Az értékteremtési folyamat időkomponensekre bontásának pénzügy-matematikai aspektusai

Ulbert József – Takács András
Pécsi Tudományegyetem

A TANULMÁNY CÉLJA

A vállalatértékelésben alkalmazott kétfázisú értékelési modellek a vállalat által a jövőben várhatóan realizált végtelen hozamáramot két komponensre bontják: egy véges és egy végtelenbe nyúló hozamsorra. A teljes hozamsor jelenlegi értéke az említett két komponens jelenértékeiből tevődik össze. Az egyes komponensek értéke és azok egymáshoz viszonyított aránya különböző feltételek között értelemszerűen eltérő módon alakul. Tanulmányunkban bizonyítjuk, hogy a konstans és a mértani haladvány szerint növekvő kétfázisú modelleknél a véges és a végtelen szakasz érték-hozzájárulása között determinisztikus kapcsolat áll fenn, amely független a járadékszámítás módjától, továbbá az egyes modelleknél különböző hosszúságú explicit időszakok mellett azonosítjuk azokat a kamatláb-növekedési ráta kombinációkat, melyek mellett a két időhorizont érték-hozzájárulása megegyezik. E pénzügy-matematikai szempontú vizsgálat a vállalatok értékelésekor használatos módszerek megújítását hivatott előkészíteni.

ALKALMAZOTT MÓDSZERTAN

Az irodalomkutatást követően cikkünkben elméleti megközelítésben, pénzügy-matematikai eszközökkel közelítjük meg a kétfázisú diszkontált cash-flow modellek alkalmazásakor megfigyelhető véges és végtelen értékkomponens alakulását, összefüggését.

A KUTATÁS LEGFONTOSABB EREDMÉNYE

Kutatásunk legfontosabb eredményei a véges és végtelen időhorizonton keletkező értékkomponensek determinisztikus összefüggésének bizonyítása, továbbá a különböző explicit előrejelzési időszakok mellett vizsgált kamatláb-növekedési ráta kombinációkra illesztett burkolófelületek grafikus ábrázolása.

ÚJDONSÁGOK, GYAKORLATI JAVASLATOK

Kutatásunk új elméleti eredményekkel gazdagíthatja a hazai szakirodalmat, hiszen a korábban publikált magyar közlemények között hasonló pénzügy-matematikai szemléletű vizsgálatot nem találtunk. Mindemellett hasznos kiindulópontot adhat további empirikus kutatásokhoz, ahol konkrét vállalati adatokon figyelhetők meg a feltárt elméleti összefüggések.

Kulcsszavak: diszkontált cash-flow (DCF) módszer, kétfázisú modell, piaci kamatláb, növekedési ráta, érték-hozzájárulás

BEVEZETÉS

A vállalatértékelés legelterjedtebb, a kutatók és gyakorlati szakemberek által leginkább preferált módszere a diszkontált cash-flow (DCF) eljárás (Fernandez 2002, Hongjiu 2009, Damodaran 2012). Kaplan és Ruback (1995) szerint ez azzal indokolható, hogy egy jól felépített DCF modell a vállalat aktuális piaci értékét 10%-os intervallumon belül képes megbecsülni. A DCF módszer alaplogikája szerint a vállalat értéke megegyezik az általa a jövőben várhatóan realizált pénzáramok jelenlegi értékével. Amennyiben a vállalat működési időtávja előre rögzített, akkor a hozamsor jelenértéke egy véges cash-flow sorozat egyes tagjainak megfelelő kamatlábbal (diszkontrátával) diszkontált értékeinek összegeként adódik. A valóságban azonban jóval gyakoribb az az eset, amikor a cég működési ideje határozatlan: ekkor a számvitelben és a vállalatértékelésben is alapvetőnek számító „going concern" elv (a vállalkozás folytatásának elve) alapján azt feltételezzük, hogy a cég meghatározatlanul hosszú jövőben is fenn tudja tartani tevékenységét, hozamai tehát a végtelenbe vetíthetők. Ennek megfelelően a jelenértékszámítást végtelen időtáv feltételezése mellett, egyszerű vagy növekvő örökjáradék-formulával végezhetjük el (Bélyácz 2003).

Az említett egyszerű vagy növekvő örökjáradékos modellek kötöttségeit (végtelen időtávon konstans vagy azonos ütemben emelkedő pénzáramok feltételezése) legalább részben képesek feloldani a többfázisú modellek, melyek a vállalkozás jövőjét kettő vagy több szakaszra bontják, és szakaszonként eltérő feltételezésekkel élnek. A szakirodalomban nagyon különböző ajánlások, alkalmazások jelennek meg arra vonatkozóan, hogy hány fázist érdemes megkülönböztetni, illetve, hogy ezen fázisokban milyen feltételezések fogadhatók el a hozamok és a tőkeköltség alakulását illetően.

Az angolszász szakirodalomban gyakrabban tűnnek fel a kétfázisú modellek, melyek úgy érvelnek, hogy a vállalat jövőjét hozamtermelés szempontjából egy belátható, ún. explicit előrejelzési időszakra, valamint egy ezt követő, pénzügymatematikai eszközökkel a végtelenbe kivetített hozamtermelési időszakra érdemes felbontani (lásd pl., Berkman et al. 1998, Koller et al. 2010, Damodaran 2012). Az explicit előrejelzési időszakot a növekedés időszakaként jellemzik a szerzők, ennek hossza vállalatonként eltérhet, de egyetértés mutatkozik abban, hogy elegendően hosszúnak kell lennie ahhoz, hogy a vállalat egy teljes befektetési ciklusát lefedje. Levin és Olsson (2000) szerint ez tipikusan 5-7 évet jelent, ezzel szemben Damodaran (2012) modelljeiben 5 és 10 éves explicit időszakok is előfordulnak, míg Koller és társai (2010) egy számpéldájukban 8 éves véges periódussal dolgoznak. Az is megállapítható, hogy bár a külföldi szerzők modelljeiben esetenként az ezt követő végtelen szakaszban is megjelenik egy növekedési ráta, ennek mértéke azonban jellemzően elenyésző.

A hazai szakirodalomban a nemzetközivel összehasonlítva jóval kevesebb mű foglalkozik vállalatértékeléssel, vállalati teljesítményértékeléssel (kivétel ez alól pl. Reszegi – Juhász 2014). Az elérhető írásokban azonban szintén megtalálhatók a kétfázisú modellek, többek között Ulbert (1997) és Takács (2007, 2015) munkáiban, akik azonban a hivatkozott külföldi írásokkal szemben komoly gyakorlati jelentőséget tulajdonítanak a háromfázisú modelleknek is. A kétfázisú modellnél az explicit időszak hosszát Ulbert (1997) 3-5 évben, Takács (2015) 5 évben javasolja megállapítani, míg a háromfázisú modelljeik hasonló módon egy 3 éves explicit időszakból, egy további 5 évre extrapolált növekedési szakaszból és egy végtelen szakaszból épülnek fel. Közös jellemző, hogy az említett hazai ajánlások az óvatosság elvére hivatkozva a végtelen szakaszban már nem alkalmaznak növekedési rátát, az ott keletkező hozamokat az egyszerű örökjáradék elvén becsülik meg.

A külföldi és a hazai szakirodalmat összevetve úgy ítéljük meg, hogy a gyakorlati alkalmazás során az értékelők gyakrabban használnak kétfázisú, mint háromfázisú modellt, az explicit előrejelzési időszakot legfeljebb 10 évben határozzák meg, illetve a végtelen időszakban vagy csak nagyon alacsony, vagy leginkább nulla növekedéssel terveznek. E megállapításokból kiindulva *jelen tanulmány gondolatmenetét olyan* kétfázisú modellekre alapozzuk, melyek két jövőbeli szakaszt, egy *legfeljebb 10 év hosszúságú explicit előrejelzési időszakot és egy utána következő, konstans hozamárammal jellemezhető* végtelen szakaszt különböztetnek meg.

A járadékszámítás módszertanának segítségével három esetet vizsgálunk meg és hasonlítunk össze. Az összehasonlítás célja annak megállapítása, hogy a feltételrendszer megváltoztatása milyen hatást gyakorol a véges és a végtelen időkomponensek jelenlegi értékhez történő hozzájárulására. A vizsgált esetek feltételrendszerükben különböznek egymástól.

Az alkalmazott jelölések (a pénzügy-matematikai szokványokhoz igazodva) a következők:

- *CF* a periódusonkénti járadék – cash-flow – értéke (periódus = év), amely megfeleltethető az utolsó lezárt évben realizált cash-flow-nak,
- *n* az explicit előrejelzési időszak hossza években,
- *r* a végtelen időtávon konstansnak tekintett piaci kamatláb (%), a diszkontrátaként használt minimális jövedelmezőségi elvárás, melyből $q = 1+r$,
- *g* a hozam éves növekedési rátája az explicit előrejelzési időszakban (%),
- *d* a hozam évenkénti konstans összegű növekedésének mértéke az explicit előrejelzési időszakban.

Az eltérő feltételrendszerek segítségével generált egyes esetek elemzése előtt összefoglaljuk a megválaszolni kívánt kérdéseket:

1. Kimutatható-e *a cash-flow-tól független* – azaz a véges futamidő hossza, a kamatláb és a hozamnövekedés alapján egyértelműen meghatározható – determinisztikus összefüggés a véges és a végtelen időhorizont érték-hozzájárulása között? (Érték-hozzájárulás alatt a teljes hozamsor nulladik időszakra vonatkozó jelenértékéhez való hozzájárulást értjük.)
2. Ha igen, függ-e ez a determinisztikus kapcsolat a járadékszámítás módjától (szokásos [év végén jelentkező] versus esedékes [év elején jelentkező] járadék)?
3. Milyen hatással van a kamatláb, a hozamnövekmény illetve az explicit előrejelzési időszak hossza és ezek változása a véges illetve a végtelen szakasz érték-hozzájárulására?

A fenti kérdések módszertanilag megalapozott megválaszolása érdekében az alábbiakban három különböző kétfázisú modellt (konstans hozamsor a szokásos illetve az esedékes járadék elvén, mértani haladvány szerint növekvő hozamsor, számtani haladvány szerint növekvő hozamsor) vizsgálunk meg.

AZ EGYES IDŐKOMPONENSEK ÉRTÉK-HOZZÁJÁRULÁSÁNAK VIZSGÁLATA KÜLÖNBÖZŐ FELTÉTELRENDSZEREKBEN

Konstans hozamsor a szokásos illetve az esedékes járadék elvén (1. eset)

Ebben az esetben az alábbi feltételeket rögzítjük:

- CF időben nem változik (azaz *g*=0 a véges és a végtelen szakaszban egyaránt), azaz egy annuitássorozattal van dolgunk,
- nincs törtperiódus, azaz *n* kerek egész szám,
- a futamidőt egy *n* évig tartó véges szakaszra és egy ezt követő végtelenbe kivetített időszakra bontjuk,
- a piaci kamatláb (*r*) pozitív és időben nem változik, így *q* is pozitív és konstans,

Elsőként arra a változatra helyezzük a hangsúlyt, amikor az annuitássorozat szokásos járadékként viselkedik, azaz a hozamok az adott év végén egy összegben keletkeznek. E feltételrendszer mellett a jövőbeli hozam 0. időponti (jelenlegi) értékösszege az egyszerű örökjáradék formulája segítségével kalkulálható, azaz az annuitás jelenlegi értékeként:

$$PV = \frac{CF}{r} \tag{1}$$

Kifejezett célunknak megfelelően az értéket két időkomponensre bontjuk, azt vizsgálandó, hogy ehhez az értékhez mennyiben járul hozzá a véges (diszkrét) időszak illetve a végtelen időszak. A hozamsort ennek megfelelően felbontjuk egy véges (explicit előrejelzési) időszakra és egy végtelenbe kivetített szakaszra (időindexet nem kell használnunk, hiszen a hozam konstans):

$$PV = \underbrace{\frac{CF}{q} + \frac{CF}{q^2} + \ldots + \frac{CF}{q^n}}_{\text{véges (explicit előrejelzési) időszak}} + \underbrace{\frac{CF}{r * q^n}}_{\text{végtelen szakasz}} \tag{2}$$

Az első tag a (0 – n) időszaki véges futamidejű annuitássorozat jelenlegi értékét az alábbi mértani sor összege adja, amely a véges időhorizont jelenérték-hozzájárulását mutatja meg:

$$\frac{CF}{q}+\frac{CF}{q^2}+...+\frac{CF}{q^n}=CF*\frac{q^n-1}{r*q^n}$$

(3)

A második tag a végtelenbe kivetített hozamsor jelenértéke, ami nem más, mint az (n+1 – ∞) időszak annuitássorozatának 0. időponti értéke az örökjáradék formulát használva. Ez az összeg a végtelen időhorizont érték-hozzájárulását fejezi ki:

$$\frac{CF}{r*q^n}$$

(4)

Könnyen belátható, hogy (3)+(4) = (1), tehát a komponensekre bontás során nem vétettünk:

$$CF*\frac{q^n-1}{r*q^n}+\frac{CF}{r*q^n}=\frac{CF}{r}$$

Szintén könnyen belátható, hogy a véges periódus érték-hozzájárulása a végtelen tag érték-hozzájárulásának q^n-1-szerese lesz, hiszen:

$$(4)*\left(q^n-1\right)=(3)\rightarrow(3)/(4)=q^n-1$$

(5)

Az érték-hozzájárulások mértéke között tehát *a cash-flow összegétől független*, (5) szerinti determinisztikus összefüggés mutatható ki, ami megerősítő választ ad az első kutatási kérdésünkre.

Közelebbről szemügyre véve ezt az összefüggést a következő megállapításokra juthatunk:

- $r, n > 0$ miatt $q^n - 1$ sohasem lehet negatív, hiszen $q > 1$,
- A $q^n - 1 = 1$ esetben (ami értelemszerűen azt jelenti, hogy $q^n = 2$), a két tag érték-hozzájárulása megegyezik, annak mértéke 50-50%,
- Az explicit előrejelzési időszak érték-hozzájárulása akkor és csak akkor lehet nagyobb, mint a végtelen periódusé, ha $q^n - 1 > 1$,
- A végtelen periódus érték-hozzájárulása akkor és csak akkor lehet nagyobb, mint az explicit periódus érték hozzájárulása, ha $q^n - 1 < 1$.

A véges és a végtelen időszak jelenértékeinek arányát kifejező determinisztikus ($q^n - 1$) szorzó értékei a véges időszak hossza (n) és a piaci kamatláb (r) függvényében a következőképpen alakulnak (n=1-10 év, r=1%-15%):

1. táblázat: A (q^n-1) determinisztikus szorzó értékei az 1. esetben
(n=1-15 év és r=1%-15%)

Piaci kamatláb (r)	Véges periódus hossza (n)									
	1 év	2 év	3 év	4 év	5 év	6 év	7 év	8 év	9 év	10 év
1%	0,0100	0,0201	0,0303	0,0406	0,0510	0,0615	0,0721	0,0829	0,0937	0,1046
2%	0,0200	0,0404	0,0612	0,0824	0,1041	0,1262	0,1487	0,1717	0,1951	0,2190
3%	0,0300	0,0609	0,0927	0,1255	0,1593	0,1941	0,2299	0,2668	0,3048	0,3439
4%	0,0400	0,0816	0,1249	0,1699	0,2167	0,2653	0,3159	0,3686	0,4233	0,4802
5%	0,0500	0,1025	0,1576	0,2155	0,2763	0,3401	0,4071	0,4775	0,5513	0,6289
6%	0,0600	0,1236	0,1910	0,2625	0,3382	0,4185	0,5036	0,5938	0,6895	0,7908
7%	0,0700	0,1449	0,2250	0,3108	0,4026	0,5007	0,6058	0,7182	0,8385	0,9672
8%	0,0800	0,1664	0,2597	0,3605	0,4693	0,5869	0,7138	0,8509	0,9990	1,1589

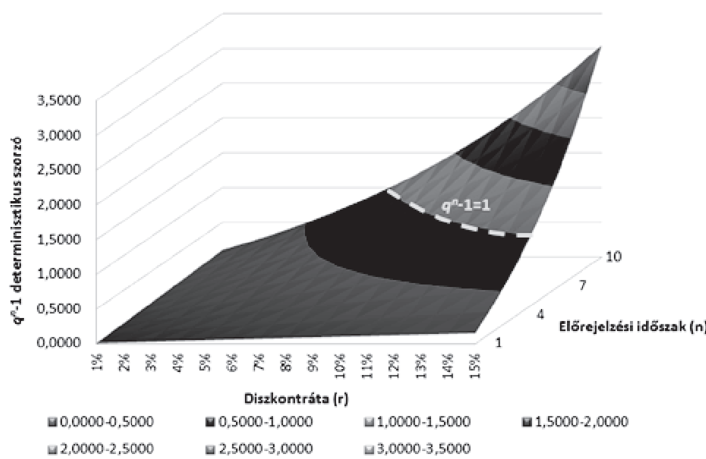
1. táblázat folytatása

9%	0,0900	0,1881	0,2950	0,4116	0,5386	0,6771	0,8280	0,9926	1,1719	1,3674
10%	0,1000	0,2100	0,3310	0,4641	0,6105	0,7716	0,9487	1,1436	1,3579	1,5937
11%	0,1100	0,2321	0,3676	0,5181	0,6851	0,8704	1,0762	1,3045	1,5580	1,8394
12%	0,1200	0,2544	0,4049	0,5735	0,7623	0,9738	1,2107	1,4760	1,7731	2,1058
13%	0,1300	0,2769	0,4429	0,6305	0,8424	1,0820	1,3526	1,6584	2,0040	2,3946
14%	0,1400	0,2996	0,4815	0,6890	0,9254	1,1950	1,5023	1,8526	2,2519	2,7072
15%	0,1500	0,3225	0,5209	0,7490	1,0114	1,3131	1,6600	2,0590	2,5179	3,0456

Forrás: saját szerkesztés

A szürke hátterű cellák azokat az eseteket jelzik, ahol a véges időszak jelenérték-hozzájárulása a magasabb. A szorzó alakulását talán ennél is szemléletesebben ragadja meg az 1. diagramon látható háromdimenziós burkolófelület:

1. diagram: A (q^n-1) determinisztikus szorzó (véges/végtelen arány) burkolófelülete az 1. esetben (n=1-15 év és r=1%-15%)



Forrás: saját szerkesztés

A fentiekből néhány általános törvényszerűségre következtethetünk:

- Minél hosszabb az explicit időszak (ceteris paribus), annál nagyobb súlyt képvisel a teljes hozamsor jelenértékén belül a véges időszak érték-hozzájárulása.
- Minél nagyobb a piaci kamatláb (ceteris paribus), annál nagyobb súlyt képvisel a teljes hozamsor jelenértékén belül a véges időszak érték-hozzájárulása.
- Alacsony kamatkörnyezetben, rövid előrejelzési időszak mellett a véges időszak érték-hozzájárulása zérushoz közelít, azaz a vállalat értékét szinte teljes egészében a végtelenbe vetített hozam generálja.
- A megállapítás fordítva is igaz: magas kamatkörnyezetben, hosszú explicit periódus mellett egyre nagyobb szerepet kap a véges időszak jelenértéke a teljes hozamsor jelenértékéhez viszonyítva.

A váltópontokhoz rendelhető paraméterkombinációkat (azokat az r, n konstellációkat, melyek mellett $q^n - 1 = 1$) az ábrán szaggatott ívvel jelöltük. A 2. táblázat az ezen ívhez tartozó kiemelt értékpárokat tartalmazza, n értékeit a korábban rögzítettek szerint 1 és 10 közötti egész számként definiálva.

2. táblázat: A qn-1 = 1 állapothoz tartozó n, r párok az n=1-10 év intervallumban

Véges periódus hossza (n)									
1 év	2 év	3 év	4 év	5 év	6 év	7 év	8 év	9 év	10 év
100,00%	41,43%	26,00%	18,92%	14,87%	12,25%	10,41%	9,05%	8,01%	7,18%

Forrás: saját szerkesztés

Megállapítható, hogy a vizsgált r = 1%-15% intervallumon belül maradva az explicit előrejelzési időszaknak legalább 5 év hosszúságúnak kell lennie ahhoz, hogy hozzá tudjunk rendelni olyan reális mértékű kamatlábat, amely mellett a véges és végtelen időhorizont jelenérték-hozzájárulása megegyezik. Ennél rövidebb véges szakasz esetén már csak ésszerűtlenül magas kamatláb mellett állhat elő a két érték-hozzájárulás 50%-50%-os megoszlása. Az 1-15%-os „reális" kamatintervallum alkalmazását erősíti az a tény, hogy bár a hazai forintkamatlábak a devizahitelezés időszakában (2005-2013) nemzetközi összehasonlításban kirívóan magasak voltak (Schepp – Szabó 2015) a 15%-os határt még ekkor sem léptük túl. A jegybanki kamatpolitika azóta bekövetkezett markáns változásai nyomán (Abaligeti és társai 2017) pedig már teljesen irreális lenne ennél magasabb kamatszinteket feltételezni.

Ugyanezen eset egy másik változata az esedékes járadék, ahol a feltételrendszer csak egy elemben tér el az eddigiektől: a hozamáramok az egyes évek elején, egy összegben jelentkeznek. A szokásos járadék mintájára a véges időszak érték-hozzájárulása a következő lesz (vö. (3)):

$$CF * \frac{q(q^n - 1)}{rq^n} \tag{6}$$

A végtelen időszak érték-hozzájárulása pedig (vö. (4)):

$$\frac{CF}{rq^{n-1}} \tag{7}$$

Könnyen belátható, hogy (6)+(7) esedékes annuitás feltételei mellett (vö. (1)):

$$PV = \frac{CF * q}{r} \tag{8}$$

(5) mintájára pedig látszik, hogy a determinisztikus szorzó esedékes annuitás esetében ugyanaz lesz, mint szokásos annuitás esetében, hiszen:

$$(6)/(7) = q^n - 1 \tag{9}$$

Ez azt jelenti, hogy a járadékszámítás módja nincs hatással a determinisztikus összefüggésre, azaz a második kutatási kérdésre is pozitív választ kaptunk. Mindez összhangban van Andor és Dülk (2013) megállapításaival.

Mértani haladvány szerint növekvő hozamsor az explicit időszakban (2. eset)

Ez az eset a gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott kétfázisú modellt veszi alapul, melynek mögöttes feltételezései a következők:

- az utolsó lezárt időszak hozama (CF_0) ismert,
- a futamidőt egy *n* évig tartó véges szakaszra és egy ezt követő végtelenbe kivetített időszakra bontjuk,
- *CF* mértani haladvány szerint változik az explicit időszakban, azaz az *n*-edik évig bezárólag mindig igaz, hogy $CF_t = CF_{t-1} * (1 + g)$,
- a növekedés üteme *g*, melyről feltételezzük, hogy nullánál nagyobb és konstans az explicit előrejelzési időszakban, valamint nulla a végtelenbe kivetített időszakban,
- a járadéksorozat szokásos járadékként viselkedik, azaz a hozamok az adott év végén egy összegben keletkeznek,
- nincs törtperiódus, azaz *n* egész szám,
- a piaci kamatláb pozitív és időben nem változik, tehát *r* és így *q* is konstans,
- továbbá $r \neq g$.

Ebben az esetben a véges időhorizont érték-hozzájárulása (vö. (3)) egy mértani sor összegképletéből adódik:

$$\frac{CF_1}{q}+\frac{CF_2}{q^2}+...+\frac{CF_n}{q^n}=CF_0*(1+g)\frac{q^n-(1+g)^n}{(r-g)*q^n} \tag{10}$$

A végtelenbe kivetített, változatlan összegű járadéksorozat (annuitás) 0. időponti értéke pedig (vö. (4)):

$$CF_0*\frac{(1+g)^n}{r*q^n} \tag{11}$$

A teljes 0. időponti érték (10) + (11) néhány átalakítás után (vö. (2)):

$$PV=\frac{CF_0*(1+g)}{q^n}*\left[\frac{q^n-(1+g)^n}{r-g}+\frac{(1+g)^{n-1}}{r}\right] \tag{12}$$

A véges és a végtelen periódus érték-hozzájárulásának aránya, (10)/(11) néhány átalakítás után a következő lesz (vö. (5)):

$$\frac{r}{r-g}*\left[\frac{q^n-(1+g)^n}{(1+g)^{n-1}}\right] \tag{13}$$

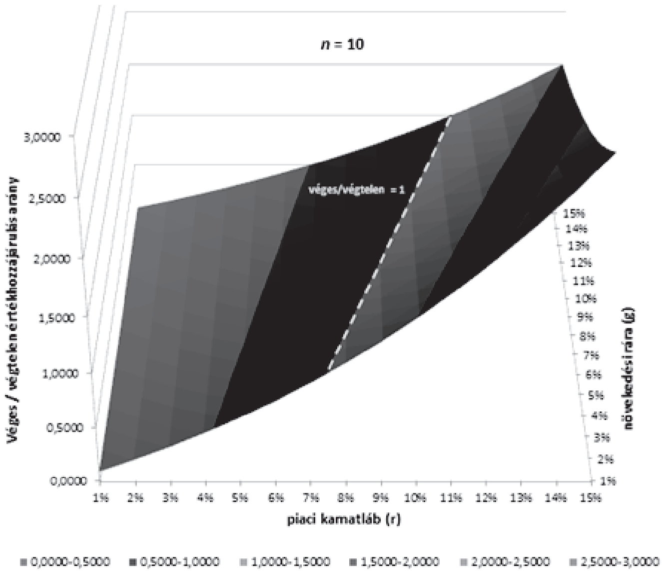
Ebben az esetben is kimutatható tehát egy cash-flow-tól független determinisztikus összefüggés a két érték-hozzájárulás között, így az első kérdésre mértani haladvány szerint változó járadéksorozat esetén is igennel válaszolhatunk. Ezen kívül – mivel az 1. eset a 2. eset egy leegyszerűsített változata, hiszen a (13) formula $g = 0$ feltételezés mellett $q^n–1$-et ad eredményül – az is belátható, hogy a járadékszámítás módja itt sem módosítja a determinisztikus összefüggést. Vegyük szemügyre közelebbről (13) képletben foglalt véges/végtelen érték-hozzájárulási arányt. Általános megállapításaink:

- $r = g$ esetben nem értelmezhető a szorzó, ezért zártuk ki ezt a lehetőséget a feltételekben. Annak valószínűsége, hogy a piaci kamatláb éppen akkora legyen, mint a CF növekedési rátája, ráadásul mindez együttesen valósuljon meg végtelen időszakon keresztül konstans módon, szinte zérus. Ezért ez a feltevés valójában nem tekinthető korlátozónak.
- Könnyen belátható, hogy a véges/végtelen érték-hozzájárulási arány r és g viszonyától függetlenül soha nem lehet negatív, hiszen $r > g$ esetén (13) mindkét szorzótényezője pozitív, $r < g$ esetén pedig mindkettő negatív, így szorzatuk pozitív előjelű.

A kérdés tehát itt is hasonló, mint (5) esetében: a formula milyen paraméterkonstelláció esetén veszi fel az 1 értéket, azaz hol van az a váltópont, ahol a két időkomponens teljes jelenértékhez való hozzájárulása megegyezik? Értelemszerűen az 1-nél kisebb értékek esetében a végtelen érték hozzájárulása a nagyobb, 1-nél nagyobb értékek esetében pedig a véges periódus tesz hozzá többet a teljes jövőbeli hozamsor jelenlegi értékéhez.

Amennyiben n-t rögzítjük, akkor a különböző r, g kombinációk mellett kialakuló érték-hozzájárulási arány az előzőekhez hasonló háromdimenziós burkolófelület formájában megragadható. A 2. diagram 10 éves explicit előrejelzési időszak mellett mutatja a burkológörbét, ahol a szaggatott vonal azon növekedési ráta/kamatláb kombinációk halmazát fejezi ki, melyek mellett a véges és a végtelen szakasz érték-hozzájárulása megegyezik, azaz a (13) formula értéke 1 lesz:

2. diagram: A véges/végtelen érték-hozzájárulási arány burkolófelülete a 3. esetben (n=10 év, g=1%-15% és r=1%-15%)



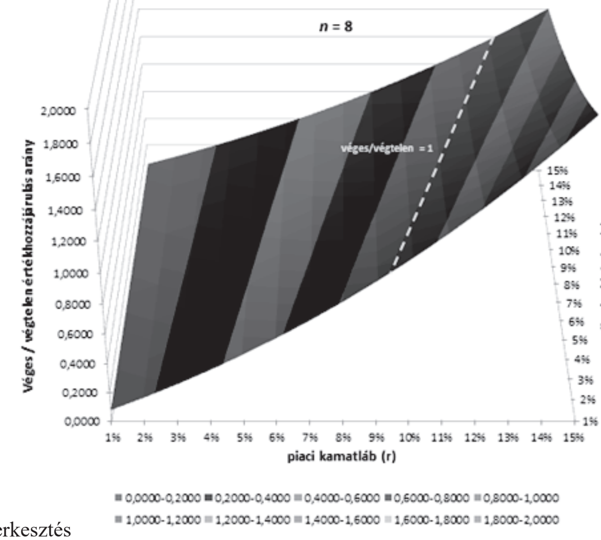
Forrás: saját szerkesztés

A felület alakjából, lejtéséből egyrészt jól látható, hogy a kamatláb emelkedése növeli, a növekedési ráta növekedése pedig csökkenti a véges/végtelen érték-hozzájárulási arányt, másrészt az is megállapítható, hogy a kamatláb jóval erősebben befolyásolja az arányt, mint a növekedési ráta. A szaggatott vonal megmutatja, hogy n = 10 esetén a véges időszak érték-hozzájárulása közepesen magas (kb. 8%-11%) kamatláb esetén éri el, ennél magasabb r szintek mellett pedig már meghaladja a végtelen értékrész hozzájárulását.

Megállapítható továbbá, hogy a növekedési ráta beépítésével a végtelen szakasz érték-hozzájárulása általánosságban emelkedett. Míg az 1. esetben (lásd 1. diagram) a vizsgált paraméter-intervallumokon belül (n=10 év, g=0%, r=1%-15%) a legmagasabb véges/végtelen arány 3,0456 volt, az itt vizsgált esetben (n=10 év, g=1%-15%, r=1%-15%) ugyanez a maximumérték 2,8811.

Érdemes azonban azt is megvizsgálni, hogy a feltárt összefüggésekre milyen hatással van az explicit előrejelzési időszak változása (rövidülése). A 3. diagramon 8 éves véges időszak melletti burkolófelület látható:

3. diagram: A véges/végtelen érték-hozzájárulási arány burkolófelülete a 3. esetben (*n*=8 év, *g*=1%-15% és *r*=1%-15%)

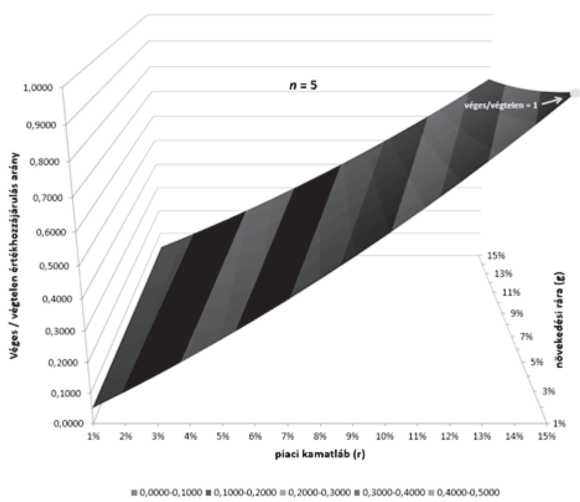


Forrás: saját szerkesztés

Kijelenthető, hogy a véges időszak rövidülése a véges időkomponens érték-hozzájárulására csökkentő hatással van. Láthatóan felfelé tolódott a 1-es érték-hozzájárulási arányt kifejező szaggatott vonal, azaz itt már csak relatíve magas kamatszint (kb. 10%-13%) esetén lesz nagyobb a véges szakasz jelenértékhez való hozzájárulása, továbbá a felület legmagasabb pontja (a véges/végtelen arány maximumértéke) 2 alá csökken.

A vizsgálat utolsó lépéseként *n* értéket tovább csökkentettük 5-re. Az így kapott burkolófelületet a 4. diagram szemlélteti:

4. diagram: A véges/végtelen érték-hozzájárulási arány burkolófelülete a 3. esetben (*n*=5 év, *g*=1%-15% és *r*=1%-15%)



Forrás: saját szerkesztés

A véges futamidő további rövidülése a véges szakasz érték-hozzájárulását természetesen még inkább csökkenti. A diagramon emellett az is látható, hogy *5 éves explicit előrejelzési időszak esetén a véges/végtelen érték-hozzájárulási arány a vizsgált 1%-15% intervallumban csak a legmagasabb (15%-os) kamatláb esetén éri el az 1-es értéket, ezen kívül minden esetben a végtelen szakasz által képviselt értékrész a nagyobb.* A fent bemutatott három eset (n=10, n=8, n=5) 50%-50%-os arányt eredményező r, g kombinációit foglalja össze a 3. táblázat:

3. táblázat: 50%-50%-os véges/végtelen érték-hozzájárulási arányt biztosító *r*, *g* kombinációk az *r*=1%-15% intervallumban (*n*=10, *n*=8 és *n*=5 esetén)

n = 10		n = 8		n = 5	
r	*g*	*r*	*g*	*r*	*g*
1%	-31,48%	1%	-40,77%	1%	-64,45%
2%	-23,44%	2%	-32,19%	2%	-56,00%
3%	-17,64%	3%	-25,97%	3%	-49,66%
4%	-12,78%	4%	-20,78%	4%	-44,30%
5%	-8,45%	5%	-16,14%	5%	-39,45%
6%	-4,45%	6%	-11,87%	6%	-34,96%
7%	-0,66%	7%	-7,83%	7%	-30,69%
8%	2,98%	8%	-3,96%	8%	-26,58%
9%	6,52%	9%	-0,19%	9%	-22,59%
10%	9,99%	10%	3,49%	10%	-18,67%
11%	13,40%	11%	7,12%	11%	-14,80%
12%	16,81%	12%	10,71%	12%	-10,97%
13%	20,20%	13%	14,27%	13%	-7,16%
14%	23,58%	14%	17,84%	14%	-3,33%
15%	26,97%	15%	21,41%	15%	0,50%

Forrás: saját szerkesztés

A táblázatban a fehér hátterű cellák fejezik ki azokat a kamatláb-szinteket, melyekhez olyan pozitív és reális mértékű (legfeljebb 15%-os) növekedési ráta rendelhető, ami a megadott kamatlábbal együtt a véges és a végtelen időhorizont megegyező érték-hozzájárulását eredményezi. A számok visszaigazolják a 2-4. diagramon szemléltetett jelenséget, miszerint a véges időszak rövidülésével egyre magasabb kamatszint mellett veheti fel a véges/végtelen érték-hozzájárulási arány az 1-es értéket: n=10 esetén 8%-11%-os, n=*8* esetén 10%-13%-os, míg n=5 esetén már csak 15%-os piaci kamatláb mellett állhat elő ez az állapot. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy a szürke cellákban látható kombinációk is értelmezhetők (negatív illetve 15%-nál nagyobb növekedési rátára utalnak), csak jelen vizsgálatunk szempontjából kevésbé relevánsak.

Számtani haladvány szerint növekvő hozamsor az explicit időszakban (3. eset)

A véges időszakban számtani haladvány alkalmazása (évről-évre azonos összegű hozamnövekmény feltételezése) a gyakorlatban ritkábban fordul elő, mint az előző pontban bemutatott mértani haladvány szerinti modell. A 3. eset feltételrendszere az alábbi:

- CF_0 ismert,
- a futamidőt egy n évig tartó véges szakaszra és egy ezt követő végtelenbe kivetített időszakra bontjuk,
- CF számtani haladvány szerint változik az explicit időszak alatt, azaz $CF_t = CF_{t-1} + d$.
- az explicit időszakra jellemző éves hozamnövekedés abszolút összege d,

amely pozitív és konstans, a végtelenbe vetített hozamsor vonatkozásában ugyanakkor a növekedés zérus ($d = 0$),

- a járadéksorozat szokásos járadékként viselkedik, azaz a hozamok az adott év végén egy összegben keletkeznek,
- nincs törtperiódus, azaz n egész szám,
- a piaci kamatláb (r), valamint ebből következően q is pozitív és konstans.

Ebben az esetben a véges időhorizont jelenérték-hozzájárulása (vö. (10)) egy számtani sorozat összegképletéből adódik:

$$\frac{CF_1}{q}+\frac{CF_2}{q^2}+...+\frac{CF_n}{q^n}=\frac{1}{rq^n}\left[(q^n-1)(CF_0+d)+d\left(\frac{q^n-1}{r}-n\right)\right] \tag{14}$$

A végtelenbe kivetített, változatlan összegű járadéksorozat (annuitás) 0. időponti értéke pedig (vö. (11)):

$$\frac{CF_0+nd}{rq^n} \tag{15}$$

A teljes 0. időponti érték (14) + (15) (vö. (12)):

$$PV=\frac{1}{rq^n}\left[(q^n-1)(CF_0+d)+d\,\frac{q^n-1}{r}+CF_0\right] \tag{16}$$

Ebből pedig meghatározható a (14)/(15) hányados, azaz a korábbi esetekben is kiszámított érték-hozzájárulási arány:

$$\frac{(q^n-1)(CF_0+d)+d\left(\frac{q^n-1}{r}-n\right)}{CF_0+nd} \tag{17}$$

A (17) formula alapján egy nagyon jelentős különbséget állapíthatunk meg a korábban tárgyalt esetekhez képest: az explicit előrejelzési időszakban számtani haladvány szerinti növekedést feltételezve *a véges és végtelen szakaszok érték-hozzájárulása közötti arány az összes többi esettel ellentétben nemcsak a véges szakasz hosszától, a kamatlábtól és az évenkénti növekménytől, hanem a 0. évi cash-flow-tól is függ*, ezáltal a korábbi esetekben talált determinisztikus összefüggés jelen esetben nem áll fenn. Így pedig értelmét veszti a burkológörbe felírása. Ennek ellenére néhány fontos megállapítást tehetünk erre az esetre is. Egyrészt a felvázolt összefüggések alapján nyilvánvaló, hogy n és r növekedése hatására magasabb, d növekedése esetén pedig alacsonyabb lesz a véges/végtelen érték-hozzájárulási arány. Másrészt pedig a már hivatkozott Andor és Dülk (2013) alapján erre az esetre is kijelenthető, hogy a járadékszámítás módja nem gyakorol hatást a véges/végtelen arányra.

AZ EGYES MODELLEK JELLEMZŐINEK ÉS EREDMÉNYEINEK ÖSSZEVETÉSE

Az előző fejezetben leírt levezetések alapján összevetettük a három vizsgált eset (konstans hozam a szokásos illetve az esedékes járadék elvén, mértani haladvány szerint növekvő hozam az explicit időszakban, számtani haladvány szerint növekvő hozam az explicit időszakban) legfontosabb jellemzőit. Az összehasonlítást kifejezetten a tanulmány elején feltett kutatási kérdésekre koncentráltuk, melyek az alábbiak voltak:

1. kimutatható-e a hozam (cash-flow) összegétől független, kizárólag a véges futamidő (n), a kamatláb (r) és ahol értelmezhető, a hozamnövekmény (g illetve d) által determinált kapcsolat a véges és végtelen szakaszok érték-hozzájárulásai között,
2. függ-e ez a kapcsolat a járadékszámítás módjától (szokásos versus esedékes járadék), valamint
3. hogyan befolyásolja az érték-hozzájárulási arányt az említett paraméterek (n, r, g ill. d) megváltozása.

Az összevetés eredményét a 4. táblázatban foglaltunk össze:

4. táblázat: Az egyes kétfázisú modellek jellemzőinek összegzése

Megnevezés	1. eset (konstans hozamsor, szokásos ill. esedékes járadék)	2. eset (mértani haladvány szerinti hozamsor)	3. eset (számtani haladvány szerinti hozamsor)
A véges/végtelen érték-hozzájárulási arány formulája	$q^n - 1$	$\frac{r}{r-g} * \left[\frac{q^n - (1+g)^n}{(1+g)^{n-1}} \right]$	$\frac{(q^n - 1)(CF_0 + d) + d(\frac{q^n - 1}{r} - n)}{CF_0 + nd}$
A véges és végtelen szakaszok érték-hozzájárulásai között cash-flow-tól független determinisztikus kapcsolat áll fenn?	igen	igen	nem
A véges/végtelen érték-hozzájárulási arány függ a járadék-számítás módjától?	nem	nem	nem
A explicit előrejelzési időszak (n) növekedésének hatása a véges/végtelen érték-hozzájárulási arányra	növeli	növeli	növeli
A kamatláb (r) növekedésének hatása a véges/végtelen érték-hozzájárulási arányra	növeli	növeli	növeli
A hozamnövekmény (g ill. d) növekedésének hatása a véges/végtelen érték-hozzájárulási arányra	nem releváns	csökkenti	csökkenti

Forrás: saját szerkesztés

Az általános megállapításokon túl szemügyre vettük azt is, hogy azonos vagy legalábbis összehasonlítható paraméterkonstellációk mellett az egyes kétfázisú modellek szerint hogyan alakul a véges és végtelen szakasz jelenérték-hozzájárulásának összege, aránya illetve a teljes hozamsor jelenértéke. Az összehasonlítás alapjául az alábbi paramétereket vettük alapul:

- az explicit előrejelzési időszak hossza (n) 10 év,
- az utolsó lezárt évben realizált cash-flow (CF_0) 100 egység,
- a mértani haladvány szerinti modellben a növekedési ráta (g) az explicit időszakban 10%/év,
- a számtani haladvány szerinti modellben az éves hozamnövekmény (d) 10 egység/év,
- a kamatláb 5%.

Mindezen feltételek mellett az 1-4. esetekben felírt modellek az 5. táblázatban látható eredményeket adják:

5. táblázat: Az egyes kétfázisú modellek eredményeinek összehasonlítása
(CF_0 = 100, n = 10, g = 10%, d = 10, r = 5%)

Megnevezés	1. eset szokásos járadék szerint (konstans hozamsor)	1. eset esedékes járadék szerint (konstans hozamsor)	2. eset (mértani haladvány szerinti hozamsor)	3. eset (számtani haladvány szerinti hozamsor)
véges szakasz jelenértékének összege (aránya)	772,2 (38,6%)	810,8 (38,6%)	1303,1 (29,0%)	1165,9 (32,2%)
végtelen szakasz jelenértékének összege (aránya)	1227,8 (61,4%)	1289,2% (61,4%)	3184,7 (71,0%)	2455,7 (67,8%)
véges/végtelen arány	0,6289	0,6289	0,4092	0,4748
teljes hozamsor jelenértékének összege	2000	2100	4487,8	3621,6

Forrás: saját szerkesztés

A táblázatban foglalt számok több általánosságban levezetett összefüggést is alátámasztanak. Az első két oszlop adatai megerősítik, hogy az 1. eset két változatában (szokásos illetve esedékes járadék) a véges és a végtelen szakasz érték-hozzájárulásainak egymáshoz viszonyított aránya megegyezik, az arány tehát nem függ a járadékszámítás módjától. Az esedékes járadék elvén (második oszlop) mindkét szakasz és a teljes hozamsor jelenértékének összege is értelemszerűen (1+*r*)-szerese, konkrét példánkban 105%-a a szokásos járadék elvén (első oszlop) számított értékeknek. Nem kétséges az sem, hogy a modellbe hozamnövekedést beépítve a véges szakasz érték-hozzájárulása csökken a végtelen szakasz javára. Mindez annak a következménye, hogy bár a növekedési ráta a véges szakasz jelenértékére is növelő hatással van, a végtelen szakaszban számított örökjáradék alapját a véges szakasz utolsó évének (az éves hozamnövekmény alapján előre jelzett) cash-flow-ja adja, így a végtelen szakasz jelenértéke is növekszik, mégpedig a végesnél nagyobb mértékben. Végül megállapíthatjuk, hogy a példánkban rögzített, akár egy lehetséges valós helyzetnek is megfeleltethető paraméterek (10 éves explicit időszak, 10%-os növekedési ráta és 5%-os kamatláb) mellett a véges/végtelen érték-hozzájárulási arány minden modellnél jelentősen elmarad az 1-től, azaz bárhogyan is számolunk, a teljes hozamsor jelenértékéből a véges szakasznál szignifikánsan nagyobb részt tesz ki a végtelen időhorizonton keletkező hozamok jelenértéke.

KONKLÚZIÓ

E tanulmányban a vállalatértékelésben alkalmazott kétfázisú modelleket alapul véve megvizsgáltuk a végtelen hozamsorok időkomponensekre bontásának lehetséges eseteit és az azokból levonható módszertani következtetéseket. Kutatásunk új eredményekkel gazdagíthatja a hazai szakirodalmat, hiszen a korábban publikált magyar közlemények között hasonló pénzügy-matematikai szemléletű vizsgálatot nem találtunk.

Az általunk felírt modellekből származó levezetések alapján megállapítottuk, hogy konstans illetve mértani haladvány szerint növekvő hozamsor esetén a véges és végtelen időhorizonton keletkező hozamok között kizárólag a véges futamidőtől, a kamatlábtól és a növekedési rátától függő determinisztikus összefüggés áll fenn, míg a számtani haladvány szerint változó hozamsor esetén ilyen egyértelmű összefüggés nincs, az arányt ugyanis az induló cash-flow összege is befolyásolja. Szintén bizonyítottuk, hogy az elemző azon döntése, hogy adott év hozamait év elején (esedékes járadék) vagy év végén (szokásos járadék) jelentkező pénzáramlásnak feltételezi-e, nem változtatja meg a véges és végtelen szakaszok érték-hozzájárulásainak arányát, ugyanakkor esedékes járadék mellett mindkét szakasz és a teljes hozamsor jelenértéke is magasabb. Végül megállapítottuk, hogy a növekedést tartalmazó modellekben a végtelen szakasz teljes jelenértékből való részesedése nagyobb.

A tanulmányunkban bizonyított elméleti összefüggések jelentősége, hogy azok megfelelő empirikus vizsgálatokkal kiegészítve – amely további kutatásaink tárgyát képezi – alkalmasak lehetnek a hazai vállalatértékelési gyakorlatban meglévő szemlélet megújítására, az alkalmazott eljárások palettájának bővítésére.

HIVATKOZÁSOK

Abaligeti G. – Németh K. – Schepp Z. (2017), ”Időben változó Taylor-szabály a hazai monetáris politika jellemzésére”, Közgazdasági Szemle, LXV január, 24-43

Andor, Gy. – Dülk, M. (2013): ”Harmonic Mean as an Approximation for Discounting Intraperiod Cash Flows”, *The Engineering Economist,* **58** 1, 3-18

Bélyácz I. (2003), *A befektetések és a tőkepiac,* Budapest: Akadémiai Kiadó, 2013

Berkman, H., Bradbury, M. E., and Ferguson, J. (1998), ”The magic of earnings in terminal value calculations”, *Journal of Financial Statement Analysis,* **3** 4, 27-33

Damodaran, A. (2012), *Investment Valuation.* New York; John Wiley and Sons

Fernandez, P. (2002), *Company Valuation Methods. The most common errors in valuations,* Research Paper No. 449, IESE University of Navarra, January

Hongjiu, L. (2009), *Improvement of Discounted Cash Flow Theory in Mergers and Acquisition Based on Games,* ECBI June 2009, 192-5

Kaplan, S. N. and Ruback, R. S. (1995), “The Valuation of Cash Flow Forecasts: An empirical Analysis”, *Journal of Finance,* **40** 4, 1059-93

Koller, T., Goedhart, M. and Wessels, D., (2010), *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies,* 5/e., New York: John Wiley & Sons

Levin, J. and Olsson, P. (2000), *Terminal Value Techniques in Equity Valuation – Implications of the Steady State Assumption,* Working Paper Series in Business Administration No 2000:7

Reszegi L.- Juhász P. (2014), *A vállalati teljesítmény nyomában,* Budapest: Alinea

Schepp Z. – Szabó Z. (2015), ”Lakossági svájcifrank-hitelek árazása – narratíván innen és túl?” *Közgazdasági Szemle,* **62** 11, 1140-57

Takács, A. (2007), „The Practical Application of Discounted Cash-Flow Based Valuation Methods”, *Studia Universitatis Babes Bolyai – Oeconomica,* **LII** 2, 13-28

Takács A. (2015), *Vállalatértékelés magyar számviteli környezetben* második, bővített kiadás, Budapest: Perfekt

Ulbert J. (1997), *A vállalat értéke,* Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar

Dr. habil. Ulbert József CSc, intézetigazgató egyetemi docens
ulbert@ktk.pte.hu
PTE KTK Pénzügyi és Számviteli Intézet

Dr. habil. Takács András PhD, egyetemi docens, dékánhelyettes
takacsandras@ktk.pte.hu
PTE KTK Pénzügyi és Számviteli Intézet

Financial mathematical aspects of separating the value creation process into time components

THE AIMS OF THE PAPER

Two-stage models applied in company valuation separate the expectable future cash flows into two components: a finite and an infinite cash flow series. The present value of the total cash flow series is a sum of the two components' present values. The absolute values and the ratio between the two components vary among different assumptions. In this study, authors prove that, in case of simple and growing annuity-based two stage models, there is a deterministic relation between the value contributions of the finite and infinite periods, which does not depend on whether cash-flows are realized at the beginning or at the end of each year. Furthermore, authors identify those interest rate-growth rate combinations under different lengths of the finite period, where the value contributions of the two stages are equal. This financial mathematical investigation aims to serve as a basis for renewing the valuation methods used in company valuation.

METHODOLOGY

After a thorough literature survey, authors use a theoretical approach and financial mathematical tools to examine the value contributions of the finite and the infinite period under two-stage valuation models with different assumptions.

MOST IMPORTANT RESULTS

The main results of this research are proving the deterministic relation between the value contributions of the two stages, and the graphical presentation of the effects of different interest rate-growth rate combinations on value.

NEW FINDINGS, EMPIRICAL IMPLICATIONS OF THE RESEARCH

This research may widen the domestic literature with new theoretical findings, given that authors did not find similar examinations among earlier published Hungarian studies. Furthermore, these theoretical findings may serve as a basis for later empirical research.

Keywords: discounted cash flow (DCF) method, two-stage model, interest rate, growth rate, valur contribution