BÁLINT ÁGNES

A játéktól a struktúrákig – Dienes Zoltán sejtései nyomában

Dienes Zoltán magyar származású matematikus és pszichológus a matematikatanítás megújítását tűzte célul. Amellett érvelt, hogy a gyerekeknek nem matematikai ismereteket kell tanítani, hanem egyfajta autentikus matematikai gondolkodás kifejlődését kell elősegíteni. Ennek lényege a matematikai struktúrák mentális kialakítása. Dienes olyan játékokat fejlesztett ki erre a célra, amelyekkel való manipuláció révén a gyerekek játszva szereznek matematikailag releváns tapasztalatokat, és képessé válnak a struktúrák megértésére, majd pedig mentális reprezentációjára. A struktúrák reprezentációjának létrejöttében Dienes az absztrakt összefüggések többszörös megtestesítésének (multiple embodiment) szerepét hangsúlyozza. Tanulmányomban a struktúrák mentális kialakításának folyamatát elemzem Dienes nyomán, feltárva a háttérben feltételezhető, Dienes által nem vagy kevéssé reflektált lélektani történéseket. Úgy vélem, a struktúrák keletkezésének megértése az insight (belátás) jelenségének jobb megismeréséhez járulhat hozzá.

Kulcsszavak: Dienes Zoltán, matematikatanítás, struktúra, insight (belátás)

Dienes Zoltán missziója

Dienes Zoltán (1916–2014) munkássága egyetlen küldetés jegyében bontakozott ki: a matematikatanítás megújításán fáradozott. A matematika lényegéhez közelebb vivő, hatékony, de mindvégig örömteli, intellektuálisan izgalmas tanulást vizionált, amely valódi alternatívát kínál a hagyományos, elvont fogalmak és definíciók tanulásán alapuló, a műveletek mechanikus végrehajtását preferáló gyakorlattal szemben (Dienes, 1973, 2007, 2014). Vízióját megannyi jó gyakorlat bemutatásával, tankönyvek írásával, taneszközök kifejlesztésével, továbbá tanárok továbbképzésével a gyakorlatba is átültette. Mintegy ötven éven át a világot járva igyekezett meggyőzni a szakmai közvéleményt (elsősorban a matematikatanárokat) arról, hogy az általa kidolgozott új szemlélet integrálható és gyümölcsöző a matematikatanítás bármely szintjén és színterén. Ezzel párhuzamosan tudományos munkák sorával is igazolta elképzeléseinek lélektani és pedagógiai érvényességét, sőt szükségességét.[1] Dienes tudományos munkássága azonban nemcsak saját intuícióinak igazolását célozta, hanem komoly elméleti és kísérleti kutatómunkát végzett a matematikai pszichológia és tágabb értelemben a kognitív pszichológia területén is.

Dienes vitatta, hogy a matematikatanítás célja a gyakorlatban hasznosítható ismeretek átadása volna: ennek eredménye ugyanis, némileg sarkítva, tulajdonképpen csak kis hatékonyságú, „gyengécske számológépek" kiképzése lenne (Dienes, 1973:33). Ezzel a felfedezés öröméért tanuló gyermeket állította szembe: „Hajlamosak vagyunk elfelejteni, hogy az osztály valódi gyermekekből áll, akik tanáruktól azt várják, tárja fel előttük a világ csodáit; sosem kérdezik meg, hogy ami érdekes, egyúttal hasznos-e. (…) A matematikatanulás mozgatóerejének (…) a felfedezés izgalmának kell lennie" (Dienes, 1973: 31). A matematikatanítás célját Dienes a matematikai gondolkodás kifejlesztésében, a matematikai struktúrák mentális kialakításában látta (Dienes, 1966; Dienes, 1973; Dienes, 2007).

A matematika arcai

Ahhoz, hogy jobban megvilágítsuk Dienes álláspontját, érdemes egy kissé elidőzni a matematika természetével kapcsolatos kérdéseknél. Dienes a matematikai strukturalizmus képviselőjeként azt vallotta, hogy a matematika nem más, mint struktúrák sajátos szövevénye (Dienes, 1966, 1973). Absztraktsága megkülönbözteti mind a humán, mind a természettudományoktól. A matematika mibenléte ontológiai kérdések egész sorát veti fel, amelyek ismertetésére és megoldására itt nem vállalkozhatunk, de reflexió nélkül sem hagyhatjuk. E kérdések egyike, hogy önmagában, az elmétől és a valóságtól függetlenül létezik-e a matematika, vagy az elme terméke csupán, netán a valóságba eleve belekódolt rendszerről van szó. Amennyiben a matematikát külön világnak tételezzük, akkor az az episztemológiai kérdés válik megkerülhetetlenné, hogy megismerhető-e a matematikai tudás, azaz az elme számára megragadhatóak-e a matematikai struktúrák.[2] Az egyszerűség kedvéért – és Dienes szelleméhez hűen (Vö. Bharath és Lesh, 2007:69) – érdemes most arra az álláspontra helyezkednünk, hogy a természeti-társadalmi valóság, a matematikai valóság és az elmében reprezentált valóság egymástól különálló, minőségileg eltérő világok. Feltételezzük továbbá azt is, hogy az elme képes megismerni mind a természeti-társadalmi, mind pedig a matematikai valóságot. „Senki sem tagadhatja – mondja Dienes –, hogy a matematika absztrakt tudomány. Nincsenek ide-oda röpködő matematikai objektumok a valós világ tárgyai és eseményei között" (Dienes, 2007: 4). Ezzel együtt persze számos átfedést találunk a matematikai és a természeti világ között (Saphiro, 1997: 110), amelyek időről időre segítenek áthidalni az absztrakt és a konkrét közötti szakadékot.

Fájdalmas matematika

Mindezek fényében jól érethető Dienes kritikája a matematikatanítás hagyományos gyakorlatával[3] szemben. A kritika egyik lényeges pontja, hogy a matematikatanítás nem tud hatékony segítséget nyújtani a tanulóknak ahhoz, hogy megbirkózzanak a tárgy absztrakt mivoltával. Az ismeretek átadására irányuló tanári törekvés, a túl hamar bevezetett szimbolikus nyelv, a definíciókban kimerülő magyarázatok, a csekély számú szemléletes példa csak keveseknek teszi lehetővé, hogy lépést tartsanak a tananyaggal, megértsék a matematikai fogalmakat és összefüggéseket, és még kevesebbeknek, hogy örömüket is leljék a matematikával való foglalatosságban (Dienes, 2007: 30). Ellenkezőleg: a tanulók többsége nehéznek tartja a matematikát és érzelmileg elutasítja.[4] A matematikához gyermekkorban kialakított attitűd tartósnak bizonyul; a felnőttek nagyjából két csoportra oszthatók abból a szempontból, hogy kompetensnek érzik-e magukat a matematikában,[5] és az a tapasztalat, hogy a többség a nem kompetens csoportba tartozónak vallja magát (Dienes, 1973, 2007). A hagyományos matematikatanítás eredményként könyveli el, ha a tanuló kellő rutint szerez a tipikus feladatok megoldásában, és memoriter-szerűen fel tudja mondani a definíciókat. Nem szükségképpen juttat el tehát a fogalmak és összefüggések megértéséhez, és nem képes valódi problémák megoldására alkalmas matematikai gondolkodást kialakítani (Dienes, 2007: 30). Dienes ráadásul azt tapasztalta, hogy a tényleges megértés sok esetben még a matematikatanárok esetében is hiányzik (Dienes, 1973, 2014). [6]

A problémák hátterében továbbá fellelhető volt egy makacs, a tanárok széles körében elterjedt tanuláslélektani tévképzet, amely szerint a tanulás nem más, mint kemény munka, összeszorított foggal elviselt szenvedés, emberfeletti erőpróba. S mivel a tanulók többsége szemmel láthatóan nem kereste az efféle élményeket, legfeljebb csak büntetések és jutalmazások révén lehetett rávenni őket a „tanulásra”, a tanárok maguk sem igazán bíztak munkájuk eredményességében. Dienes ezzel ellentétes gyakorlatát gyanakodva fogadták. Egyik párizsi bemutató órája után, amely egy öt év körüli kislány spontán örömnyilvánításával végződött, Dienes úgy vélte, újabb szemléletes bizonyítékát adta annak, hogy a matematika tanulása könnyűvé és örömtelivé tehető. Az óra utáni megbeszélésen azonban egy francia kollégája így fakadt ki: „Uram! Ahhoz, hogy a tanulás hatásos legyen, fájdalmasnak kell lennie! Fájdalmasnak! Uram!” (Dienes, 201: 273)

Mi tehát a teendő? A matematikatanítás eredménytelenségéért Dienes nem elsősorban a tanárokat hibáztatta, még kevésbé a tanulókat. Nem is a taneszközök modernizálásától és bővítésétől, vagy épp új tantervek és tananyagok kifejlesztésétől várta a fordulatot (Dienes, 1973). Sokkal inkább gyökeres szemléletváltást sürgetett, új „társadalmi szerződést” a matematika területén, amely megváltoztatja a gondolkodást a matematikatanítás céljáról, és ebből következően a módszertanáról (Dienes, 1966, 1973). Korának legmodernebb, kognitív tanuláslélektani ismereteivel[7] felvértezve, továbbá intuitív és kreatív ötletektől vezérelve vázolta fel a matematikai struktúrák mentális reprezentációjának kialakításával kapcsolatos elméletét (Dienes, 1966, 1973, 2007), majd fáradhatatlannak bizonyult az új taneszközök, tankönyvek és tananyagok kifejlesztésében, hogy a gyakorlatban is igazolja: a gyerekek képesek elsajátítani a matematikai gondolkodás elemeit, sőt örömüket is lelik a matematikával való foglalatosságban.

A továbbiakban azt vesszük szemügyre, hogy miben áll a matematikai struktúrák kialakításának Dienes által feltárt útja, illetve milyen egyéb lélektani folyamatok és mozzanatok valószínűsíthetők a háttérben.

A struktúrák matematikája

Ahhoz, hogy a struktúrák mentális reprezentációjának kialakításáról érdemben szólhassunk, elkerülhetetlen, hogy tisztázzuk, mit is értünk struktúrán. A hétköznapok valóságában számos struktúra vesz bennünket körül: egy sakkjátszma-állás, egy szimfónia vagy éppen a közoktatás rendszere olyan viszonyokat rögzít, amelyek állandónak és sajátos szabályok által szervezettnek bizonyulnak. A matematika, amely a strukturalista felfogás szerint kizárólag struktúrákból áll, számos matematikai struktúrát ismer, ilyen például az egész számok vagy a racionális számok rendszere, vagy éppen a halmazelméleti hierarchiák – a példák sora gyakorlatilag végtelen hosszan folytatható (Vö. Saphiro, 1997:77). A hétköznapok és a matematika struktúrái között nincs lényegi különbség, legfeljebb annyi, hogy másképp tanulmányozzuk őket: a matematikaiakat deduktív úton és kellő alapossággal, a hétköznapiakat inkább induktíve, illetve többnyire sehogy (Saphiro, 1997: 97-98).

A struktúrák objektumokból (például színek, formák, számok, pontok, egyenesek, stb.) szerveződnek, amelyek között relációs és funkcionális viszonyok álltank fenn (Saphiro, 1997:93). Az objektumok a struktúrában nem bírnak identitással (vö. Resnik, 1997),[8] inkább csak helyeket jelölnek, és mindig másodlagosak magához a struktúrához képest. Lássunk néhány hétköznapi példát. Egy dal esetében a dallam jelenti a struktúrát, a dallamot alkotó hangok pedig az objektumok. Az objektumok bizonyos feltételek teljesülése mellett lecserélhetők anélkül, hogy a struktúra maga megváltozna: gondoljunk a hangok másik hangnembe való áttranszponálására. A sakktáblán sem az a fontos, hogy fehér vagy fekete (esetleg zöld) bábuk adnak mattot az ellenfélnek, hanem a bábuk egymáshoz való viszonya, sajátos konfigurációja. Az objektumok ilyenfajta önkényes variálási lehetőségét (azaz, tulajdonképpen identitásuk irreleváns voltát) aknázzák ki a Dienes-féle játékok, amint azt a későbbiekben látni fogjuk.

Saphiro megfogalmazásában tehát a struktúra „egy rendszer absztrakt formája, amely rávilágít az objektumok közötti kölcsönös összefüggésekre, és figyelmen kívül hagyja ezeknek mindazon jellemzőit, amelyek nem befolyásolják azt, hogy a rendszeren belül hogyan kapcsolódnak más tárgyakhoz” (Saphiro, 1997:74).

A struktúrák lehetnek egymástól eltérőek, de egymásnak megfeleltethetőek is izomorfizmus révén (vö. Resnik, 1997; Saphiro, 1997). Ugyanazt a struktúrát tehát akár több különböző rendszer is képviselheti, megtestesítheti. Ez szintén fontos kiindulópontja a struktúrák játékká konvertálásának Dienes gyakorlatában.

Játékos matematika

Miben áll tehát Dienes újítása? Bár készséggel elismerte, hogy a matematika világa absztraktságából kifolyólag nehezen megközelíthető a gyerekek számára, mégsem tartotta lehetetlennek, hogy otthonosan mozogjanak benne, sőt, hitt abban, hogy a gyerekek matematikai gondolkodásba való beavatása hasznos és kívánatos. Nem a hagyományos értelemben vett tananyag megtanítása lebegett célként a szeme előtt, annál sokkal mélyebb megértést ambicionált; ma úgy mondanánk, hogy kompetenciafejlesztésben gondolkodott. Úgy vélte, ha sikerül a matematikai struktúrák hiteles reprezentációját kialakítani a gyermeki elmében, akkor a gyermek maga válik képessé arra, hogy érdeklődése és szükségletei függvényében szert tegyen további tudásra a matematika bármely területén (Dienes, 2014).

Dienes szakított azzal a piaget-i dogmával, miszerint az absztrakt gondolkodás feltételei nem adottak a serdülőkor előtt. Rámutatott, hogy az absztrakt struktúrák felbukkanása az elmében nem életkortól függ, hanem adekvát tanulási stratégiák során megszerezhető tapasztalatoktól (Dienes, 2014). Hangsúlyozta azonban, hogy bár a gyerekek igen korán készen állnak az olyan konstrukciók szervezésére, mint amilyenek a matematikai struktúrák, az elemző gondolkodásra (amit a hagyományos matematikatanítás igen korán sürget) csak a serdülőkor táján válnak képessé (Dienes, 1973, 2014:161-162).

Konstruktivistaként azt vallotta, hogy a tanulásban a gyermek aktivitása a döntő mozzanat, a tanár szerepe pedig az útmutatás, segítségnyújtás, terelgetés, munkaszervezés. A tudás forrása nem a tanár, hanem a gyermek tapasztalatai, amelyeket az előzetes tudás generálta elvárások szerveznek és szűrnek meg. Ez az előzetes tudás teszi integrálhatóvá, vagy épp produktívan konfliktusossá az új ismereteket. Hangsúlyozta, hogy a tanulást kívülről motiváló eszközöket (mint amilyen a jutalmazás és a büntetés) fel kell váltania a gyermek belső motivációjára építő tanári magatartásnak, és a tanulást mindinkább a felfedezés örömével kell egyenlővé tenni a gyermekek számára (vö. Dienes, 1966, 1973: 24-45). Ehhez olyan játékokat[9] fejlesztett ki, amelyek mind matematikai, mind pedig tanuláslélektani szempontból alkalmasak arra, hogy beteljesítsék a dienesi küldetést.

A matematikai struktúrák a maguk absztraktságában kevéssé, a játék nyelvére lefordítva azonban könnyedén hozzáférhetővé válnak a gyermekek számára, vallja Dienes (Dienes, 1973, 2015; Bharath és Lesh, 2007). A játék képes konkrét formában „megtestesíteni” (embody) a struktúrát, „arcot” ad a fogalomnak,[10] ami így már kezelhetővé válik.

Dienes igyekezett a gyerekek számára eleve vonzó, egyúttal releváns matematikai tartalmakat megtestesítő játékokat megalkotni. Ezek egy része kézbe vehető, szabad és strukturált játék keretében egyaránt manipulálható, más részük (főként idősebb gyermekek részére) fejben játszható, vagy minimális eszközt igényel (pl. gyufaszálak, kavicsok, kártyacsomag). A gyermek belső motivációjára építve, továbbá a fokozatosság elvét szem előtt tartva Dienes hangsúlyozta, hogy az egyes játékokkal való ismerkedést mindig szabad játékkal érdemes kezdeni. Ez teszi lehetővé, hogy a gyermekek megismerkedjenek a játékelemek fizikai tulajdonságaival (méret, szín, forma stb.) és az ezekből fakadó lehetőségekkel (kombinációk, egymáshoz való viszonyuk stb.).

A gyakorlat persze néha nem követte ezt az elvet. Maga Dienes volt tanúja egy alkalommal, amikor az általa kifejlesztett logikai készlet egyes darabjainak megismertetéséhez egyik új-guineai tanárkollégája így fogott hozzá: „Ez egy nagy, vastag piros négyzet. Na, most mindenki mondja: Ez egy nagy, vastag piros négyzet. (…) A gyerekek mechanikusan ismételték a mondatot" (Dienes, 2014: 208).[11]

Csak a szabad játék után következhet a játéknak az a strukturált formája, amely irányított feltételek mellett teszi lehetővé, hogy a gyerekek lépésről lépésre felfedezzék a játékba belekódolt szabályszerűségeket és strukturális összefüggéseket, azaz, releváns matematikai tapasztalatokra tegyenek szert. E játékok segítségével kívánta Dienes kikövezni, járhatóvá tenni a konkrét tapasztalattól az absztrakt mentális struktúrákhoz vezető utat. Azt vallotta, hogy matematikát „csinálni" kell, hogy a manipuláció és a játék során felhalmozott tapasztalat végül tudássá strukturálódjon.

A játék azonban, fontos rámutatnunk, nemcsak a manipuláció révén, hanem más módon is hozzájárul az adekvát matematikai struktúrák kialakításához. A szabad játék sajátos tudatállapotba helyezkedést eredményez (sőt feltételez), amit a szorongásmentesség, relaxáltság és pozitív érzelmek jellemeznek. A pozitív érzelmek, mint arra Fredrickson (2001) broaden-and-built hipotézise rámutat – egyéb jótékony hatásaik mellett – kitágítják a figyelem fókuszát, és megnyitják az elmét az információ holisztikus befogadására, továbbá rugalmas és kreatív gondolkodást tesznek lehetővé. A tágító hatás mellett a pozitív érzelmek növelik a környezet iránti érdeklődést és a felfedezőkedvet, ami a környezet felderítésében és vizsgálatában ölt testet, és ennek révén a tudás és a megértés növekedését eredményezi. „Ezek a játékok – jegyzi meg Varga Tamás (1989:7) a Dienes-féle játékokról – (…) szellemi erőfeszítést, intenzív agymunkát kívánnak a játékosoktól. Eleven cáfolatai a játék és tanulás, játék és munka primitív szembeállításának." A környezettel való elmélyült interakció továbbá elősegíti a kihívásokkal való jobb megbirkózást (Fredrickson, 2001, 2009), és nyilván a produktív konfliktusok megoldását is. Dienes nem beszél flow-ról, de mindenképp figyelemre méltó az analógia a Csíkszentmihályi által leírt jelenséget átélők és a dienesi játékokkal játszadozó, és közben örömöt átélő, nem mellesleg új tudásra is szert tevő gyerekek élményei között.

A játék regresszió[12] is, ami, úgy vélem, két okból is gyümölcsöző hatást gyakorol a játékosan tanuló gyermekre. Az egyik ezek közül az, hogy a regresszió jobb hozzáférési lehetőséget teremt a tudattalan tartalmakhoz (Kulcsár, 2004), így az implicit tudáshoz is. A játszás révén a gyermek mozgósíthatja előzetes, talán eddig még megfogalmazásra sem került, tudattalan ismereteit,[13] amelyek nagyban segíthetik az újonnan szerzett információk jobb megértését, szervezését, illetve jó alkalom arra, hogy az így tudatközelbe került implicit tudás releváns része explicit formát öltsön (Vö. Erdelyi, 2004).

A regresszió másik jótékony hatása abban rejlik, hogy lehetőséget teremt a már meghaladott, de kisgyermekkorban nagy szerepet játszó, akkor még egyeduralkodó preverbális és analóg természetű matematikai reprezentációk (Dehaene, 2005) mozgósítására. Alig több mint egy évtizede tudjuk, hogy a kisgyermekek matematikai ismeretszerzését ezek az ősi mentális képek vezérlik (Gallistel és Gelman, 2005), amelyek még igen szoros kapcsolatban álltak a téri-vizuális reprezentációval. A tér és a számok közötti kapcsolat megértését szolgálja és bizonyítja például az igen korán megjelenő mentális számegyenes (Dehaene, 2005), sőt ma már egyre több bizonyíték szól amellett, hogy egy ennél is összetettebb, ún. számtérképpel (Schwarz és Keus, 2004, idézi Györkő, 2015) kell számolnunk már kisgyerekeknél is. Ezek a számok közötti kapcsolatot téri viszonyokként leképező, kép-természetű struktúrák mintegy archetípusként szolgálhatnak az éppen folyamatban lévő reprezentációs törekvések számára, és segíthetik az elvont matematikai struktúrák képként való megértését és leképezését. A struktúrák képben való elképzelését Dienes az absztrakciós folyamat sarkalatos pontjának tekinti (Dienes, 1966, 1973:15). Van Nes és de Lange (2007) vizsgálatai egyértelműen megerősítik, hogy a téri szerkezet szabályszerűségének megértése a gyerekeknél nagyban hozzájárul a matematikai szerkezet szabályszerűségének felismeréséhez.

Az ezerarcú struktúra

De hogyan működnek Dienes játékai? Melyek azok a lélektani folyamatok, amelyek lehetővé teszik a konkrét és az absztrakt között tátongó szakadék áthidalását? „Szakadékról" egyébként túlzás beszélni. Az absztrakt fogalmak sokfélék, attól függően, hogy kialakításuk alacsonyabb vagy magasabb szintű absztrakciót igényel. Az egyszerű gyűjtőfogalmak például, mint amilyen a „felnőttek" vagy az „állatok" fogalma, igen korán megjelennek a gyerekeknél. Az absztrakció „magassági" szintjei is sokfélék, egzakt módon egyelőre nem beazonosíthatók.

Saphiro (1997: 114) az olvasás iránt érdeklődő gyerek példáján keresztül mutatja meg, hogy nem kell az absztrakciót feltétlenül varázslatnak képzelni. Ha néhányszor megmutatjuk a gyereknek az e betűt, lehetőleg több különböző betűtípusban ábrázolva, értelmes szavak részeként, mindannyiszor hangoztatva is az e hangot, akkor a gyerek jó eséllyel felismeri a sokféle formájú e betűben a közös funkciót. Rájön arra, hogy a betűk egy struktúra, az ABC részei, az e betű pedig annak egy helyét tölti be, méghozzá az ötödiket (az angol ABC rendszerében gondolkodva). Mind a funkció, mind a struktúra felismerése absztrakció eredménye.

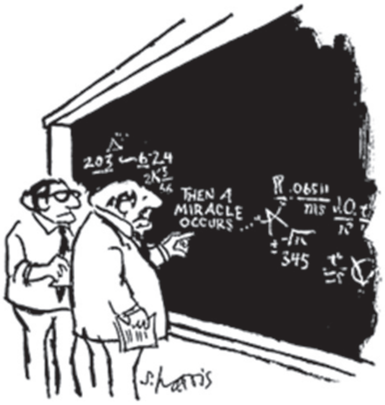
A gyerekek tehát a mindennapi élet során spontán hajlandóságot és felkészültséget mutatnak arra, hogy az absztrakció különböző szintjeit bejárják, fogalmakat alkossanak, szabályt, funkciót és struktúrát ismerjenek fel. Freudenthal (1978) is vallja, hogy a gyerekek számára a világ szervezésének egyik alapvető módszere a strukturálás. Dienes játékai ezt az absztrakciós készenlétet és képességet aknázzák ki.

A játék formájában testet öltött struktúra azonban, konkrétsága okán, nem szükségképpen segíti hozzá a gyermeket az absztrakt struktúra helyes megismeréséhez. Dienes (1966, 1973, 2007; Sriraman és Lesh, 2007) hangsúlyozza, hogy ugyanazt a struktúrát több játék formájában kell megtestesíteni: ez az absztrakcióhoz vezető út ún. többszörös megtestesítés (multiple embodiment) elve. A gyerekek így azonos struktúrájú, de eltérő objektumokkal operáló rendszerekkel szembesülnek, amelyek egyrészt abban segítik őket, hogy az esetlegest elkülönítsék a szükségszerűtől, másrészt abban, hogy analógiás úton felismerjék az izomorfiát, és beazonosítsák magát a struktúrát.

Többszörös megtestesítés nélkül tehát nem várható a mentális struktúraalkotás, ugyanakkor az izomorfia felismerése – figyelmeztet Dienes (1966:101) –, főképp kisebb gyerekek esetében, nem automatikus. A tanárnak kell beavatkoznia, felhívnia a figyelmet a hasonlóságra, és bíztatni őket, hogy keressenek analógiákat a két rendszer között. Dienes később egy ún. szótár-módszert dolgozott ki arra, hogy a gyerekek játékos formában feleltethessék meg egymásnak a két struktúra egyes objektumait, relációit és funkcióit (Dienes, 1973:69-70). A közös vonások beazonosítása fontos eredménnyel zárul: a gyerek megérti a struktúra objektumainak törvényszerűségeit (identitás hiánya, csak helyeket jelölnek stb.) és a struktúra elsődlegességét az objektumaihoz képest. Ezen a ponton már sejtése van magáról a struktúráról.

A Mágus titkai

A „sejtés”: insight.[14] Az insight: „csoda”. Nevezik „aha-élménynek” és „megvilágosodásnak” is, és van egy kevéssé szerencsés magyar neve is, a „belátás”. Olyan, keletkezése számos részletében még tisztázatlan lélektani strukturáló mozzanat, amely során az addig irrelevánsnak tűnő részletekből „összeáll a kép”, értelmezhetővé az addig értelmezhetetlen, „pofonegyszerűvé” az addig átláthatatlanul bonyolult. Az insight olyan tudást eredményez, amely tartós, érvényes, eredményes és produktív (Sternberg és Davidson, 1995, Necka, 2011, Bálint, 2012). Dienes maga is hangsúlyozza, hogy módszere döntően a tanuló insightjára épít (vö. Dienes, 1973: 44), anélkül azonban, hogy tudatosan munkálná ennek bekövetkezését. Dienes bízik a „csodában”, és tapasztalatai megerősítik, hogy az rendre meg is történik. Magabiztossága emlékeztet az alábbi vicc matematikaprofesszorára, aki evidensnek veszi a levezetés második lépéseként a csodát.



"I think you should be more explicit here in step two."

1. kép: A csodákkal számolni kell[15]

De igazságtalanok lennénk, ha elhallgatnánk, hogy épp Dienesnek köszönhetünk nagyon sokat az insight keletkezésének tisztázása terén. A matematikai struktúra megsejtéséhez vezető út ugyanis nem más, mint az insighthoz vezető út. Talán nem az egyetlen lehetséges út, de mindenesetre egyelőre a legjobban részletezett, és részleteiben a legpontosabban lekövethető.

A két kulcs, amellyel Dienes hozzájárult az insight keletkezésének megfejtéséhez, a megtestesítés (embodiment) és a többszörös megtestesítés (multiple embodiment) mozzanatai. Azzal, hogy kézzelfogható közelségbe hozta az absztraktot, majd megmutatta az utat az újraabsztrahálás felé, jó modellt adott az absztrakt-konkrét-absztrakt átjárás megértéséhez. A többszörös megtestesítés elve pedig azért kulcs az insighthoz, mert arra mutat rá, hogy ugyanazt a struktúrát csak több változatban szemlélve jutunk el az azonosság, és ezen keresztül a lényeg megértéshez, ami az insight döntő mozzanata. Ennek előzménye a relációk és funkciók analogikus letapogatása éppúgy, mint az irreleváns elemek kiszűrése, azaz az izomorfia felismerése. A Dienes által eleve belekódolt analógia már csak az analógiás gondolkodás beindítását teszi szükségessé.[16]

Abban, hogy ezen a ponton az analógiás gondolkodás nem indul be spontán mindenkinél és minden esetben, nincs semmi meglepő. Ahhoz, hogy egyszer csak lehulljon a szemünkről a hályog, amikor nyilvánvaló igazságok/tudás küszöbén állunk, gyakran szükség van valami pluszra: egy új információra, egy jó analógiára, vagy éppen egy jó instrukcióra az információ szervezésére vonatkozóan.[17] Ezt már Vigotszkij is leírja, amikor azt a lélektani pillanatot elemzi, amikor a megismerő tudása csak egy „hajszálnyira" (ugyanakkor, minőségét tekintve: fényévekre, lélektanilag pedig egy insightnyira, Vigotszkij kifejezésével élve: a proximális zónájában) van a számára elérhető tudástól, mégsem tudja átlépni saját korlátait (Vö. VYGOTSKY, 1987; VAN DER VEER és VALSINER, 1991; OAKLEY, 2004). A segítségnek ilyenkor kívülről kell érkeznie,[18] és a maga egyszerűségében „telibe kell találnia".[19] A „csoda" pedig megtörténik, a tantusz leesik. Dienes is alkalmazott ösztönösen ilyen segítséget, amit „light touch"-nak (gyengéd érintésnek) nevezett (DIENES, 2014: 322), illetve ide sorolhatjuk részéről az analógiák felismerésére buzdító tanári magatartás sürgetését is.

Dienes tehát – mellékesen vagy sem – kidolgozta az insight elérésének (legalábbis egyik) „technológiáját". A magát szívesen „mágusnak" nevező matematikus valószínűleg maga is insight útján talált rá a kulcsokra, de szívesebben „varázsolt" inkább, mintsem a varázslat – számára irreleváns – részletein töprengett. Absztrakciós és generalizációs folyamatként írta le a struktúra mentális kialakulását; jobban foglalkoztatta a „mit", mint a „hogyan". Mégis egy olyan titokról rántotta le a leplet, amely eddig megoldhatatlannak bizonyult, és olyan magától értetődően, mintha az egyszeregyet fejtegetné. Segítségével számos insight-jelenség válik magyarázhatóvá, és új kérdések felvetése kerülhet napirendre.

A struktúrák viselt dolgai

Dienes jól tudta, hogy a struktúra megsejtésével a csodák sora nem ér véget, sőt csak most kezdődik igazán. Az absztrakciós folyamat következő lépése a dienesi modellben a struktúráról készített mentális kép, az első mentális reprezentáció, amely később talán elvethető, de attól kezdve, hogy létrejött, kapaszkodót jelent a további, egyre komplexebb és absztraktabb mentális reprezentációk megalkotásához. Képként kell tehát megfogalmazódnia az eddig megértett összefüggéseknek. Ennek a képnek, bármennyire is önkényes, a struktúra lényegéről kell árulkodnia.

Az absztrakció meglehetősen magas szintje ez, bár még nem a legmagasabb. Gondoljunk bele: a matematikai struktúrák többsége természeténél fogva végtelen, az emberi elmének elméletileg minden esetben ezt a végtelenséget kellene megragadnia ahhoz, hogy képet alkosson róla (SAPHIRO, 1997:111-112). Az absztrakció lényegéhez tartozik, hogy az egyediből az általános kivonása révén megnyugtatóan képes kezelni a végtelenség problémáját is. Az absztrakció azonban ily módon csak némi veszteség árán tudja a végtelent a véges reprezentációba „begyömöszölni". A struktúra reprezentációjába a generalizáció segítségével csempészhetjük vissza a végtelent, amely az egyedi eseteket a szabályosságok mentén általánossá terjeszti ki, így jutva el a nemcsak, hanem és a bármely belátásáig (vö. DIENES, 2007: 8).

A mentális kép megalkotásától kezdve a megtestesített struktúra (azaz a játék) új funkciót kap: a mentális reprezentáció validitásának tesztelésére használható (DIENES, 2007:25). Az immár belsővé lett, képként rendelkezésre álló struktúrával műveleteket lehet végezni, hiszen elérhetővé válik a képzeleti és egyes gondolkodási folyamatok számára. Tudás született.

A kép azonban még néma tudás, és akármilyen komplex és elvont is, nem szükségképpen teljes. Képi természeténél fogva nem teszi lehetővé a módszeres analízist, távol áll tőle a logikai szervetettség, és ebben a formájában nyelvileg artikulálhatatlan. Ahhoz, hogy az elme racionális-logikus működésmódjai számára is birtokba vehető legyen, le kell fordítani a nyelvre, azaz digitális kódra, esetünkben a matematika szimbolikus nyelvére.

Dienes több helyen hangsúlyozza (DIENES, 1966, 1973; SRIRAMAN és LESH, 2007), hogy a matematikai nyelvi megfogalmazást nem szabad elsietni, különben a „szimbólumsokk" jelenségével kell számolnunk. A túl korán bevezetett szimbolizáció ugyanis inkább akadálya, mintsem segítője a megértésnek: a gyerek számára olyan élmény, mintha idegen nyelven szólnának hozzá, sőt neki is ezen az idegen nyelven kellene megnyilatkoznia. A gyerekek egy része ettől „beszorong", ellenállást fejt ki, vagy menekülésre fogja a dolgot.[20] A matematika nyelve, mondja Dienes, két fő tulajdonságban különbözik a hétköznapi nyelvtől (Dienes, 2007:17). Először is: nem redundáns. Ezt szokni kell, mert a megszokottól eltérő gondolkodási fegyelmet és kifejezéskultúrát követel. A matematika nyelve másrészt absztraktabb, mint a hétköznapi: olyan fogalmakkal operál, olyan relációkat és műveleteket fejez ki, amelyek sokszor csak a matematika valóságát tükrözik, és ezt a valóságot először meg kell ismerni, hogy állításokat tehessünk róla, vagy érvényes kérdéseket vessünk fel vele kapcsolatban. Amennyiben azonban éppen időben (vagyis a képi reprezentáció létrejöttét követően) vezetjük be a matematikai nyelvet, újabb felismerésekhez, és jobb megértéshez juttathatjuk hozzá a gyereket, aki mellesleg egy új intellektuális játék birtokába is jut azzal, hogy megtanulja matematikai tapasztalatait a matematika nyelvén elbeszélni.

Fontoljuk meg: az újabb felismerések újabb insightokat jelentenek, a jobb megértés pedig fogalmi váltást – ezek külön-külön és együtt még inkább a tudás minőségi átalakulását eredményezik. Az első insight után, amely a struktúra mentális megszületését eredményezte, mintha egy lavina indulna meg, ami hihetetlen gyorsan hitetetlen nagy területen végezhet átalakító munkát – ezúttal ezt pozitív értelemben értve. De éppúgy, mint a lavina elindulásához, a szimbolizációs folyamat megindításához is szükség van egy kiváltó külső hatásra. Megint fontos szerep jut a jókor és jól alkalmazott tanári instrukciónak, a „light touch"-nak vagy a scaffolding (Oakley, 2004) megfelelő formáinak. Az ilyenformán egyre inkább megerősödő és kitisztuló mentális reprezentáció pedig elkezdi élni az elmében azt a társasági- és magánéletet, ami a mentális reprezentációk sajátja: kapcsolatokat létesít, és részt vesz a megismerő folyamatok további irányításában.

A formalizáció Dienes (2007:28) szerint az absztrakciós folyamat legmagasabb szintje és végállomása. Itt a természetes nyelv szintaxisa és szókészlete már nem sok relevanciával bír, ezek szerepét képletek, szimbólumok veszik át. Ez a formalizált matematikai nyelv a legalkalmasabb arra, hogy axiómák formájában kifejezze a struktúra megismert tulajdonságait, majd adott szabályok alkalmazása révén tételekké szintetizálja őket, amelyeket aztán bizonyítás segítségével igazol. A formalizált nyelv lehetővé teszi a struktúra logikai-racionális elemzését, validitásának további vizsgálatát, és a vizsgálatok fényében az esetleges korrekciót. Erre a kisebb gyerekek, ismeri el Dienes (1973:63), még nem képesek, legfeljebb a kivételesen tehetségesek. A tudás ilyen értelmű elmélyítése inkább a serdülőkor és az azt követő idők kiváltsága.

A szimbolikus nyelvre lefordított majd formalizált struktúra immár kompetens, „felnőtt" tagja a mentális reprezentációk társadalmának. Felkavarhatja a „helyi társadalomban" kialakult állóvizet, konfliktust generálhat, belső paradigmaváltást idézhet elő vagy tehet sürgetővé, paradigmák igazolójává vagy megkérdőjelezőjévé válhat. Nem lehet nem számolni vele többé.

Dienes tisztában volt azzal, hogy a tudás nem azonos az egyes struktúrák megragadásával, a megismerés pedig nem ér véget azok formalizációjával. Abból a nézőpontból, hogy a matematika struktúrák végtelen szövevénye, az is következik, hogy nem elégedhetünk meg egy-egy elszigetelt mentális struktúra kialakításával, sokkal inkább struktúraszövetek kiépítése lehet a cél. A tudás a struktúrák világában való könnyed tájékozódást jelenti, egymáshoz való viszonyaik átlátását, a struktúrán belüli struktúrák felfedezését, és végső soron a struktúrákkal végzett műveletek képességét. Ez a matematikai gondolkodás, amelynek kialakítását Dienes ambicionálta, és amelyről hitte, hogy minden gyerek elsajátíthatja, hogy aztán örömét lelje benne.

Szubjektív megjegyzések

Bár izgalmas vállalkozás pszichológusként végiggondolni a matematikatanítás szemléleti megújítását célzó dienesi törekvést, e kaland legfőbb hozadéka számomra mégsem a matematikával kapcsolatos. A Mágus varázsmódszerének titkába beavatást nyerni rendkívül tanulságos és megvilágosító (insightful) élmény volt. Ennek fogalmi (és érzelmi) nyeresége ad új lendületet ahhoz, hogy tovább boncoljam az insight természetét.

Jegyzetek

1 Pl. Dienes (1966, 1973, 2007)
2 Az egymást sokszor kizáró válaszok sokaságát ld. Resnik (1997) és Saphiro (1997).
3 Dienes kritikája a huszadik század második felében, főként az angolszász világban tapasztalt gyakorlatot érinti, de a világot járva mindenütt nagyjából ezzel a hagyománnyal találta magát szembe, így általános érvényűnek is tekinthető. Diagnózisa, a matematika tanításának megújítását szolgáló megannyi kísérlet ellenére (vagy mellett) gyakorlatilag ma is érvényes.
4 Fontoljuk meg: a matematikában való sikerességet a gyerekeknél nem elsősorban a képességek határozzák meg, hanem a tárggyal kapcsolatos érzelmi attitűd pozitív vagy negatív volta! Vö. Dehaene (2005)
5 Ide kívánkozik a vicc, amely szerint háromféle ember van: aki tud számolni, és aki nem.
6 Maga Dienes többek között ezzel magyarázta a tanártársadalom egy részének ellenállását az új szemlélettel kapcsolatban (vö. Dienes, 2014).
7 Rövidebb-hosszabb ideig ráadásul személyes munkakapcsolatban állt Jean Piaget-val és Jerome Brunerrel is, ami arra inspirálta, hogy a nagy kortársak elméleti megfontolásait mérlegre tegye, és részben ezek tükrében fogalmazza meg saját álláspontját. (Dienes, 2014)
8 Saphiro (1997) viszont vitatja ezt az állítást, de érveinek ismertetésétől itt tekintsünk el, mert nem tartozik szorosan a tárgyunkhoz.
9 Továbbá történeteket és táncokat is. Dallamok, dalok írása sem állt tőle távol, ha új formát keresett egy struktúra számára. Játékainak egyik gyűjteménye magyarul is megjelent: ld. Dienes (1989). A játékfejlesztés a dienesi alapelvek mentén ma is aktívan folyik, pedagógusok, matematikusok és képzőművészek világszerte dolgoznak további izgalmas taneszközök kialakításán. Ld. pl. VisMats mozgalom http://www.vismats.com/ vagy a szegedi Játékos Matematika Alkotóműhely http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/TOKI/matematika/alkotomuhely.htm .
10 Amikor Dienes „fogalomról" beszél, akkor is „struktúrát" ért alatta, ám egyes kontextusok (pedagógiai) inkább egyik, míg mások (matematikai, kognitív pszichológiai) a másik terminus használatát igénylik.
11 Általános iskolás évei alatt e sorok írója is találkozott – szigorúan mindig csak néhány percre – a Dienes-készlettel, amit kizárólag utasítások végrehajtásának céljából vehetett kézbe; bármiféle játéktevékenység a készlet darabkáival fegyelmezetlenségnek minősült.
12 A szót az eredeti freudi értelmében használom, azaz: visszacsúszás egy korábbi, már meghaladott fejlődési szintre. Ezúttal nem a patologikus formáiról beszélek, hanem a személy által kontrollált „jótékony" változatáról.
13 Nyilván a tudatosakat is, de ennek nem feltétele a regresszió.
14 A „sejtés" persze az esetek többségében intuíció, ami nem szükségképpen insight, de

a dienesi struktúraalkotás folyamatának kontextusában igaz ez az állítás. A „sejtés" szót itt a maga köznapi értelmében használom, nem a matematikusokat foglalkoztató, bizonyításra szoruló állítás értelmében.

15 Felirat a táblán: „Aztán csoda történik." A másik professzor tanácsa:„Azt hiszem, itt a második lépésben világosabban kellene fogalmazni." Forrás: http://wiki.ubc.ca/images/8/8a/Cartoon.math.gif

16 A való világ dolgaiba belekódolt analógiák ugyanígy működnek!

17 Bálint (2013)

18 Nincs kizárva azonban, hogy néha az egyént saját tudattalanja segíti ki, bár bizonyos értelemben ez a segítség is „kívülről" jön.

19 Az insight keletkezésének ezek a feltételei kevéssé írhatók le egzakt módon. A hétköznapokban ritkán kapunk tanári segítséget: legtöbbször a véletlenen múlik, hogy rábukkanunk-e a szükséges információra, „szembejön-e" az analógia, megérkezik-e a „light touch" a kellő időben. Még kevésbé írhatók le egzaktul a „telibe találás" valószínűleg nagyon is szubjektív feltételei…

20 A *fight or flight* jegyében nyilván olyanok is vannak, akik megküzdenek a problémával, de valószínűleg ők a kisebbséget képviselik.

Hivatkozások

Bálint Ágnes (2012): Insights About Insight Learning. In: Andl Helga, Molnár-Kovács Zsófia (szerk.): Iskola a társadalmi térben és időben. 2011-2012. II. kötet. PTE Oktatás és Társadalom Doktori Iskola, Pécs. 31-37.

Bálint Ágnes (2013): Hamis belátás – téves tudás. Előadás az Autonómia és Felelősség – Tanulásközpontú Pedagógusképzés című konferencián. PTE BTK NTI, Pécs. Kézirat.

Dehaene, S. (2005): The Number Sense. How the Mind Creates Mathematics. Oxford University Press.

Dienes, Z. P. (1966, ed.): Mathematics in Primary Education. Learning of Mathematics by Young Children. UNESCO Isntitution for Education, Hamburg http://unesdoc.unesco.org/images/0001/000184/018427eo.pdf [2013.05.20.]

Dienes Zoltán Pál (1973): Építsük fel a matematikát! Gondolat, Budapest.

Dienes Zoltán Pál (1989): Dienes professzor játékai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Dienes, Z. P. (2007): Some Thoughts on the Dynamics of Learning Mathematics. The Montana Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, Monograph 2, pp. 1-118. http://www.math.umt.edu/tmme/Monograph2/Dienes_book.pdf [2015.03.23.]

Dienes Zoltán Pál (2014): Játék az életem. Egy matematikus mágus visszaemlékezései. Edge 2000 Kiadó, Bp.

Erdelyi, M. (2004): Subliminal Perception and its Cognates: Theory, Indeterminacy, and Time. Consciousness and Cognition, 13, 73–91.

Fredrickson, B. L. (2001): The Role of Positive Emotions in Positive Psychology. The Broaden-and-Build Theory of Positive Emotions. Am Psychol. 2001 March; 56(3): 218–226.

Fredrickson, B. L. (2009): Positivity. New York: Random House.

Freudenthal, H. (1978): Weeding and Sowing. Preface to a Science of Mathematical Education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gallistel, C.R. – Gelman, R. (2005): Mathematical Cognition. In: Holyoak, Keith J. – Morrison , Robert G. (2005, eds): The Cambridge Handbook of Thinking and Reasoning. Cambridge University Press.

Györkő Enikő (2015): Numerikus képességek tipikus és atipikus fejlődése óvodáskorban.

Doktori (PhD) értekezés. Kézirat. http://pszichologia.pte.hu/sites/pszichologia.pte.hu/files/files/files/dok/disszert/d-gyorko_eniko-2015.pdf [2015.06.18.]

Kulcsár Zsuzsanna (2004): A serdülőkori személyiségalakulás. In: Pléh Csaba – Boross Ottilia (szerk.): Bevezetés a pszichológiába. Osiris, Budapest. 694-909.

Necka E. (2011): Insight. In. Runco, M. A. – Pritzker, S. R. (Szerk.): Encyclopedia of Creativity. 1. 670-672.

van Nes, F., de Lange, J. (2007): Mathematics Education and Neurosciences: Relating Spatial Structures to the Development of Spatial Sense and Number Sense. The Montana Mathematics Enthusiast, 4.2., 210-229. http://www.math.umt.edu/tmme/vol4no2/tmmevol4no2_pp.210_229_netherlands.pdf [2015.03.23.]

Oakley, L. (2004): Vygotsky's theory of cognitive development. In: Oakley, L. (2004) Cognitive Development. Routledge, London, New York. 37-55.

Resnik, M. D. (1997): Mathematics as a Science of Patterns. Oxford University Press, Oxford, New York.

Saphiro, S. (1997): Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology. Oxford University Press.

Schwarz, W. – Keus, I. M. (2004): Moving the Eyes Along the Mental Number Line: Comparing SNARC Effects With Saccadic and Manual Responses. Perception and Psychophysics, 66, 651-664.

Sternberg, R. J. – Davidson, J. E. (Szerk.) (1995): The Nature of Insight. Cambridge, MA: MIT Press.

Sriraman, B. – Lesh, R. (2007): A Conversation With Zoltan P. Dienes. Mathematical Thinking and Learning, 9:1, 59-75. http://dx.doi.org/10.1080/10986060709336606 [2015.03.23.]

Varga Tamás (1989): Előszó. In: Dienes Zoltán (1989): Dienes professzor játékai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 7-8.

Van der Veer, R. – Valsiner, J. (1991): Understanding Vygotsky: A Quest for Synthesis. Blackwell.

Vygotsky, L. (1987): The development of scientific concepts in childhood. In R.W. Rieber & A. S. Carton (Eds): The collected works of LS Vygotsky. Vol 1. New York: Plenum Press.