2e^{\overline{1234}}$ gyenge felbontást kapjuk, ami ráadásul egy a (17)-belinél magasabb értékű (egyébként a maximális értékű, a táblázatban is szereplő)

$$v(\overline{34}) = 2 < 4 = v(\overline{23}) + v(\overline{24}) + 2v(\overline{134}) - 2v(\overline{1234}) \tag{18}$$

gyenge majorálást ad. Ugyanez történne persze, ha egy ilyen majorálást egy majorálásba helyettesítenénk: egy legalább akkora értékű majorálást kapnánk. Az adott nem alapvető koalíció tehát nem válna alapvetővé. Ez az eset egyébként egy példa arra is, amikor egy nem (erősen) alapvető koalíció elhagyása nem változtatja meg egy koalíció nem erősen alapvető jellegét, jóllehet most $v(N) = \max \mathrm{LP}_0\big(N, \mathcal{B} \setminus \{N\}\big)$.

A lemma (ii) kijelentése szerint egy nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíció elhagyása nem változtatja meg sem az $\mathcal{SVH}$, sem az $\mathcal{SV}$ halmazokat. Érdemes ugyanakkor megemlíteni, hogy ilyen esetben az alapvető koalíciók halmaza viszont bővülhet. A 8. példában hagyjuk most el a nem $\mathcal{SVH}(\mathcal{B})$-beli (egyébként $\mathcal{B}$-ben alapvető) $\overline{34}$ koalíciót. A $\mathcal{B}$-ben nem alapvető $\overline{234}$ koalíció a $\mathcal{B}\backslash\{\overline{34}\}$ családban már alapvető, hiszen ezen belül már csak egyetlen felbontása van, mégpedig a $e^{\overline{234}} = e^{\overline{3}} + e^{\overline{24}}$ felbontás, erre viszont $v(\overline{234}) = 7 > 6 = v(\overline{3}) + v(\overline{24})$. A jelenség oka az, hogy a $v(\overline{234})$-nek az egyetlen $\mathcal{B}$-beli majorálása a (16)-beli, de ebbe a $v(\overline{34})$ akármelyik gyenge majorálását helyettesítjük is, már csak gyenge majorálást kapunk. Vagyis csak a $\overline{234}$ nem $\mathcal{SVH}$-beli jellege maradt meg (mert egy nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíciót hagytunk el), de nem alapvető jellege megváltozott.

A 7. lemma (iv) kijelentésében szereplő $v(N) > \max \mathrm{LP}_0(N, \mathcal{B} \setminus \{N\})$ feltétel szükségességének igazolására vegyük ismét a 8. példabeli játékunkat, ahol ez nem teljesül, de azért a $\mathcal{B}$-mag nem üres. Sem az $\overline{1}$, sem az $\overline{12}$ koalíció nem erősen alapvető, viszont mindkettő $\mathcal{H}$-beli, ráadásul szerepelnek egymás maximális értékű gyenge majorálásában (lásd a 2. táblázatot). Ugyanakkor sem az $\mathrm{LP}(\overline{1}, \mathcal{B}\backslash\{\overline{1}, \overline{12}\})$-nek, sem az $\mathrm{LP}(\overline{12}, \mathcal{B}\backslash\{\overline{1}, \overline{12}\})$-nek nincs lehetséges megoldása, tehát az egyik koalíció elhagyása erősen alapvetővé teszi a másikat. Ez egyben példa arra is, hogy egy $\mathcal{H}$-beli koalíció elhagyása esetén az $\mathcal{SV}$ bővülhet, ami a 7. (iv) miatt persze csak „degenerált” $\mathcal{B}$-maggal rendelkező játékban fordulhat elő, és a 7. (ii) szerint ilyenkor is csak olyan módon, hogy egy $\mathcal{H}$-beli koalíció átkerül az $\mathcal{SV}$-be. Ugyanakkor, amint azt a 6. példában az egymás maximális értékű gyenge majorálásában szereplő $\mathcal{H}$-beli $\overline{34}$ és $\overline{234}$ koalíciókkal kapcsolatban láttuk, ha a nemüres $\mathcal{B}$-mag „nemdegenerált”, akkor egy gyenge majorálásban szereplő ugyancsak gyengén majorált koalíció kiküszöbölhető, tehát bármelyik nem erősen alapvető koalíciónak van olyan gyenge majorálása, amelyben már csak erősen alapvető koalíciók szerepelnek. Ilyenkor tehát egy $\mathcal{H}$-beli koalíció elhagyása nem változtat a többi $\mathcal{H}$-beli koalíció státuszán.

A fejezet fő állítása a következő.

9. Tétel. *Legyen a játék $\mathcal{B}$-magja nemüres. Ekkor*

(i) $\mathbf{Co}\big(\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{SVH}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$;

(ii) $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ *minden olyan legszűkebb* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ *koalíciócsaládra, amelyre* $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$;

(iii) ha N alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, *továbbá egyedül* $\mathcal{D} = \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ *a legszűkebb olyan $\mathcal{B}$-beli koalíciócsalád, amelyre* $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$.

Bizonyítás. A 7. lemma segítségével az állítások induktíven könnyen igazolhatók. Először nézzük az (i)-et. Legyen $\mathcal{B} \setminus \mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{S_1, \ldots, S_p\}$ és $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) = \{S_{p+1}, \ldots, S_{p+q}\}$. Természetesen p és/vagy q lehet 0 is. Jelölje $\mathcal{VSVH}$ a $\mathcal{V} \cap \mathcal{SVH}$ metszetet. Hagyjuk el egyenként az S_i koalíciókat, először az $1 \leq i \leq p$ indexűeket valamilyen tetszőleges sorrendben, majd a $p+1 \leq i \leq p+q$ indexűeket önmagukon belül ugyancsak tetszőleges sorrendben. Az egyszerűség kedvéért válasszuk az indexek természetes sorrendjét, azaz legyen $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ és $i = 1, \ldots, p+q$-ra $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{i-1} \setminus \{S_i\}$. Nyilvánvalóan $\mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B})$ és $\mathcal{B}_{p+q} = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B})$.

Az $S_1 \notin \mathcal{V}(\mathcal{B}_0)$ koalícióra nyilván $S_1 \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B}_0)$ is igaz, így a definíciók alapján $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_1) = \mathbf{Co}\big(\mathcal{B}_0 \setminus \{S_1\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_0)$. A 7. lemma (i) miatt $\mathcal{V}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{V}\big(\mathcal{B}_0 \setminus \{S_1\}\big) = \mathcal{V}(\mathcal{B}_0)$, míg a 7. (ii) és (iii) miatt $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}_0 \setminus \{S_1\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_0) \setminus \{S_1\}$, következésképpen $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_0)$. Az alapvető koalíciók halmazának változatlansága miatt ez a gondolatmenet induktívan megismételhető mindaddig, amíg el nem hagyjuk az összes az eredeti $\mathcal{B}$-ben nem alapvető koalíciót. Kapjuk, hogy mindegyik $i = 1, \ldots, p$-re egyrészt $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_i) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_{i-1})$, másrészt $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{i-1})$. Ebből következik, hogy

$$\mathbf{Co}(\mathcal{B}_p) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_p) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}) \,, \tag{19}$$

továbbá, hogy $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p) \subseteq \mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B}_p)$, vagyis a redukált $\mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B})$-ben a $\mathcal{VSVH}$ metszet már azonos az $\mathcal{SVH}$-val.

Folytassuk $i = p+1, \ldots, p+q$-ra az S_i koalíciók elhagyását. Mivel az $S_{p+1} \notin \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p)$ koalícióra $S_{p+1} \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B}_p)$ is igaz, nyilván teljesül a $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathbf{Co}\big(\mathcal{B}_p \setminus \{S_{p+1}\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_p)$ azonosság. Másrészt, a 7. lemma (ii) miatt $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathcal{SVH}\big(\mathcal{B}_p \setminus \{S_{p+1}\}\big) = \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p)$. Mivel most már $\mathcal{B}_p = \mathcal{V}(\mathcal{B}_p)$, nyilván $\mathcal{V}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathcal{V}\big(\mathcal{B}_p \setminus \{S_{p+1}\}\big) = \mathcal{V}(\mathcal{B}_p) \setminus \{S_{p+1}\} = \mathcal{B}_{p+1}$ is fennáll, következésképpen $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{p+1}) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_p)$, vagyis most egy nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíció elhagyása nem változtat a $\mathcal{VSVH}$ metszeten. A nem $\mathcal{SVH}$-beli koalíciók halmazának változatlansága miatt ez a gondolatmenet induktívan megismételhető mindaddig, amíg el nem hagyjuk az összes $\mathcal{B}_p \setminus \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_p)$-beli koalíciót. Kapjuk tehát, hogy mindegyik $i = p+1, \ldots, p+q$-ra egyrészt $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_i) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_{i-1})$, másrészt $\mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{i-1})$. Ebből és (19)-ből következik, hogy

$$\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{p+q}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_p) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}) \,.$$

Figyelembe véve, hogy $\mathcal{B}_{p+q} = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_{p+q}) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B}_p) = \mathcal{VSVH}(\mathcal{B})$, az (i) állítás bizonyítása ezzel kész.

A (ii) állítás nagyon hasonló módon igazolható. Legyen $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ egy tetszőleges legszűkebb olyan koalíciócsalád, amelyre $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B} \setminus \mathcal{D} = \{T_1, \ldots, T_r\}$, ahol a $\mathcal{D}$-n kívüli koalíciók sorrendje tetszőleges. Természetesen r lehet 0 is. Hagyjuk el egyenként a T_j koalíciókat, az egyszerűség kedvéért az indexek természetes sorrendjében. Legyen $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, és $j = 1, \ldots, r$-re $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_{j-1} \setminus \{T_j\}$, tehát $\mathcal{B}_r = \mathcal{D}$.

Mivel nyilván $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{j-1}) \subseteq \mathbf{Co}(\mathcal{B}_j)$ minden $j = 1, \ldots, r$-re, a $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_0) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_r)$ feltevés miatt valójában $\mathbf{Co}(\mathcal{B}_{j-1}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B}_j)$ minden $j = 1, \ldots, r$-re. Ebből következik, hogy $T_j \notin \mathcal{SV}(\mathcal{B}_{j-1})$ minden $j = 1, \ldots, r$-re, hiszen ellenkező esetben a 3. állítás szerint a T_j elhagyásával a mag szigorúan bővülne. Egyrészt, a definíciókból adódóan $\mathcal{SV}(\mathcal{B}_{j-1}) \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B}_j)$, másrészt a 7. (ii) és (iii) megállapításokból következően $\mathcal{SVH}(\mathcal{B}_j) \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B}_{j-1})$ minden $j = 1, \ldots, r$-re. Ezekből következik, hogy

$$\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{D}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{SVH}(\mathcal{B}) \,.$$

Mivel egyetlen $\mathcal{D}$-beli koalíció sem hagyható el anélkül, hogy a mag szigorúan bővülne, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{D})$, vagyis $\mathcal{D} = \mathcal{SV}(\mathcal{D})$ kell legyen, és ezzel a (ii) bizonyítása kész.

A (iii) állítást a (ii) bizonyításával szinte azonos módon igazolhatjuk a 7. lemma (iv) segítségével. Legyen most is $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ egy tetszőleges legszűkebb olyan koalíciócsalád, amelyre $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Legyen megint $\mathcal{B} \setminus \mathcal{D} = \{T_1, \ldots, T_r\}$, továbbá $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ és $j = 1, \ldots, r$-re $\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_{j-1} \setminus \{T_j\}$, tehát $\mathcal{B}_r = \mathcal{D}$. Ha az N alapvető a $\mathcal{B}$-ben, akkor nyilván alapvető marad mindegyik $\mathcal{B}_j$-ben is. A 7. (iv) tehát mindegyik lépésben alkalmazható. Kapjuk, hogy most $\mathcal{SV}(\mathcal{B}_i) = \mathcal{SV}(\mathcal{B}_{i-1})$ minden $i = 1, \ldots, p$-re. Ebből, valamint a $\mathcal{D}$ tartalmazásra minimális voltából pedig adódik, hogy

$$\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \ldots = \mathcal{SV}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}\,. \tag{20}$$

Mivel biztosan van egy olyan legszűkebb $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ koalíciócsalád, amelyre $\mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, kapjuk egyrészt, hogy $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{D}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Másrészt, mivel (20) bármely ilyen $\mathcal{D}$-re fennáll, az $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$ az egyetlen legszűkebb ilyen koalíciócsalád. $\square$

Szemléltetésképpen nézzük ismét a 8. példát. Amint azt ott már megállapítottuk, a $\mathcal{B}$-mag degenerált, egyedül a $(0, 4, 2, 2)$ kifizetés-vektorból áll. Az egyetlen nem alapvető $\overline{234}$ koalíció figyelmen kívül hagyása ezen nem változtat, a $\mathcal{V}(\mathcal{B})$-mag tehát valóban azonos a $\mathcal{B}$-maggal. Ezután a $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$-beli $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ és $\overline{34}$ koalíciók is elhagyhatók, nem szerepelnek sem egymás, sem a többi koalíció gyenge majorálásában. Tehát a $\big(\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{SVH}(\mathcal{B})\big)$-mag is azonos a $\mathcal{B}$-maggal. Itt azonban meg kell álljunk, a $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{H}(\mathcal{B})$-beli $\overline{1}$ és $\overline{12}$ koalíciók közül csak az egyiket törölhetjük, mert ezáltal a másik már erősen alapvetővé válik. Valóban, ha csak az $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$-beli $\overline{23}$, $\overline{24}$ és $\overline{134}$ koalíciókat vesszük figyelembe, akkor egy bővebb magot kapunk: például $(-2t, 4, 2+t, 2+t) \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$ minden $t \geq 0$-ra. Vegyük észre ugyanakkor, hogy mivel tetszőleges $x \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$ kifizetés-vektorban $x_1 \leq 0$ és $x_2 \leq 4$, az erősen alapvető koalíciók kiegészítése akár az $\overline{1} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{B})$, akár az $\overline{12} \in \mathcal{H}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{B})$ koalícióval már egyértelművé teszi a megoldást, vagyis $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \cup \{\overline{1}\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, illetve $\mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B}) \cup \{\overline{12}\}\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$. Tehát degeneráltsága miatt a $\mathcal{B}$-magot ugyan nem határozzák meg teljesen az erősen alapvető koalíciók, de a nem erősen alapvető koalíciók majdnem mindegyike (a $\mathcal{H}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{B})$-beliek kivételével mindegyik) azért elhagyható, csakúgy, mint a nem alapvető koalíciók.

A 9. tétellel kapcsolatban még megjegyezzük, hogy amennyiben az N nem alapvető $\mathcal{B}$-ben, a (degenerált) $\mathcal{B}$-magot meghatározó legszűkebb koalíciócsaládok között lehet(nek) olyan(ok) is, amelyek nem részhalmazai a ($\mathcal{B}$-magot egyébként mindig meghatározó) $\mathcal{V}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{SVH}(\mathcal{B})$ metszetnek. A 4. példában $\mathcal{B} = \mathcal{N}_+$ esetén az egyetlen szétosztást tartalmazó $\mathcal{B}$-mag megegyezik a $\mathcal{D} = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}\}$ koalíciócsalád által meghatározott $\mathcal{D}$-maggal. A $\mathcal{D}$ minimális is, de diszjunkt az alapvető koalíciók $\mathcal{V}(\mathcal{B}) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ családjától. Ez azt is mutatja, hogy az (i) állítás bizonyításában a $\mathcal{VSVH}$ metszeten kívüli koalíciók elhagyásának sorrendje annyiban nem tetszőleges, hogy előbb kell elhagyni az összes nem alapvető koalíciót, csak ezután kerülhetnek sorra a $\mathcal{V} \setminus \mathcal{SVH}$-beli koalíciók.

3 A $\mathcal{B}$-szűkmag

Korábban már láttuk, hogy szétosztások minden játékban vannak, de a $\mathcal{B}$-mag csak akkor nem üres, ha a nagykoalíció értéke „kellően nagy” a figyelembe vett koalíciók alkalmasan súlyozott értékeihez képest, vagyis a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, mert ekkor tudunk minden $\mathcal{B}$-beli koalíciónak nempozitív többletet garantálni. Lássuk mi történik akkor, ha a legnagyobb megengedett többlet szintjét nem rögzítjük le eleve nullára, hanem csak egy relatíve legjobb közös elfogadhatósági küszöböt próbálunk elérni?

Egy tetszőleges (N, v) játék és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ koalíciócsalád esetén a *$\mathcal{B}$-szűkmag* azon szétosztások halmaza, amelyeknél az összes $\mathcal{B}$-beli koalícióra vett legnagyobb többlet a lehető legkisebb, azaz

$$\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \left\{ x \in \mathbf{pIm} \ : \ \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) \leq \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) \right\}. \qquad (21)$$

Az $\mathcal{N}_+$-szűkmagot röviden csak *szűkmag*nak[8] mondjuk. Ezt a megoldási koncepciót Maschler, Peleg és Shapley vizsgálták először 1979-ben megjelent cikkükben. Alapvető megállapításaik könnyen általánosíthatók akármelyik $\mathcal{B}$-szűkmagra (a kézenfekvő bizonyításoktól ezért eltekintünk).

10. Állítás. *Tetszőleges $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_+$ koalíciócsalád és v játék esetén*

(i) $t^* := \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x)$ *egy jól meghatározott valós szám;*

(ii) $\mathbf{LC}(\mathcal{B})$ *nem üres;*

(iii) $\mathbf{Co}(\mathcal{B})$ *üres* $\Leftrightarrow$ $t^* > 0$*;*

(iv) $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, *de az N nem alapvető $\mathcal{B}$-ben* $\Leftrightarrow$ $t^* = 0$*;*

(v) $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ *és az N alapvető $\mathcal{B}$-ben* $\Leftrightarrow$ $t^* < 0$.

Az állítás (iv) és (v) pontjai szerint, ha egy játék $\mathcal{B}$-magja nem üres, akkor a $\mathcal{B}$-szűkmag a $\mathcal{B}$-mag része. Innen származik az elnevezése. A (iv) ponttal kapcsolatban érdemes felidézni az 5. megjegyzést.

A szűkmagra vonatkozó fő állításunk a következő.

11. Tétel. *Ha az N alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor* $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \mathbf{LC}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$.

Bizonyítás. Ha az N alapvető $\mathcal{B}$-ben, akkor a játék $\mathcal{B}$-magja nem üres, így a 9. tétel (iii) megállapítása alapján $\mathbf{Co}(\mathcal{B}) = \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$. A 10. állítás (iv) és (v) pontjai szerint egyrészt $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Co}(\mathcal{B})$, másrészt $\mathbf{LC}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) \subseteq \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big)$. Tehát mind a $\mathcal{B}$-szűkmag, mind az $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$-szűkmag meghatározásában a szétosztások halmaza leszűkíthető a $\mathcal{B}$-magra, ahol már mindegyik

[8] Angolul *least core.*

$\mathcal{B}$-beli koalíció többlete nempozitív. A tétel bizonyításához tehát elegendő azt megmutatni, hogy minden $x \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ esetén $\max_{T\in\mathcal{B}} e(T,x) = \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)$.

Mivel nyilvánvalóan $\max_{T\in\mathcal{B}} e(T,x) \geq \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)$, csak a fordított irányú egyenlőtlenséget kell igazolnunk. Vegyünk tetszőlegesen egy $S \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalíciót. A 7. lemma (iv) pontját iteratívan alkalmazva kapjuk, hogy van olyan $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{SV}(\mathcal{B})$ koalíciócsalád, hogy $\lambda_T > 0$ $(T \in \mathcal{T})$, illetve $\mu_N \geq 0$ súlyokkal egyrészt

$$e^S = \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, e^T - \mu_N\, e^N \ , \tag{22}$$

másrészt

$$v(S) \leq \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, v(T) - \mu_N\, v(N)\ . \tag{23}$$

Ha a (22) felbontást beszorozzuk egy tetszőleges x szétosztással, és a kifizetésekre így kapott $x(S) = \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, x(T) - \mu_N\, x(N)$ egyenletet tagonként kivonjuk a (23) majorálásból, azt kapjuk, hogy

$$e(S,x) \ \leq \ \sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\, e(T,x) \ \leq \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\Big) \max_{T\in\mathcal{T}} e(T,x)\ ,$$

hiszen egyrészt minden x szétosztásra $e(N,x) = 0$, másrészt mindegyik λ_T pozitív.

Mivel $\sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T > 1$ (hiszen $S \notin \mathcal{T}$ miatt a (22) felbontás valódi), adódik, hogy minden $x \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ esetén

$$e(S,x) \ \leq \ \Big(\sum_{T\in\mathcal{T}} \lambda_T\Big) \max_{T\in\mathcal{T}} e(T,x) \ \leq \ \max_{T\in\mathcal{T}} e(T,x) \ \leq \ \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)\ ,$$

vagyis egy nem erősen alapvető koalíció egyetlen $\mathcal{B}$-magbeli szétosztásnál sem lehet egyedüliként a maximális többletű, mindig van egy legalább akkora többlettel rendelkező erősen alapvető koalíció. Tehát valóban minden $x \in \mathbf{Co}\big(\mathcal{SV}(\mathcal{B})\big) = \mathbf{Co}(\mathcal{B})$ esetén $\max_{T\in\mathcal{B}} e(T,x) = \max_{T\in\mathcal{SV}(\mathcal{B})} e(T,x)$. $\square$

Összevetve a 11. tételt a 9. tétel (v) pontjával azt látjuk, hogy ha egy (N,v_1) játék nem elfajult $\mathcal{B}_1$-magja megegyezik egy (N,v_2) játék nem elfajult $\mathcal{B}_2$-magjával, akkor $\mathcal{SV}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{SV}(\mathcal{B}_2)$, s így az (N,v_1) játék $\mathcal{B}_1$-szűkmagja is megegyezik az (N,v_2) játék $\mathcal{B}_2$-szűkmagjával. Figyelembe véve a 10. állítás (iv) pontját is, kijelenthetjük, hogy bármilyen $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott játékban a nemüres $\mathcal{B}$-magot meghatározó koalíciócsaládok a $\mathcal{B}$-szűkmagot is meghatározzák. A $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{N}_+$ esetben ez a megállapítás egy közvetett bizonyítását adja Potters és Tijs (1994) alábbi eredményének.

12. Következmény. *Kiegyensúlyozott játékokban a szűkmag a mag egy mértani helye, vagyis azonos maggal rendelkező bármely két játék szűkmagjai is azonosak.*

A 11. tétellel kapcsolatban még két megjegyzést teszünk. Az első, hogy a szűkmag esetében —ellentétben a maggal, lásd a 9. tétel (iii) pontját— általános érvénnyel akkor sem azonosíthatunk egy, a megoldást meghatározó legszűkebb koalíciócsaládot, ha az N alapvető $\mathcal{B}$-ben. A következő egy olyan 4-szereplős példa, amelyben a hét erősen alapvető koalíció között csak egy olyan van, amelyik tagja mind a nyolc legszűkebb meghatározó koalíciócsaládnak.

13. Példa. Legyen $N = \{1, 2, 3, 4\}$, vegyük a koalíciók $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{123}\} \subset \mathcal{N}_+$ családját, és a koalíciós értékek legyenek:

S	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{34}$	$\overline{123}$	N
$v(S)$	0	0	0	0	8	4	8	8	8	10	18

Az $\overline{123}$ koalíció nem alapvető, mivel $v(\overline{123}) = 10 = \frac{1}{2}v(\overline{12}) + \frac{1}{2}v(\overline{13}) + \frac{1}{2}v(\overline{23})$. Ezen kívül csak az (alapvető) $\overline{1}$ illetve $\overline{3}$ koalíciók nem erősen alapvetőek $\mathcal{B}$-ben, azaz $\mathcal{SV}(\mathcal{B}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{34}\}$.

Mivel $t^* = \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) = -1 < 0$, a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, sőt az N alapvető $\mathcal{B}$-ben. A $\mathcal{B}$-szűkmag a $\mathcal{B}$-mag (alacsonyabb dimenziós) szigorú részhalmaza, hiszen a minimális $t^* = -1$ többletszintet eredményező szétosztásoktól megkövetelt $e(\overline{12}, x) = 8 - x(\overline{12}) \leq -1$ és $e(\overline{34}, x) = 8 - x(\overline{34}) \leq -1$, de $x(\overline{12}) + x(\overline{34}) = 18$ rendszer minden megoldásában $x(\overline{12}) = 9$ és $x(\overline{34}) = 9$ kell teljesüljön (vö. 5. megjegyzés). Hasonló ok miatt végig konstans $t^* = -1$ a $\mathcal{B}$-szűkmagon az $\overline{14}$ illetve $\overline{23}$ koalíciók többlete. Az $x(\overline{12}) = 9$, $x(\overline{34}) = 9$, $x(\overline{14}) = 9$ és $x(\overline{23}) = 9$ egyenletrendszer minden megoldása $(y, 9 - y, y, 9 - y)$ alakú. A másik három erősen alapvető koalíció többletét is $t^* = -1$-ben maximálva kapjuk, hogy $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \big\{(y, 9 - y, y, 9 - y) : 5/2 \leq y \leq 8\big\}$.

Vegyük észre, hogy a $\mathcal{B}$-szűkmagot tartalmazó egyenest megadó négy egyenlet közül bármelyik háromból következik a negyedik, így akármelyikük (de csak az egyikük) figyelmen kívül hagyható. Ettől függetlenül kihagyható akár a $\overline{2}$ akár a $\overline{4}$ koalíció, mert többletük limitálása ugyanazt az $y \leq 8$ korlátot eredményezi. Tehát nyolc olyan szigorú részhalmaza is van $\mathcal{SV}(\mathcal{B})$-nek, amelyik ugyancsak az $\mathbf{LC}(\mathcal{B})$-t határozza meg. Egyedül az $y \geq 5/2$ korlátot eredményező $\overline{13}$ koalíció szerepe nem kiváltható.

A tétellel kapcsolatos másik megjegyzésünk az, hogy a játék $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozottságára tett feltevés nem elhagyható.

14. Példa. Vegyük a 13. példabeli helyzetet, de csökkentsük a nagykoalíció értékét 12-re, azaz legyen:

S	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{34}$	$\overline{123}$	N
$v(S)$	0	0	0	0	8	4	8	8	8	10	12

Mivel $t^* = \min_{x \in \mathbf{pIm}} \max_{S \in \mathcal{B}} e(S, x) = 2 > 0$, a játék nem $\mathcal{B}$-kiegyensúlyozott, a $\mathcal{B}$-mag üres. A 13. példabeli gondolatmenetet megismételve most is azt kapjuk, hogy a $\mathcal{B}$-szűkmagnak benne kell lennie az $x(\overline{12}) = 6$, $x(\overline{34}) = 6$, $x(\overline{14}) = 6$ és $x(\overline{23}) = 6$ egyenletrendszer $(y, 6-y, y, 6-y)$ alakú megoldásainak halmazában. A többi $\mathcal{B}$-beli koalíció többletét is $t^* = 2$-ben maximálva kapjuk, hogy $\mathbf{LC}(\mathcal{B}) = \{(y, 6-y, y, 6-y) : 2 \leq y \leq 8\}$.

Az $y \geq 2$ korlátot egyedül az $\overline{123}$ koalíció adja, a következő legszigorúbb alsó korlát az $\overline{13}$-hoz tartozó $y \geq 1$. Adódik, hogy $\mathbf{LC}(\mathcal{B} \setminus \{\overline{123}\}) = \{(y, 6-y, y, 6-y) : 1 \leq y \leq 8\}$. Mivel $\mathbf{LC}(\mathcal{B} \setminus \{\overline{123}\})$ szigorúan bővebb, mint $\mathbf{LC}(\mathcal{B})$, a most sem alapvető $\overline{123}$ koalíció nem redundáns a szűkmagra nézve. Az erősen alapvető koalíciók tehát nem feltétlenül elegendők a $\mathcal{B}$-szűkmag meghatározásához akkor, ha a $\mathcal{B}$-mag üres.

Irodalom

1. Bondareva O. N. (1963): Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games (in Russian). *Problemy Kibernetiki,* 10:119–139.
2. Derks J., Reijnierse H. (1998): On the core of a collection of coalitions. *International Journal of Game Theory,* 27:451–459.
3. Faigle U. (1989): Cores of games with restricted cooperation. *ZOR – Methods and Models of Operations Research,* 33:405–422.
4. Llerena F. (2007): An axiomatization of the core of games with restricted cooperation. *Economics Letters,* 95:80–84.
5. Maschler M., Peleg B., Shapley L. S. (1979): Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. *Mathematics of Operations Research,* 4:303–338.
6. Potters J. A. M., Tijs S. H. (1994): On the locus of the nucleolus. In: *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, N. Megiddo, ed., Springer, New York, NY, 193–203.
7. Pulido M. A., Sánchez-Soriano J. (2006): Characterization of the core in games with restricted cooperation. *European Journal of Operational Research,* 175:860–869.
8. Ray D. (1989): Credible coalitions and the core. *International Journal of Game Theory,* 18:185–187.
9. Shapley L. S. (1967): On balanced sets and cores. *Naval Research Logistics Quarterly,* 14:453–460.

REDUNDANCY IN SOLUTIONS OF COOPERATIVE GAMES I: THE CORE AND THE LEAST CORE

The various solutions of transferable utility games take into account the cooperative possibilities of all coalitions of players in one way or another. Although their definitions formally involve each of the coalitional values, many of the excess-based solutions are actually determined by a smaller family of coalitions. Disregarding superfluous coalitions can make the analysis and/or the computation of these solutions significantly easier, especially for games related to situations with restricted cooperation possibilities. In this paper we investigate the redundancy of coalitions with respect to the core and the least core. We identify several smaller families of coalitions which completely determine these solutions. In case the core is not empty and not degenerate, we find the smallest such family for the core, but demonstrate that no such smallest family exists for the least core.